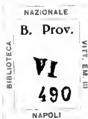
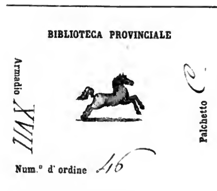

FONDO PIZZOFALCONE


NAZIONALE
B. Prov.
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
VI
490
NAPOLI


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XVII
Palchetto C
Num.° d' ordine 16

NUOVA

RACCOLTA D'AUTORI ITALIANI

CHE TRATTANO

DEL MOTO DELL' ACQUE

TOMO II.



BOLOGNA · MDCCCXXIV

DALLA TIPOGRAFIA DI JACOPO MARSIGLI.

OPUSCOLI

IDRAULICI

DI MARIO LORGNA = DI PIETRO ZULIANI

DI FRANCESCO FOCACCI = DI ANTONIO TADINI

DI ISIDORO BERNAREGGI = DI GIANBATISTA MASETTI.

Bologna 1824

Tipografia Marsigli

DISCORSO

INTORNO AL RIPARARE DALLE INONDAZIONI DELL' ADIGE LA CITTÀ DI VERONA

DI

ANTON-MARIO LORGNA.



CAPITOLO PRIMO.

I. Non altro mi propongo in quest' operetta, che di andar meco medesimo considerando quai provvedimenti sarebbero più efficaci, e sicuri, onde riparare per quanto è possibile dalle inondazioni, alle quali va soggetta frequentemente la città di Verona; assunto veramente assai più dilicato, che quei non estimano, i quali non vi sono avvicinati tanto da poterne fare sperimento; e tanto più, che a difficoltarlo concorrono moltissime circostanze particolari, e forse ancora la necessità di lottare con qualche opinione inveterata, la quale toglie bene spesso all' anima quella pieghevolezza, che è pur necessaria per ascoltar la ragione; e non è poi meraviglia, se in suggetto, che non è proprio di tutti sia dal vero lontanissima. Ma tutto ciò non mi atterrisce a segno che io debba mancare a me stesso, alla verità, e a quel dovere, che tutti abbiamo di rendere, secondo le proprie forze, a quella società, in cui si vive, qualche tributo di riconoscenza per quei tanti comodi ed aiuti, che ella ci somministra.

II. Mi fo dunque in primo luogo a rintracciare la causa radicale di queste inondazioni, senza di che non mi parrebbe nè poter adequatamente ragionare, nè adattare al male un proporzionato rimedio. Nè credo esser l' origine loro molto difficile da scoprirsi, come quelle, che visibilmente da un soverchio, e repentino afflusso di acque procedono, le quali a cagione degl' impedimenti, che incontrano, non potendosi smaltire a proporzione delle sopravvegnenti, si accumulano, e ingrossano il fiume a segno nell' alveo nostro, che non

trovando ripari d'altezza superiore al loro pelo, che le tengano in obbedienza, traboccano, e per le parti più basse della città si espandono liberamente.

III. Tali gonfiamenti sono poi maggiori, o minori a misura che un maggiore, o minor numero di cause operanti concorre a produrli: quindi le maggiori, o minori inondazioni. Ma se essendo ognuna valevole per se stessa ad ingrossare il fiume operando gradatamente, accada poi, che il massimo numero di esse cospiri nel tempo istesso al medesimo effetto, succedono quelle straordinarie piene, che rendono l'alveo improporzionato a contenerle, come fu quella del 1757, e tante altre anteriori, delle quali nelle memorie di questa città, si conservano i riscontri. Le piogge copiose per esempio unite a subito squagliamento di nevi, le quali fanno gonfiare ad un tratto i fiumi influenti, e portano al fiume nostro moli spaventose d'acqua, sono comunemente quelle cause, che anche più repentinamente operano, e concorrono combinate a farlo crescere a dismisura. Poichè discorrendo esse precipitosamente per luoghi per lo più coltivati, e spogliati per conseguenza d'ogni ritegno di boschi, e di macchie, s'accompagnano colla terra, sassi, e ghiaia, che trovano pel cammino, e portandosi poscia furiosamente nel fiume, l'ingrossano improvvisamente, e senza confronto più di quel che farebbero, se o gradatamente vi confluissero, o il numero di ostacoli non impedisse poi che si scaricassero prontamente con velocità proporzionata all'influsso. Di qua in seguito procedono le deposizioni che va facendo per via l'Adige divenuto perciò torbidissimo, perchè mancando a luogo a luogo l'impeto all'acqua o per impedimenti, o per diminuzione di pendenza, o per altre ragioni, lascia non uniformemente, se si vuole, nè per tutta la larghezza, ma or da una parte, or dall'altra, qua più, e là meno le materie, che non può più trasportare, e la capacità dell'alveo si diminuisce.

IV. Nè questo occupamento di vaso è solamente vero in generale; come si danno a credere alcuni, i quali non ammettono, che possa aver luogo nel Lungadige della città, riposando sulla forza, colla quale veggono passar le acque sotto gli archi de' ponti. Poichè concedo, che l'alzamento non sia seguito, che insensibilmente qua in maggiore, e là in minor copia, ma però egli è seguito; e quantunque indarno abbia io cercato qualche livellazione fatta ne' tempi andati, o scandaglio fissato il luogo stabile fuori del fiume, onde rilevare col mezzo d'un confronto lo stato relativo di quest' alveo, ciò non ostante m' induco a crederlo in gran parte nato lungo le convessità delle due grandi svolte, che fa l'Adige all' entrata, e alquanto sopra l'uscita di Verona. Imperocchè accollandosi la corrente in questi siti all' opposta ripa, e diminuendosi per conseguenza la velocità

nell' acqua, ch' è dal filone più lontana, quivi debbono inevitabilmente essersi fatte le deposizioni. Quindi i rialzamenti nati debbono aver di mano in mano contribuito a farne de' nuovi almeno nelle minori piene, perchè espandendosi le acque sopra di essi, le ghiaie, e le materie più pesanti, che porta il fiume vicino al fondo più facilmente, che ne' siti di maggior corso, vi debbono essersi deposte, e attaccate al fondo soggetto non avendo quivi le acque sufficiente altezza di corpo, per non risentire alcun ritardamento. E poco vale per indurci a credere, che l'alveo della città non abbia sofferto alcuna alterazione, l'osservazione che fanno alcuni sull'uso, che si fa tuttavia liberamente di alcuni luoghi terreni Lungadige di fabbrica antica. Poichè supposto che una certa piena al dì d' oggi lor sia di molestia, come succede frequentemente, converrebbe sapere, se della stessa piena avrebbero fatto caso dugent' anni fa per esempio, il che quando non fosse, e sapendosi per altra parte non essere state introdotte nuove acque nel fiume, nè creati nuovi impedimenti, converrebbe per gran parte incolparne il rialzamento del letto.

V. Veramente non istà nell' arbitrio degli uomini l' attemperare in modo le cagioni principali di simili disordini, che non oltrepassino mai quel limite di energia, che meno c' incomoda. E bene spesso quelle operazioni, che astrattamente si concepiscono efficaci per moderarle, in concreto o sono incompatibili colla costituzione delle cose, colle circostanze de' tempi, e colla spesa, o il danno, che portano, contrabbilancia, e prepondera talvolta all' utilità, che se ne può ricavare. Quindi è, che in tali stati di cose non si può sempre aver riguardo alla regola di rimuovere le cause originali per rimuovere gli effetti, essendo per lo più miglior consiglio quello di rimediare alle cause per tal modo, che operino poi col minor danno possibile. Di questa massima non han fatto quel caso, che merita, molti ingegneri di acque ne' tempi andati, i quali pretendendo di torre dalle radici i mali prodotti da questo fiume, operazioni hanno proposto da mettere a soqquadro intere provincie, e impossibili nello stato di cose attuale. Io penso pertanto d' aprirmi altra strada pel riparo di questa città; e lontanissimo dall' entrare in opere vaste oltre misura, ed insoffribili, dalle quali non pare, che il bisogno che strigne, permetta di attendere sollievo, studierò d' indicare que' rimedi locali, ch' io giudico più pronti, praticabili, e adattati, per quanto è possibile, alle nostre circostanze.

VI. Riguardando dunque per quest' aspetto la cosa, tre modi si presentano da considerare in linea di sì fatti rimedi. Il primo, a cui pare che pieghino molti, potrebbe giudicarsi quello di scemare in tempo di piene grandissime la quantità dell' acqua per mezzo di un gran canale da derivarsi a titolo di sfogo. Il secondo quello sarebbe

d' inalveare l' Adige fuori della città, pigliando l'imboccatura in un sito conveniente sopra Verona, e distendendosi poi col canale per la campagna superiore, portarlo a riunirsi sotto Verona coll' alveo inferiore: diramando poscia una conveniente quantità d' acqua dal tronco maestro, far che questa discorresse in un cavo preparato nell' alveo abbandonato, sicchè passando per Verona, potesse servire per gli edifizi, scoli, ed altri usi della città, ma regolato in modo, che l' introduzione, ed esclusione delle acque fosse sempre in arbitrio. Per terzo rimedio poi potrebbe considerarsi quello di rimuovere, per quanto è possibile, dentro, e sotto Verona quegl' impedimenti, che tengono in collo nella città le acque in tempo delle maggiori piene, affinchè nell' afflusso loro potessero smaltirsi a proporzione delle sopravvegnenti, e non alzarsi tanto di pelo a cagione de' rallentamenti, che soffrono, e di riparare in seguito per tal modo le sponde nel nostro Lungadige, che le acque potessero mantenersi in dovere, e incassate nel letto, e non si scaricassero qua, e là liberamente per la città.

VII. E quanto al primo, io sono persuaso, che e' non vaglia la spesa di procurarlo; nè la mia persuasione viene da pregiudizio, che m' occupi l' animo, ma da fortissime ragioni, ch' esporrò nel capitolo seguente. Se il secondo poi non andasse in gran parte soggetto all' eccezioni, che ho notato (§. V.), e non avesse moltissimi incomodi comuni con tutte le opere grandi, potrebbe, attesa l' altezza della campagna, per la quale passerebbe il fiume, e si manterrebbe sempre incassato, senza timore di rotte, e di tracimazioni, reputarsi come l' unico valevole a liberare perpetuamente la città da qualsivoglia pericolo d' inondazione. Ma la scavazione d' un tal alveo per molte miglia di tratto, la necessità di costruirvi sopra de' ponti reali, la conservazione del canale regolato per la città, l' allontanamento della navigazione dalle nostre mura, e oggetti simili, inducono ad altri divisamenti più moderati nelle circostanze de' tempi presenti. Resta dunque il terzo, al quale mi appiglio, come più pronto, e assai più tollerabile, e dell' efficacia del quale rispondono pienamente l' esperienza, e la ragione. Sopra i modi di metterlo in effetto, adattati alla costituzione di quest' alveo, e alle sue imperfezioni, parlerò nel terzo, e quarto capitolo, rimettendomi sempre al giudizio de' più sensati, e a quanto credessero meglio convenire alle esigenze di questa città.

CAPITOLO II.

VIII. Poichè il pensiero più ovvio, che si affaccia al comune degli uomini per impedire il trabocco delle acque fuori dell' alveo d' un fiume in tempo di piena, si è quello di scemarne la quantità per mezzo d' uno sfogo, e sembrando anche nel caso nostro si fatto

spediente assai ragionevole a persone per ogni riguardo autorevoli, le quali pretendono, che distratta superiormente a Verona una quantità considerabile d'acqua dall'Adige in tempo delle maggiori piene e rimessa per un canale nell'alveo inferiore, possa ripararsi dall'inondazione la città, importa moltissimo, che su questo particolare si facciano prima di tutto alcune considerazioni. Farolle per altro in modo, che abbraccino in gran parte anche le diversioni, se qualcuno non contento d'una tal diramazione stimasse più vantaggioso il dar ricapito, e sbocco a questo canale di sfogo in tutt'altro recipiente, che nell'Adige. Contro la qual operazione, particolarmente altre volte messa in campo per un medesimo oggetto, trovo due nrge Scritture distese per la magnifica città di Verona, e uscite l'anno 1623 da' torchi di Bartolommeo Merlo, le quali colla ragione, e coll'esperienza provano non solamente la poca utilità, che ci apporterebbe un diversivo, ma i danni ancora, che una tal operazione verrebbe ad inferirci irreparabilmente.

IX. E quanto alle pure diramazioni, come sarebbe quella, che abbiam detto proporsi da alcuni per riparare la città di Verona dalle inondazioni, sogliono esse per verità utilmente praticarsi, quando si destinano a facilitare per mezzo della navigazione il commercio, a promuovere le irrigazioni delle campagne, al servizio degli edifizi, e ad altri profittevoli usi, riducendosi gli uomini a tollerare talvolta molti incomodi, che non si risentono che lentamente, in grazia dei comodi giornalieri, il benefizio de' quali è pronto, e palmare. Ma a puro titolo di dare scarico alle acque soprabbondanti in tempo di piene non accade poi, che il lieve benefizio d'una tal opera meriti la spesa di fabbricarla, quando il tenue sollievo, e temporaneo, che apporta, non compensa i discapiti, che vi sono congiunti.

X. E per accostarci da vicino all'effetto, che si pretende ricavare da sì fatto scarico, vediamo in primo luogo, se è tale, che vaglia il pensiero di procurarlo. Supponiamo, che un fiume, quanto a se, costituito sempre nel medesimo stato, entri nell'Adige nostro in diversi tempi. Credo, che nessuno possa dubitare, che l'altezza che vi produrrà, non dee sempre essere la medesima, perchè se in un tempo le acque si scaricassero più felicemente, e in un altro meno, minore altezza vi cagionerebbe nel primo caso, e più nel secondo, che è quanto dire, che tanto minor altezza vi produrrebbe quanto maggior velocità vi acquistasse in un tempo, più che in un altro. E come uno stesso fiume ha maggiore, o minor corso, tutto il resto pari, a misura ch'è fatta maggiore, o minore di quel che era la quantità dell'acqua, ch'egli porta; così facilmente s'intende, che molto maggior velocità deve acquistarsi quel fiume entrato nell'Adige

2

in tempo d' acque mediocri, di quello che farebbe in acqua bassa, e moltò più ancora in tempo di piena, di quello che in acque mediocri. Dunque l' altezza, che farà crescere in diversi tempi nell' Adige quest' influente, sarà maggiore o minore, secondo la diversità dello stato, in cui troverà il fiume recipiente, cioè in tempo di piena dovrà accrescerla incomparabilmente meno di quello che farebbe in tempo di magrezza. S' inverta il ragionamento, e quell' acqua medesima, che si considerava come influente nell' Adige, si supponga come se venisse dall' Adige estratta in diversi tempi. Procedendo collo stesso discorso, non si avrà difficoltà a concedere, che molto maggior quantità di altezza si leverebbe al fiume con questa derivazione quando è magro, di quello che si farebbe essendo egli costituito in tempo di piena. Posto ciò, si consideri, che l' Alpone, che come ognuno sa, è un influente considerabile dell' Adige nostro, per asserzione autentica della magnifica città di Verona nelle sopraccitate Scritture, si calcola nelle sue piene avere 15 piedi di profondità, e più di 70 di larghezza media, e appena fa crescere l' Adige, come ivi si attesta solennemente, un palmo nelle sue magrezze. Dunque se è vero il discorso precedente, com' è di fatto, assai meno d' un palmo lo farebbe crescere nelle sue piene ordinarie. Scarichiamo ora dall' Adige per un canale un corpo di acqua, come quello dell' Alpone, in tempo di una grandissima piena, ognun vede, che incomparabilmente meno d' un palmo si perverrebbe a diminuire la sua altezza, e per conseguenza, perchè potesse abbassarsi di pelo un palmo intero, converrebbe derivare, in forza del ragionamento, che abbiamo fatto, un canale dall' Adige, capace di molti Alponi.

XI. Se ciò sembrasse un paradosso, ecco un altro fatto autentico, che può addimesticarci con somiglianti paradossi. Ho detto autentico, perchè lo trovo riferito nella prima delle accennate Scritture in questo modo: *Sbocca fuori del lago di Garda il Mincio diviso in tre rami. Cammina l' uno nella destra fossa di Peschiera, discende l' altro nella sinistra, e il terzo, ch' è il maggior di tutti, parte la terra per mezzo. Giudiciò il signor Pompeo Giustiniano d' onoranda memoria, che a quei tempi serviva la Serenissima Repubblica, che otturando il ramo grande di mezzo, si sarebbe alzata l' acqua delle fosse due piedi, e la ragion lo voleva, se a conto d' acqua morta alla quantità dell' acqua, che si accresceva alle fosse si voleva, che corrispondesse in giusta proporzione l' elevarsi in altezza. Ma perchè la velocità del corso, che si accrebbe ai due rami, impedì questa corrispondenza, perciò ne avvenne, che nelle fosse l' acqua non si alzò più di due once, e però si ritornò il Mincio nello stato di prima*. Fingiamoci ora in quelle precise circostanze rimasti coi due soli rami, per i quali debba tutto il Mincio scaricarsi, e mettiamo,

che per diminuir l' altezza dell' acqua nelle fosse si pensi di derivare un terzo canale maggiore degli altri, o in una parola il canale medesimo, ch' era stato otturato. Non crederei, che fosse paradosso il dire, che non si abbasserebbe più di due once l' acqua nei due altri rami del Mincio. Eppure, ragionando coll' oppinion comune, qualcuno avrebbe potuto credere, che le fosse avessero dovuto rimanere presso che asciutte.

XII. Dunque o conviene rinunziare alla ragione, e all' esperienza, o stabilire intanto, che per tenere più basso il pelo del nostro fiume nelle maggiori piene d' un solo palmo, un canale di sfogo si richiegga di portata considerabile assai, e da non credersi facilmente. Ma nè questo abbassamento, nè quello pure di tre, o quattro piedi ci esimerebbe abbastanza dalle inondazioni nelle massime escrescenze. La piena, per esempio, del 1767. si tenne in Verona quattro piedi in circa più bassa dell' altra memorabile del 1757: ciò non ostante, se di un male così di fresco sofferto non è svanita la memoria, i danni che ha cagionato coll' allagamento fatto in moltissime parti della città, non sono di così picciol momento. Se dunque in quella del 1757, per una diversione si avesse potuto alleggerire il fiume di tanta mole d' acqua, che il pelo della piena si fosse abbassato quattro piedi, a quella al più del 1767. avremmo potuto ridurci, lasciando a parte le conseguenze, e tutti i disordini, che sarebbero perciò insorti nell' alveo, per i quali quella medesima, che fosse accaduta poi del 1767, avrebbe necessariamente sorpassato di gran lunga il segno, a cui è pervenuta nelle circostanze presenti.

XIII. Ma come, dirà taluno, in tempo di una gran piena, nascendo una rotta, si osserva considerabilmente deprimersi il pelo del fiume? E non è questo un effetto dello sfogo, che ha l' acqua per la nuova bocca? Lo concedo; ma si compiaccia di continuare l' osservazione, e vedrà, che estesasi l' acqua uscente dall' apertura a misura del suo corpo, e della velocità del suo corso, e cominciando poi a riempirsi la vastità del sito, nel quale ha sfogo, il pelo della piena tornerà ad elevarsi; e se non si restituiranno le cose precisamente nello stato di prima, a quel segno si metteranno, che terrà tuttavia in soggezione, e pericolo imminente di nuove desolazioni. Quindi è, che una rotta non assicura un paese dall' inondazione, vedendosi spessissime alla prima succedere poco dopo la seconda, contuttochè per ampie bocche precipiti l' acqua, e si scarichi, e distenda per vastissime campagne. E però posto anche, che per la rotta si scemasse sulle prime considerabilmente, come asseriscono, il fiume, il sollievo è sempre temporaneo, e di poca durata. Lo stesso ragionamento si faccia nel caso nostro. Voglio supporre, che concesso all' Adige in tempo di gran piena lo sfogo, che si propone, l' altezza

sua possa scemarsi da principio sensibilmente. Ma durerà poi egli molto tempo questo benefizio? Riempiuto che sarà il nuovo canale, non avendo più l' acque superiori tanto declive vi sgorgheranno con assai minore velocità di prima, e finalmente poco dopo, la piena dell' Adige tornerà, se non alla medesima altezza, a quel segno almeno, che non basterà ad esimerci dall' inondazione.

XIV. E qui passando dalla considerazione della poca utilità, che ci apporterebbe quest' operazione, a quella degl' incomodi, spese, e danni inevitabili, rifletto, che simbolizzando questo sfogo con una rotta naturale, e partecipando necessariamente delle sue proprietà, nelle parti inferiori, dovrà indebolirsi la forza del fiume a cagione della perdita dell' acqua, ch' escirebbe pel nuovo cavo, e rallentare per conseguenza il suo corso, atteso lo scemamento di velocità insorto, e ne avverrebbe poi, che sotto questa diversione, superiore a Verona, cioè nel nostro Lungadige precisamente muterebbe pendenza il fiume, accrescendo la declività colle deposizioni, che farebbe inevitabilmente. Nè so se in seguito poi venisse egli a smuovere, e sollevare di nuovo tanta materia precisamente, quanta ne avesse deposto, e buona parte non si stabilisse nell' alveo: quindi ristringimento di letto: rialzamento di fondo: pericolo d' inondazione con minor quantità d' acqua, e simili mali effetti. Di quale spesa poi non sarebbe l' escavazione del nuovo canale per alcune miglia di tratto? Quanto non costerebbe la sua conservazione, soggetto, come sarebbe anch' egli, ad interrarsi, nel decrescere specialmente delle piene? Poichè essendo necessario, che il tronco maestro goda sempre condizioni assai più vantaggiose al suo corso, e dovendo questo per conseguenza di mano in mano che cede la piena, andarsi assorbendo il corpo delle acque, non potrebbe nel ramo non illanguidirsi il moto, e non andarsi del pari rialzando, e riempiendo il suo letto inevitabilmente. La fabbrica poi, e il mantenimento dell' imboccatura murata nella sponda di Adige riuscirebbe di spesa da non credersi così agevolmente. A questo si aggiunga un riflesso di non lieve momento, ed è che dovendo il nuovo alveo intersecare tutte le strade maestre, e la comunicazione di Lombardia, converrebbe pensare a costruirvi sopra due, o più ponti reali: spesa niente meno esorbitante delle altre. E tutto ciò poi per un benefizio temporaneo, e insensibile, che non ci assicurerebbe da' trabocchi, e dalle inondazioni che sarebbe peggior di gran lunga la condizione del nostro alveo, e che ci terrebbe in continuo dispendio senza alcun profitto.

XV. Che se si volessero esempi del poco frutto, che apportano simili sfoghi, non pochi ne abbiamo, che possano comprovarcelo ad evidenza. Prima del 1638. nelle maggiori escrescenze del Po di

Lombardia si soleva da' Ferraresi tagliare vicino al Bondeno un' intestatura, ch' escludeva le sue acque dal ramo di Ferrara per isfogarvi la piena, che minacciava di rompere. Ciò non ostante per confessione loro in un sommario di una Scrittura data nella visita del 1693 apparisce, che nel corso di soli 36 anni, cioè dal 1560 sino al 1596 erano succedute ben otto rotte nel Po grande. Essendosi poi del 1658 cessato di dare sfogo col taglio nel Po di Ferrara alle massime piene del Po grande, tanto è lontano, che un tale scarico portasse vantaggio, che anzi dal sospenderlo pare che ne sia derivato piuttosto un benefizio; poichè dal 1638 sino al 1717, cioè nel corso di 79 anni, solo 4 rotte sono succedute nel Po, inferiormente alla Stellata, che era il punto dell' antica diversione. A Pisa ad onta del taglio praticato nell' argine sinistro dell' Arno superiormente alla città, le piene degli anni 1740, 1761 sonosi mantenute alte di pelo oltre misura, e d' una gonfiezza maggiore di tutte le altre, che a memoria d' uomini siano seguite. Ma nel fiume Celone, che è un influente del fiume Chiana, la divisione delle acque ha cagionata la perdita totale del tronco. Poichè essendo stati un tempo colla direzione del celebre *Vincenzo Viviani* fabbricati nell' argine sinistro di questo fiume due diversivi, parte delle acque soprabbondanti, in occasione di piena, scaricavasi in una fossa detta il Vingone. Talmente poscia andò di mano in mano empiendosi, e inserrandosi l' alveo sotto i diversivi, che seguita finalmente una gran rotta, le acque presero corso per il Vingone, e restò asciutto dalla rotta in giù il letto vecchio del Celone, diventando il canale di sfogo alveo di tutto il fiume. Nè mancano, anche in tempi più remoti, esempi di questa natura. Il canale fatto scavare dall' Imperator Nerva per isfogo, e diversione delle acque soverchie del Tevere, in tempo delle sue maggiori piene, non fu ripiego valevole ad impedire le inondazioni, come testifica Plinio nelle sue Epistole: *Tiberis alveum excessit, et quamquam fossa, quam prudentissimus Imperator fecit, exhaustus, tamen premit valles, innatat campis etc.* Ma senza uscire da' nostri contorni, si esamini lo stato presente dell' Adige medesimo alquanto inferiormente. Il continuo interrarsi del letto, la necessità ormai resa insoffribile di alzar gli argini, le rotte spaventose, e frequentissime, che desolano le campagne, non sono forse effetti, che succedono sugli occhi nostri, in onta, o piuttosto in conseguenza di tante diversioni, e diramazioni che hanno divisa, e snervata la forza del fiume, di modo che le une cooperano alla rovina delle altre, e tutte insieme a quella del tronco? Quindi è, che quando senza prevenzione un uomo sensato voglia bilanciare scrupolosamente il vantaggio, che da sì fatte operazioni ridonda allora spezialmente che si propongono a solo titolo di scaricare le acque soverchie di un fiume in escrescenza, e i danni

irreparabili, che van con esse congiunti, non è probabile, che sia per aderirvi così facilmente, mostrandoci la ragione, e l' esperienza, che è più praticabile, più utile, e più sicura impresa il mantenere in ubbidienza le acque di un gran fiume unite, ed incassate in un solo alveo, di quello che divise, e diramate in molti.

CAPITOLO III.

XVI. Credo di aver chiaramente esposte le ragioni, per le quali non inclino ad abbracciare l' espediente di derivare dall' alveo un canale a titolo di sfogo, il quale si reputa da alcuni valevole ad impedire lo stravasamento delle acque per la città in tempo di piena, ed ho già dichiarato fin da principio (§. VII.) il mio sentimento intorno al secondo rimedio d' inalveare l' Adige fuor di città, sicchè al terzo rivolgendomi, a cui nelle presenti circostanze ho accennato di volermi attenere, ragion vuole, che a parte a parte vada esponendo i modi, che io reputo più sicuri, e più praticabili di metterlo in effetto. Come dunque la causa radicale di simili disordini in genere si riconosce consistere nell' incalzarsi, ed accumularsi, che fa nell' alveo un' esorbitante quantità d' acqua, la quale non avendo un esito spedito, e proporzionato in qualche modo all' afflusso, gonfia, ed alza di pelo il fiume a dismisura, così l' intenzione mia e di attemperare, per quanto sia possibile, la prontezza dello scarico con quella dell' entrata, in modo che le piene si tengano nel nostro Lungadige di misura più moderata, e di pelo assai più basso, che non fanno. Ma perchè poi non basta scemare l' altezza delle piene per esimerci dalle inondazioni, quando siano le sponde senza alcuna difesa, forz' è, che pensi ancora ad opporre nello stesso tempo un riparo conveniente ai trabocchi. Altro è dunque ciò, che considero in linea di regolamento d' alveo, ed altro in conto di riparo. Quanto al primo, esporrò nel presente capitolo tutto ciò, che l' osservazion locale, e la riflessione mi hanno saputo suggerire, riserbandomi a ricordare, per riguardo all' altro, nel cap. seguente que' provvedimenti che mi sembreranno più opportuni.

XVII. Prima pertanto di discendere ad un' operazione, che ho in vista fuor di Verona nell' alveo inferiore, e che giudico in via di regolazione la principale, conviene pensare a mettere in buon ordine qualche tratto d' alveo interno, ch' è veramente in un grande sconcerto, ed abbisogna prontamente della mano degli uomini. E per cominciare da quella parte, ch' è posta tra il Ponte della pietra, e Ponte nuovo, credo che ogni uomo, anche mezzanamente instrutto in queste materie, possa vedere da per se, quando si compiaccia trasferirsi sopra il luogo, non goder ella quelle condizioni vantaggiose,

che pur potrebbe, allo scarico delle acque. Il suo disordine nasce da varie cagioni, le quali meritano di esser prese in esame, onde portarvi qualche rimedio, affinchè i mali non crescano, e questo tratto di alveo si mantenga più sgombro, e più capace delle piene. Come la svolta, che fa l' Adige al palazzo Episcopale A (*tav.* 1. *fig.* 1.), rivolta la corrente verso la ripa opposta, e il maggior corso si fa per conseguenza sulla sinistra B, così rallentandosi il moto delle acque alla destra parte, come di quelle, che sono dal filone più rimote, debbono inevitabilmente farsi quivi tutte le deposizioni, e rialzamenti di fondo, che si osservano in tempo di acqua bassa. A questo rallentamento ancora contribuisce in gran parte l' essersi, non so se naturalmente, o artificialmente ne' tempi andati secondata la direzione del filone colla diramazione in P a Santa Maria in Organis, cioè aperto uno sfogo al fiume in quella parte appunto, per la quale tendeva col maggior corso a scaricarsi. Quindi è, che per l' una, e l' altra ragione insieme ha sofferto, e soffre tuttavia il tronco maestro inferiore non piccoli discapiti, interrendovisi di continuo la parte destra considerabilmente, di modo che, se l' opera de' mugnai non concorresse a scavare, e facilitare in qualche parte alle acque il trasporto della ghiaia deposta, di gran lunga maggiori, e più estese si sarebbero fatte le alluvioni, che pur sono, ciò non ostante, molto osservabili. E stando all' asserzione de' più vecchi mugnai medesimi, e al segno, che mi hanno indicato, ove solevano un tempo anche in acque basse agire i mulini, per molte pertiche dall' abitato si sono talmente assodate, e stabilite le deposizioni, che la forza naturale del fiume non ha più bastato a disfare e molto meno potrà farlo in seguito, senza l' industria degli uomini. Chi ha fior di ragione, comprende facilmente il che importa moltissimo, che un tale disordine sia tolto, restituendo all' alveo la sua primiera capacità, ai mulini l' antico posto, alla navigazione la libertà del transito, che in acque basse riesce difficile, e lo scarico finalmente più libero alle piene.

XVIII. Succedendo dunque la posizione del Ponte della pietra Q poco sotto la svolta, gli ultimi archi a destra della corrente non fanno il loro uffizio di scarico, come converrebbe. Imperciocchè nelle piene mediocri, e nelle acque ordinarie camminando il maggior fondo colla curvità medesima della ripa, e del renaio G posto sotto il palazzo Giona, la corrente imbocca felicemente gli ultimi archi a sinistra; ma non così gli altri a destra, la sezione de' quali non è mai imboccata a squadra dalla corrente. Sarebbe pertanto utilissimo, che quel gomito, che copre immediatamente il ponte nel miglior modo, che è possibile, si spuntasse, levando via tutto l' ammasso di arena C, distruggendo i muriccinoli, che lo sostengono dalla parte dell' acqua, e ritirando indietro il muro di quel cortile agiacente al palazzo

Episcopale, il quale ribatte, ed allontana la corrente dalla destra ripa. E perchè il filone dell'Adige non traviasse dal suo diritto sentiero, e il maggior corso potesse incamminarsi per gli archi del ponte, inclinerei ad erigere in un sito conveniente nella ripa opposta superiormente al ponte, come in D, qualche massiccio lavoro, il quale, come fa quello stabilito poco inferiormente all'arco grande del ponte a Castel vecchio, voltasse a destra la corrente, e potesse mantenendola sempre diritta, far che le acque si distribuissero, e il filone imboccasse a squadra gli archi di mezzo, non restando, com'è al presente, sempre accollato alla ripa sinistra. Questo lavoro vorrei consistesse in due ripari R, S, o più, se facesse di bisogno, posti l'uno dietro all'altro; ma l'anteriore R, che riceve la prima percossa, non si alzasse oltre il pelo delle acque basse, e l'altro inferiore S, assai più elevato, facesse colla corrente un angolo meno obliquo del superiore. In questo modo nelle piene essendo il riparo S affrontato dall'impeto delle acque, in gran parte ribattuto dal primo R, e il primo R soffrendo solamente lo sforzo delle acque inferiori, si verrebbe a conseguire l'intento di rivoltar la corrente a destra, senza temere, che il tormento delle acque così ripartito arrivasse a demolirli. E a questo passo non voglio lasciar di avvertire, che questo modo potrebbe adoperarsi anche in altri casi, ove accadesse di dover fabbricare sì fatti ripari, o altri lavori, che si fanno per rivoltar il corso de' fiumi, o per impedire le corrosioni, se fossero questi estremamente battuti dalla corrente. Poichè per conciliare la sussistenza loro coll'effetto, che si ricerca, non sarebbe irragionevole consiglio quello di disporre due, tre, o più ordini di questi ripari consecutivi, in qualche conveniente distanza collocati l'uno dietro all'altro lungo la ripa, ma regolati in modo, che facessero, secondo il giudizio dell'Architetto, diversi angoli colle direzioni delle acque, cioè meno obliqui quanto più dal primo si allontanassero, e la cresta per esempio del primo, che riceve l'urto immediato della corrente, non si elevasse sopra il pelo delle acque basse; il secondo fosse inalzato a livello delle acque mezzane, e il terzo riescisse a pelo delle piene ordinarie, e così di mano in mano. Per tal modo gli uni concorrerebbero alla conservazione degli altri, sostenendo, e rintuzzando ognuno per se parte dell'impulso totale; anzi rincalzandosi gl'inferiori necessariamente a causa delle alluvioni, che si farebbero al loro piede, renderebbonsi più forti, e resistenti. E quanto al caso nostro, il buon effetto di quest' opera farebbe, che venendo il filone dell'Adige a indrizzarsi e stabilirsi nel tronco, quivi si formerebbe, e manterrebbe il fondo maggiore, e per conseguenza non avrebbe più il ramo di S. Maria in Organis energia di distrarre lo spirito del fiume, e di tenere in collo quantità considerabile di

acqua in tempo di piena, e produrre disordini così sensibili nell' alveo, come fa presentemente. Nè i due edifizj E, F eretti su quel braccio potrebbero rimanere perciò inoperosi. L' operazione da me proposta, mentre preserva da ulteriori discapiti il tronco dell' Adige, e rimedia a' passati, non devia il corpo intero delle acque sì, che non resti sulla sinistra al fiume forza sufficiente per animar gli edifizi. E quand' anche occorresse tenere di tratto in tratto scavato a mano il canale, è sempre più da tollerarsi un male riparabile nel ramo, che la desolazione del tronco. Il che se verrà maturamente pesato, son lontano dal credere, che a questo riparo non si concorra, per mezzo del quale ben presto migliorar si potrebbe la condizione del letto in quella parte, rimettendolo nella sua capacità naturale, che ora è in gran parte perduta; s' impedirebbero le ulteriori deposizioni, e si darebbe quella forza al fiume sulla destra, che non ha, onde smuovere, e trasportare le già fatte, apportando così nello stesso tempo e benefizio a' mulini, e facilità alla navigazione, e adito alle piene di smaltirsi più prontamente.

XIX. Resta che alcune considerazioni si facciano sul picciol braccio d' Adige, ch' entra vicino a Castel Vecchio, e sbocca all' edifizio della polvere. Questo ramo per quanto l' abbia io esaminato nell' ultima piena del 1767, e sulla sua posizione poi abbia più di una volta pensato, non trovo, che a tenerlo aperto nelle grandissime escrescenze d' Adige, si abbia alcun benefizio, ma piuttosto quel danno, che consiglia a tenerlo chiuso in tali circostanze. La sua imboccatura non è molto vantaggiosa, e lo sbocco è pessimo, come quello, per cui la corrente si mette nell' Adige a squadra contro la corrente del fiume. Si aggiunga a questo, che avendo il suo vaso impedito da ostacoli, che lo attraversano, e non potendosi le acque scaricar liberamente, è molto lontano dal prestar l' uffizio, che dovrebbe; sicchè io non fo conto alcuno di questo sfogo in tempo di piena. All' opposto trovo, che empiendosi di acqua, durante l' escrescenza, inonda molte abitazioni, che sono alla destra della sua corrente, e tutta la contrada spezialmente da S. Croce, sin oltre i Cappuccini: non lascia libero lo scolo delle chiaviche, anzi rigurgita per esse, come nel 1757, e inonda alcune parti della città, che potrebbero da questo danno andar esenti assolutamente. E come l' acqua è quasi stagnante in tale occasione, e torbidissima, s' interrisce perciò il canale, e il fondo si rialza. Se dunque non è da computare l' utile, che se ne ricava in tempo di grandissime gonfiezze d' Adige, e molti discapiti si risparmiano a moltissime famiglie, escludendovi le acque in tali occasioni, io terrei per molto ben fatto, che si armasse di porte anche il suo sbocco, com' è all' imboccatura, le quali potrebbero stare aperte sempre per l' uso degli edifizi, e chiudersi

sòlamente per que' pochi giorni delle massime escrescenze. Nè basta, che si possa chiudere all' imboccatura, senza armar di porte anche lo sbocco, perche l' Adige vi entrerebbe di rigurgito, e i disordini accennati non verrebbero in tal modo ad impedirsi: sicchè sarebbe, per mio giudizio, questa nòn costosa operazione di molto accurata providenza.

XX. Pigliando ora poi in esame i disordini di quella parte d' alveo del nostro fiume (*fig.* 2. *tav.* 1.), ch' è costituita fuor di città inferiormente, i quali possono essere in causa di grandissima parte del rincollo, che soffriamo, non v' ha dubbio, che l' eccessiva tortuosità, che vi si riscontra, come indica la figura, e le frequenti, e ripide volte e rivolte, che fa l' Adige in poco tratto, non debbano considerarsi perniciose, e di ostacolo allo scarico pronto delle acque. E come l' arte degli uomini non può meglio adoperarsi, e più efficacemente, che allor quando seconda, e aiuta la propensione de' fiumi, ch' è di scorrere quanto è in se per alvei retti, e il più che sia possibile declivi; così non sarebbe studio senza frutto quello di pensare nel caso nostro al modo di conciliare l' uno, e l' altro in una stessa operazione. Quindi è, che per molte ragioni la linea, ch' io inclinerei a far prendere al fiume per questo fine, sarebbe la BC, come quella, in cui le circostanze più favorevoli al suo corso si riscontrano, e molti utilissimi effetti in un' opera sola si possono combinare e promuovere. Misurando in primo luogo a corso di acqua la lunghezza del viaggio tortuoso, che fa attualmente il fiume dal termine B al termine C sull' autentico disegno ch' esiste nella cancelleria all' Adige, trovo che il tratto eccede le 5000 pertiche, e la linea che dal termine B per diritto si conducesse al punto C a seconda del filone susseguente, non arriverebbe alle 1900 pertiche di lunghezza. E però quella pendenza, che presentemente si distribuisce pel tratto di 5000 pertiche, venendosi a scompartire in meno di 1900, restituirebbe al fiume quella velocità, che è così ritardata attualmente, e infranta in tanta estensione, e irregolarità di cammino. Nè vi è da dubitare, che essendo la forza dell' acqua tanto più potente a mantenere scavato un fondo ghiaioso come il nostro, quanto è più declive, si verrebbe ad assicurare il nostro alveo in grandissima parte dagl' interrimenti, si faciliterebbe il suo scavamento, ed abbassamento, e le piene vi si manterrebbero per tante ragioni senza confronto più basse di pelo di quel che succedono attualmente. Imperciocchè avendo adito di smaltirsi più speditamente le acque del fiume di mano in mano, che vi andassero scaricando le lor piene gl' influenti, non potendovi fare ognuna per se tanta altezza come prima, accumulandosi insieme, non potrebbero cagionarvi gonfiamenti così spaventosi, e la città resterebbe sollevata. A tutto ciò

si aggiunga, che nel nuovo taglio scorrerebbe sempre incassato il fiume dall'altezza della campagna, che gli farebbe argine naturale, e insuperabile a tutte le piene. Le campagne basse, che soffrono allagamento nelle gonfiezze d'Adige pel tratto di 6 miglia, ove si estende al presente, respirerebbero: si avrebbe un perpetuo sollievo dalle spese, alle quali presentemente si soggiace, di mantenere arginature, e ripari continui in tutta quella parte d'alveo: l'acquisto che si farebbe del letto abbandonato, delle sue alluvioni, e aggiacenze compenserebbe a molti doppi la perdita del terreno magrissimo, che col nuovo alveo si verrebbe a fare: non s'intersecano colla nuova inalveazione nè comunicazioni nè scoli; e tutti gl'influenti temporanei, che scorrendo per la campagna bassa, vanno al presente a mettere direttamente nel fiume, potrebbero inalvearsi comodamente rimettendo il loro sbocco in Adige inferiormente. In questo modo gli scoli delle campagne circostanti all'alveo presente, potendo aver ricapito in siti più bassi, riuscirebbero molto più felici di quel che sono. Nè di picciolo benefizio sarebbe questo taglio alla navigazione, resa quasi impraticabile in molti luoghi, in tempo spezialmente di acque magre, divise da tante isolette, ed alluvioni, che ingombrano il letto. Ma sopra tutto il vantaggio, e sollievo, che risentirebbe la città di Verona, è considerabile oltre ogni credere, poichè, come ho detto, acquistando nel nostro Lungadige il fiume maggior velocità, e in conseguenza maggior forza di scavare, e trasportare le ghiaie, ed altre materie, ond'è occupato tanto al presente, il letto si amplierebbe, e renderebbe più profondo, in modo che potrebbe tenere le piene più basse, e lontane dall'inferire alla popolazione tanti danni colle inondazioni per la soverchia altezza, alla quale s'inalzano al presente. Tale è il mio ingenuo sentimento per la parte, che ho detto regolativa dell'alveo nostro interno, ed esterno; ma non gli sono così affezionato, che non sia per rimettermi sempre di buona voglia a più forti, e solide ragioni, onde fosse per avventura spalleggiato il sentimento contrario. Nè si creda, ch'io non abbia obiettato a me medesimo l'altezza della campagna per cui dovrebbe scavarsi quest'alveo nuovo, e il danno, che si verrebbe ad inferire a qualche particolare. Ma come, secondo quello ch'io giudico, non arriva la cresta della campagna a sollevarsi per tutto quel tratto, pigliando una media altezza sopra il pelo delle acque basse, più di 25, o 30 piedi, così non m'è poi sembrata l'opera insoffribile, commisurata coll'utile, che potrebbe ridondarne. Poichè abbreviandosi considerabilmente la linea d'inalveazione, e venendo a godere il fiume in un tratto più corto quella caduta, che ora gode in un più lungo, ed inoltre imboccandosi dal filone a dirittura il nuovo canale, non si avrebbe a scavare, che una fossa per

la linea disegnata, larga 20, o 30 piedi in base, bastando che l' acqua potesse cominciare ad avervi corso, perchè nelle prime piene trovandovi per le suddette ragioni speditezza di moto, e materia facile ad essere smossa, e corrosa, com' è quella della campagna nostra si allargherebbe, e profonderebbe, proporzionando l' alveo al bisogno, ristringendo, ed interrando l' alveo vecchio, fino ad abbandonarlo, e rendendo finalmente il nuovo canale alveo di tutto il fiume. E però la spesa, che vi si richiederebbe, congiunta ancora col risarcimento conveniente di qualche danneggiato, non può esser così esorbitante, che preponderi al sollievo d' una città, alla preservazione delle sostanze de' suoi abitanti, al benefizio, che ne risentirebbe la navigazione, e all' acquisto finalmente, e ristoro di moltissimi terreni.

CAPITOLO IV.

XXI. Tutto ciò, che si è detto, e proposto fin' ora, tende direttamente a migliorare la condizione dell' alveo nostro, e a scemare, a sollievo della città, le altezze soverchie, che nel nostro Lungadige tengono le piene. Ma tutto ciò dovrà sempre intendersi per opera imperfetta, quando non si pensi ancora a regolare le nostre sponde murate. Fo giudice chiunque sa far uso della ragione, se mai alcuna popolazione temerebbe l' inondazione de' suoi paesi, e delle sue campagne dal solo trabocco d' un fiume, non avendo per altra parte a paventare nè corrosioni di ripe, nè rotte, come nel caso nostro. Una conveniente arginatura non la porrebbe forse abbastanza in sicuro? Non si difendono dall' inondazione del mare altissimo vaste provincie, e bassissime con argini semplici, anche di pura arena? Osservo, che l' allagamento di questa città nasce per la massima parte dell' espansione libera, che fa l' Adige delle sue acque in tempo di piena fuor dell' alveo per un gran numero di aperture, che si riscontrano nelle sue sponde, le quali, a guisa di rotte continuamente aperte, danno scarico a tutte l' escrescenze. Nè so comprendere come un somigliante disordine siasi sempre tollerato senza provvedimento, e non siasi a poco a poco cercato di correggerlo, seguendo nel miglior modo, e più conveniente, secondo la diversità de' siti, le tracce di que' primi, che alle Regaste, e altrove presero a riparare le ripe. È egli possibile, che vicino ad un fiume di questa natura star si possa senza riparo impunemente?

XXII. Riflettendo per tanto su questo punto, che veramente non è meno importante degli altri, che si sono precedentemente considerati, a tre sorta osservo potersi ridurre tutte le aperture, per le quali liberamente si espande il fiume in tempo di escrescenza. I vicoli, che mettono in Adige, che qui volgarmente diconsi Vò: le chiaviche,

che servono allo scolo della città, e i fori, che generalmente nelle muraglie delle case, o di altre fabbriche, quali si vogliano, trovansi collocati poco al di sopra delle acque ordinarie. Nè v' ha dubbio, che gli allagamenti, che nelle massime piene soffre gran parte della città, non nascono principalmente da trabocco, che fanno le acque per queste aperture, o malamente, o non difese del tutto. Perchè quanto a' riempimenti, che possono attribuirsi al trapelare delle acque, non credo, che nello stato presente di cose, e a fronte di tanti aditi aperti liberamente al fiume, si possa liquidare quanta parte vi abbiano le trapelazioni, avvegnachè l' effetto loro non può legittimamente definirsi, se prima non sono escluse tutte le altre cause più manifeste, che producono le inondazioni. E per altra parte poi si osserva, che un gran numero di abitazioni costituite sul vivo della sponda, e che in tempo di piena hanno il piano de' loro sotterranei da servigio molti piedi sotto il pelo del fiume, va illese del tutto dall' inondazione, quando l'acqua per allagarle non si faccia strada per tutt' altra via più libera, che per trapelazione. Quindi è che stimando io così manifesti agli occhi di tutti simili disordini, che provengono dalla libertà, che si lascia al fiume di stravasare le sue acque in città, non ho mai potuto comprendere perchè non siasi cercato di mantenerlo in ubbidienza nell' alveo, se non interamente, almeno nel miglior modo, che è possibile. O si è creduto, che molte di queste aperture fossero necessarie per isfogo del fiume, e per tener più bassa di pelo la piena nell' alveo, e in buona fede per un bene immaginario si può aver concorso a lasciar correre un male reale; o l' uso loro giornaliero nei tempi di acque ordinarie ha fatto reputar soffribile il danno delle piene, come se mancassero modi sicuri di lasciarne libero l' uso, e di tenersi nello stesso tempo dagli stravasamenti riparati. O finalmente si è creduto all' aggravio di spendere ne' convenienti ripari non proporzionato il benefizio. Quanto alla prima opinione mi par ella così mal fondata, che non è probabile, che presso uomini sensati possa aver luogo. Chiunque avrà ben intese le ragioni, che ho addotto nel cap. II. per provare, quanto poco tolga d' altezza ad un fiume gonfio anche una gran mole d' acqua, che dal suo alveo si divertisca, si compiacerà finalmente di persuadersi, che tutta l' acqua, che per le contrade della città si espande in tempo di gran piena, e cagiona tanti danni agli abitanti, se fosse costretta a spianarsi, e correre nell' alveo, non farebbe crescere il fiume da quel che fosse in quelle circostanze, l' altezza d' un dito. La seconda non è più ragionevole dell' altra, tosto che si rifletta non essere incompatibile, come faremo vedere, l' accesso libero all' Adige colla difesa da' suoi trabocchi. Ma neppure la spesa è troppo esorbitante, commisurata col benefizio; poichè potrebbe ella ripartirsi, e proporzionandosi

nel riparto alle forze de' contribuenti, rendersi tollerabile, dove il danno all' opposto dell' allagamento non guarda alcuna proporzione, cadendo ordinariamente più a peso di quelli, che son men atti a sostenerlo.

XXIII. Per cominciar dunque dalla prima spezie di aperture io credo in primo luogo, che non tutte quelle, che sono sparse nel Lungadige d' una contrada, siano assolutamente necessarie, o per l' approdare che vi fanno le barche, o per lo scolo delle piovane, o per gli usi qualunque degli abitanti, essendovene moltissime superflue del tutto, e a nessun comodo popolare inservienti. Queste intanto sarebbe d' un' ottima provvidenza, che si serrassero stabilmente. La chiusura non sarebbe, che in poche necessaria di muro, potendosene arginar un gran numero molto bene colla terra, come si costuma in campagna, difendendo il piede dell' arginatura, se fosse battuto dalla corrente, con sassi sciolti, o altrimenti, per impedire la corrosione. Nè diversamente vorrei, che si praticasse anche in quelle aperture, che si giudicassero necessarie agli usi della popolazione. Basterebbe solamente, che si guarnissero i ripari destinati a chiuderle di gradini, e contro gradini, o di semplici pedate da ambe le parti, perchè per una parte si ascendesse comodamente alla sommità del riparo, e per l' altra si discendesse all' Adige. E dove occorresse lasciar libero lo scolo alle piovane, si potrebbe aprir nel mezzo della chiusura una bocca competente difesa con chiavica, per impedire, che le acque non s' introducessero di rigurgito in tempo di piena, e si potesse negli altri tempi dell' anno avere uno sbocco sempre aperto allo scolo. Converrebbe pertanto per ben condurre quest' opera importante, che da persone intelligenti si riconoscessero diligentemente tutti i Vò del nostro Lungadige, e tutti que' siti a parte a parte, i quali o a cagione de' muri di riparo troppo bassi, o per essere totalmente aperti, danno ingresso alle piene nella città, onde stabilirvi, secondo le circostanze, le operazioni più convenienti, rialzando per esempio, e ingrossando, se occorresse, in una parte i muricciuoli, in un' altra arginando le aperture con buona terra, o con muro, se l' argine di terra non vi potesse aver luogo, e così di mano in mano, opponendo giudiziosamente lavori valevoli ad impedire l' espansione delle piene. E non so come il benifizio essendo comune, non sarebbero i particolari per concorrere a qualche spesa, sicchè a poco a poco non si arrivasse ad escludere intanto quell' acqua delle piene, che per queste aperture s' insinua presentemente, e trabocca in città senza ritegno di sorte.

XXIV. Quanto poi ai condotti, per i quali si scaricano in Adige gli scoli della città, non sembra molto ragionevole il costume, che si tiene, di lasciarli a foce aperta in ogni tempo. Gli scoli certamente

non debbono aver libera la foce in un fiume, se il loro fondo non è più alto, o almeno non più basso delle maggiori piene del fiume, altrimenti i rigurgiti riescono inevitabili. E ciò appunto si è quello, che accade tra noi su gli occhi di tutti. Imperciocchè in tempo delle maggiori piene le prime acque, che cominciano a sgorgare in città nelle parti basse, e inferiori al pelo della piena, son quelle ch' entrano per lo sbocco degli scoli non difeso con chiavica, le quali vanno poi ad unirsi colle altre, che si stravasano dall' alveo per le aperture già accennate. Stimerei dunque opera di molto sano provvedimento, che si cercasse di correggere per l' avvenire un simile inconveniente, armando tutte queste foci Sopradige di buone, e forti chiaviche, la custodia delle quali dovesse nelle rispettive contrade rimettersi in mano di persone fedeli, ed attente, perchè dovessero immancabilmente serrarle nel tempo delle grandissime escrescenze, le quali poi non sono di tanta durata, e riaprirle al cessar del pericolo, lasciandole poi in tutti gli altri tempi dell' anno sempre aperte, quando cioè non minacci il fiume inondazione.

XXV. Una ragione mi si vuole addurre, che par forte in apparenza, per cui si crede abbastanza giustificato il costume di lasciare liberi questi sbocchi, ed è, che sopravvenendo una pioggia dirotta in tempo che fossero chiusi a riparo dell' inondazione, e non avendo adito di scaricarsi pe' suoi condotti, potrebbe cagionar essa que' danni, che cerchiamo di evitare. Ma io domando in primo luogo, dove anderanno a scolarsi le acque piovane, quando il pelo dell' Adige è più alto de' fondi, che si vogliono scolare? quando lo sbocco è tutto sommerso sotto le acque del fiume? quando l' acqua del fiume rigurgita, riempie i condotti, e inonda le contrade circostanti? Ed è poi egli certo, che nel breve tempo della piena tanta pioggia debba cadere, che equivaglia, allagando la città, all' acqua del fiume, che per le foci libere degli scoli infallibilmente s' insinua? Ordinariamente precedono, non succedono alle piene grandissime le grandi piovane. Ma posto che per alcuna ne sopravvenisse in quel tempo, mentre sono chiusi gli sbocchi, potrà ella deporre tanto lezzo come l' acqua del fiume? Potrà ella ascendere a tanta altezza, come dee elevarsi necessariamete quella, che entra per le chiaviche, per livellarsi col fiume?

XXVI. Resti dunque fermo, e stabilito, che alzando i muri bassi, che cingono in qualche parte le ripe della città, e difendendoli, se occorresse, con la scarpa, arginando con terra, e serrando con muro i Vò, ed altri siti aperti, che mettono al fiume, e armando di porte gli sbocchi degli scoli Sopradige, da chiudersi nel solo tempo delle grandi piene, si verrebbe ad impedire in moltissime parti della città l' inondazione, che senza difese diventa inevitabile. Mal a proposito

per altro si pretenderebbe di divertire con ciò alcuni riempimenti di abitazioni particolari, che fanno sponda all' Adige, e sono pertugiate di porticelle, e finestre non molto superiori al pelo delle acque ordinarie. E queste fanno appunto quella terza spezie di aperture, che ho nominato da principio (§. XXII.), le quali sono forse le meno suscettibili di un generale riparo. È vero, che simili abusi in massima non dovrebbero tollerarsi: che non dovrebbe permettersi alcun sotterraneo, se non in certa distanza dalla ripa, quando non fosse difeso da grosse muraglie impenetrabili all' acqua; che i fori delle abitazioni riguardanti Sopradige dovrebbero essere superiori alle maggiori piene. Ma in un sistema già stabilito, non potrebbe, senza un intollerabile sconcerto degli abitanti, aver luogo una piena regolazione. Quindi è, che crederei, proponendola, di far mal uso del tempo. Ciò per tanto, che in tale stato di cose mi parrebbe più provvido, ed opportuno, sarebbe, che si cercasse almeno di rimediare in qualche parte ai disordini ne' modi dalle circostanze premessi.

XXVII. Sopra due sorti di questi fori collocati nella sponda murata del nostro fiume, inferiori alle maggiori piene, vorrei, che particolarmente, e a rigore cadesse un regolamento, su quelli cioè, che da persone intelligenti visitati, e riconosciuti, fossero giudicati se non del tutto superflui, almeno non necessarj, e sopra di quelli, per la svantaggiosa situazione de' quali il riempimento, che ne verrebbe di un luogo particolare, potesse trar seco l' inondazione dell' intera contrada, o di qualche sua parte. Questi perciò, di qualunque genere fossero, vorrei che si murassero irremissibilmente, e quand' anche alcuni fossero utili a qualche particolare, quando derivar ne potesse incomodo, e danno a molte famiglie, farei che si otturassero, non dovendo il comodo di uno, o di pochi prevalere alla salute di molti. Per gli altri che restano, e che apportar possono danno non generale, ma piuttosto singolare, non è probabile, che i proprietarj non bilancino una volta le comodità, che lor somministrano, e i discapiti che ne risentono di tempo in tempo, e preponderando questi, non pensino a rialzarsi colle aperture, o armarle di doppia porta a guisa di chiaviche, o altrimenti ripararsi, onde impedire quanto più è possibile, i riempimenti.

XXVIII. Questo è quanto io posso dire in ordine al difendere le ripe, e tenersi guardati da' trabocchi in generale. Lungo sarebbe fermarsi sopra ogni sito particolare della città, onde additare, secondo la diversità delle circostanze, i convenienti provvedimenti. Adottata che fosse la massima di ripararsi, non sarebbe difficile l' adattare al diverso bisogno de' luoghi diversi rimedi, i quali sarebbero tanto più efficaci, e valevoli a rattenere l' espansione delle

acque, quanto più basse senza confronto di quel che sogliono essere al presente, si manterrebbero le maggiori escrescenze, mettendo in effetto i regolamenti dell' alveo, che abbiamo nel precedente capitolo ricordato.

OSSERVAZIONI E RICERCHE

INTORNO

AL PROLUNGARSI DELLA LINEA DE' FIUMI IN MARE

DI ANTON-MARIO LORGNA.

L'anno 1772 ritrovandomi alla foce dell' *Adige* nell' antico ed interrito porto di *Fossone*, mi prese voglia di misurare quattro sezioni nel fiume in siti notabili di sua sboccatura, prima che abbandonando le ultime alluvioni di sabbia, che lo tengono incassato, si allarghi e confonda coll' acque del mare. Non avendo in quelle spiagge punti stabili sul momento a cui riferire il pelo dell' acqua, aspettai la bassa marea dell' *Adriatico*, e a quella ridussi le profondità ritrovate. Feci per tanto conserva così degli scandagli presi in ogni sezione, come delle profondità raggnagliate, che ne dedussi, perchè, altra opportunità offerendosi, potessi ripetere l' operazione ne' siti medesimi dopo qualche anno, e trarre un qualche frutto dal confronto delle osservazioni.

L' anno 1776 intrapresa la facitura d' un profilo dell' *Adige*, di cui probabilmente potrò dar conto in altra occasione, mi trattenni due giorni alla foce in compagnia d' un coltissimo Uffiziale e studioso sommamente di queste materie.

Mentre dunque ei pigliava per una parte in disegno la faccia del luogo, io medesime per l' altra rifaceva gli scandagli attraverso il fiume di pertica in pertica nelle stesse situazioni dell' anno 1772. Attesa quindi anche in questo caso la bassa marea, alla stessa orizzontale di prima ridussi le profondità co' nuovi scandagli ricavate, avuto riguardo alla differenza de' tempi, e alla depressione accaduta nel mare, nel riflusso osservato del 1776, maggiore che in quello de 1772. Il risultato delle osservazioni fu come qui sotto apparisce dal mare in su, e come in profilo dimostrasi più agli occhi nella fig. 1. tav. 2, in cui la AO è orizzontale del pelo basso del mare Adriatico.

Sezioni	Profondità medie in piedi Veneti nel 1772	Intervalli tra le sezioni in pertiche Venete	Sezioni	Profondità medie in piedi Veneti nel 1776
I.ª L C	p.i 3. 0. 1	0 . 0	I.ª L F	p.i 2. 0. 0
II.ª M D	p.i 1. 10. 2	40 . 0	II.ª M I	p.i 2. 9. 10
III.ª N E	p.i 2. 10. 6	56 . 5	III.ª N H	p.i 4. 1. 7
IV.ª O K	p.i 4. 2. 0	18 . 3	IV.ª O P	p.i 5. 9. 1

Il confronto poi de' due disegni del luogo presi negli anni 1772, 1776 offre un' altra osservazione da fare intorno alla disposizione delle bocche. Nel 1772 la foce di questo fiume diramavasi in tre: una rivolta a Greco, una a Levante, la terza a Scilocco. Nel solo giro di quattro anni s'interrì del tutto la bocca a Levante; quella a Greco nel riflusso rimaneva in secco; l'ultima a Scilocco era la sola foce attuosa nel 1776. E questi sono i cangiamenti essenziali insorti in quest' intervallo di tempo nella foce di questo fiume, e quanto a profondità, e quanto alla posizione degli sbocchi nel mare.

I. Quindi si ricava.

1. Che il banco o basso fondo, comune a tutte le foci, s'andava avanzando in mare, e prolungavasi col tronco del fiume la spiaggia.

2. Che dove nel 1772 era l'anterior basso fondo nella II. sezione di piedi 1. 10. 2, s'era nel 1776 formata la profondità di piedi 2. 9. 10. E così nell' altre due sezioni immediatamente superiori s' era profondato il letto nella terza di piedi 1. 3. 1.; nella quarta di piedi 1. 7. 1.

3. Che in conseguenza fatto quivi più che non era del 1772 profondo il fiume, l'acque s' erano raccolte, assorbendo le diramazioni, e formandovi di tre una sola sboccatura viva in mare.

II. Queste alterazioni proprie, siccome io credo, di tutti i fiumi che mettono capo nel mare, atti da se a tenersi aperto lo sbocco più o meno manifeste in breve giro d'anni secondo la portata d'acque e materie d' ogni fiume, secondo la posizione delle bocche per rispetto a' venti, secondo la profondità del mare medesimo ove vanno i fiumi a scaricarsi, e l' energia d' altre circostanze particolari e locali, non sembrano a primo aspetto altro magistero offerirci da contemplare della natura, fuorchè l'atto reale del prolungarsi che fanno

le linee de' fiumi in mare. Così è di fatto, se superficialmente si consideri la cosa; ma forse da queste osservazioni molto più può ricavarsi che non sembra, se più profondamente s'inoltri l'intelletto a ponderarle. E non è per avventura senza frutto l'accidente di averle fatte nel solo giro di quattro anni. Giova bene spesso cogliere la natura nel suo lavoro; essendo più agevole l'accorgersi de' suoi artifizii nell'atto stesso dell'operazione, che non è a operazione compiuta.

III. Faciamoci per tanto a considerarle combinate, e a compararle insieme. Dimostra dunque l'esperienza, che nell'avanzar che fanno le materie portate dai fiumi torbidi al mare, e nel successivo rigenerarsi e protraersi de' bassi fondi, l'acque nelle parti contigue e immediatamente superiori del fiume prendono a far di se minor espansione, si raccolgono tra le proprie alluvioni, e s'incanalano più che non facevano da prima. Quivi per tanto cresce necessariamente la profondità. In conseguenza la concavità nell'infimo tronco, avverata in tutti i fiumi, avanza anch'essa, e si forma ove prima era basso fondo. In conseguenza ancora l'acclività di fondo, all'avanzarsi del banco in mare, si riproduce, si sposta, e s'avanza anch'essa, cangiandosi successivamente in basso fondo la conca più avanzata nel mare, e in concavità il basso fondo di prima. La fig. 1. ci rappresenta al vivo questo progresso di fatto. AB è l'orizzontale del pelo basso del mare; CDEK la prima posizione del fondo; GFLHP la seconda. Il basso fondo, ch'era prima in D è passato in F; l'acclività KED s'è inoltrata in PHIF.

Ma posto tutto questo nell'infimo tronco, qual è l'alterazione successiva insorta nel tronco immediatamente superiore, ove sappiamo così nel nostro come in tutti gli altri fiumi non avere il fondo, che poca o niuna declività quasi sin dove arriva l'orizzontale dell'ultimo fondo allo sbocco? Qual è da indi in su la mutazione ne' tronchi declivi?

IV. Pretendesi comunemente che debba distinguersi il prolungamento della linea de' fiumi torbidi di fondo inclinato da quello che accade ne' fiumi di fondo orizzontale. Ne' primi, al prolungarsi della linea, convengono tutti che succeder debba l'inalzamento de' fondi superiori necessariamente. Non così ne' secondi ove la forza, dicono, dell'acque è bastevole a spignere le torbide sopra un fondo anche orizzontale, ed a trasportarle al mare. Il solo *Guglielmini*, l'uomo più profondo che abbia avuto l'*Italia* in questa materia, s'astenne di pronunciar giudizio decisivo su questo particolare. *Se il prolungamento* dic'egli, *della linea operi o no nell'alzamento del fondo de' fiumi che corrono quasi che orizzontali, non ci arrischiamo di determinarlo* (Raccolta d'Autori che trattano ec. tomo secondo.

Tanto è vero che quell' uomo sagacissimo travvedeva un' alterazione possibile anche ne' fondi quasi che orizzontali; ma non avendo forse nè osservazioni proprie alla mano, nè altrui molto meno nell' infanzia della dottrina de' fiumi, sospese il suo giudizio. Comunque però sia, questa distinzione piuttosto che farci strada all' indagine, e a sodisfare alle quistioni del §. precedente, involge l' argomento in gravissime difficoltà.

Imperciocchè o si nieghi o si lasci in dubbio, che il prolungamento della linea operi nell' alzamento del fondo nel tronco quasi che orizzontale, se non si viene con ciò a negar di fatto o mettere in dubbio l' alzamento de' fondi declivi immediatamente superiori, contro i principj più certi e contro l' esperienza, si offusca almeno più che mai la materia, e si rende difficilissimo da comprendere come accader possa, che la protrazione della linea operi in questi, salvo ed intatto il fondo quasi che orizzontale del tronco intermedio. Merita certamente quest' articolo il più serio esame degl' idrometri, s' è vero che sullo sbocco de' fiumi, come sopra base, s' appoggiano le cadenti degli alvei; del che non credo, che possa dubitarsi.

V. Pare che l' argomento in generale de' canali orizzontali non sia sviluppato quanto basta, sì che le nozioni astratte che n' abbiamo, oppur che dagli Autori primi, sempre per altro rispettabili, ci son porte, applicate al soggetto non possano generalmente accordarsi col fatto. Sembra primieramente ch' essi facciano la distinzione che s' è detto tra i canali di fondo presso che orizzontale, e quelli di fondo inclinato, quasi gli uni e gli altri fossero in genere canali da per se, e potessero sempre separatamente e solitariamente considerarsi; il che per verità ne' fiumi torbidi, de' quali si parla, non può farsi ragionevolmente senza mutilare il sistèma di cotai fiumi della condizione de' canali a fondo inclinato: e far che alcune affezioni e proprietà de' fondi declivi in certe circostanze, per le quali possono non solamente farsi orizzontali, ma acclivi eziandio; diventino capi d' intralciatissime quistioni, tosto che dal soggetto vogliano separarsi.

Donde mai è tratta l' idea di fatto de' fiumi torbidi di fondo orizzontale? Dalla considerazione certamente degli ultimi tronchi verso le foci: da quella de' tronchi attraversati da pescaie, le quali equivalgono in qualche modo alle foci reali, e da simili circostanze de' fiumi. Di fatto un' osservazione costantissima ci fa vedere, che tirata una orizzontale all' insù dal fondo dello sbocco, o dalla cresta della pescaia, una gran parte del fondo superiore del fiume resta depressa sotto di questa orizzontale, e va poi ella a segare il fondo in qualche parte più o meno lontana dallo sbocco secondo il maggior o minor corpo d' acqua del fiume, secondo la natura e quantità delle materie ch' ei trasporta, e l' influenza d' altre condizioni

dell' alveo insieme complicate. Questa disposizione di fondo involge necessariamente il passaggio in sì fatti tronchi da un fondo declive ad uno acclive, e la considerazione del fondo orizzontale o presso che orizzontale intermedio per cui succede cotale passaggio. Questo fondo intermedio ha un brevissimo tratto ne' piccoli fiumi, ne' quali l' orizzontale, che abbiamo detto, sega il fondo superiore in poca distanza dallo sbocco; ma ne' fiumi grandi essendo grande del pari il tratto interposto tra la foce e l' intersezione col fondo di quell' orizzontale; e la massima depressione del fondo sotto di essa cadendo incomparabilmente più vicina allo sbocco, che al segamento sopra detto, avviene che il tronco acclive sia pure incomparabilmente più breve dell' altro sino all' intersezione, e in conseguenza il tratto di poca o niuna declività abbia una estensione ben grande. Tale appunto è la condizione del Po di Lombardia. L' orizzontale del pelo basso dell' Adriatico prodotta all' insù sega il fondo di questo fiume tra la Stellata, e Lagoscuro (*Il Manfredi* Annotazioni al Guglielmini), cioè in distanza di ben sessanta miglia dalla foce. Così nel Primaro quest' orizzontale resta otto pollici circa superiore al fondo del fiume in distanza dalla foce di sedici miglia (*Frisi* Vol. VI.). Nel Tevere il pelo basso del Mediterraneo s' interseca col fondo alla distanza pure di quindici miglia dalla foce (*Zanotti* Vol. 7.). Ma all' opposto negli altri fiumi minori è minore, come s' è detto, cotal estensione. Imperciocchè nel Ronco e Montone uniti il pelo basso dell' Adriatico sega il fondo in distanza dalla sboccatura di tre miglia e mezzo in circa. Nel Savio cotal distanza è pur di tre miglia, e di tre e tre quinti nel Lamone. Tutto questo è di fatto da qualche incertezza infuori negl' intervalli assegnati, che non possono con geometrica precisione definirsi.

Ma si può egli per tutto questo di tai tronchi composti di qualche parte orizzontale, anche considerabili ne' fiumi grandi, fare altrettanti canali distinti e solitarj, quasi non formassero col rimanente del fiume di fondo declive un solo ed individuo sistema? Queste osservazioni al più ci assicurano, che negli ultimi tronchi de' fiumi torbidi sopra gli sbocchi, tali cause si combinano, proprie e particolari di quelle circostanze, nel procacciar moto e forza all' acqua, che bastevoli riescono a tenere scavato e libero da posature il letto, senza che si manifesti per gran tratti nel fondo quella pendenza, che per lo stesso corpo d' acque, e pel trasporto delle stesse materie si riscontra ne' tronchi immediatamente superiori. Se dunque non vogliamo allontanarci dall' operar di fatto della natura, la quale costituisce cotai alvei ne' fiumi torbidi, quasi appendici, ed accidenti sempre de' canali di fondo inclinato, non mai solitarj e proprj d' un sistema intero d' acque torbide correnti, le teorie che abbiamo intorno

a' canali orizzontali, ove si tratti di fiumi torbidi, vorrebbono essere rettificate, e con altri principj maneggiate, se non m' inganno. Com' è in effetto possibile di trasferire e adattare le nozioni, che ci si danno in genere intorno a' canali orizzontali, e alla loro economia, all' indole de' fiumi torbidi? La natura almeno non ce ne fa vedere neppur uno solitario, ma sempre in qualità di tronco singolare, costituito sopra le foci reali o equivalenti, cioè sempre congiunto agl' inclinati, e in date circostanze.

VI. Messa così ne' suoi termini legittimi la condizione de' fondi quasi che orizzontali, ne' fiumi torbidi, e ravvicinati gli oggetti, che non potevano separarsi, ci si appiana mirabilmente la via onde rintracciare l' effetto de' prolungamenti delle linee in mare ne' tronchi superiori, ch' è il soggetto di questa Memoria. Imperciocchè rimovendo il misterioso (§. IV.), cui induceva in sì fatta ricerca la necessità, d' indagare come potessero sì fatti prolungamenti agire ne' tronchi superiori, inalterato il tronco tra essi interposto e la foce, e considerando questo tronco non solitariamente, ma come un puro accidente dell' alveo declive del fiume, la quistione si riduce semplicemente a conoscere e stabilire.

„ Quai siano le alterazioni, e le modificazioni che succedono nel „ tronco quasi che orizzontale di un fiume torbido, di cui la linea „ vada prolungandosi in mare, medianti le quali operi la protrazio„ ne nell' alzamento de' fondi declivi ne' tronchi superiori „. Quand' anche non arrivassero le mie forze a ben discuterla, e a mettere quest' argomento in salvo da qualunque obbiezione, che non è sì facile in cosa fisica e oscura sommamente, mi basterà di averlo tentato il primo, e d' aver cercato di schiarare almeno il soggetto in modo, ch' altri possa con nuove osservazioni e nuovi sforzi accignersi ad una compiuta teoria.

VII. Io non credo di poter meglio inoltrare le mie ricerche nella quistione, che seguendo il filo delle osservazioni fatte alle foci; e dietro a' fenomeni osservati in una parte facendo passaggio ed esplorare l' operar della natura nel rimanente del tronco. Le *Proposizioni* seguenti vi ci faranno strada gradatamente, con che più ordinato e più breve potrà riuscire il discorso.

Proposizione I. „ Il protraersi della linea di un fiume torbido in „ mare succede coll' andarsi a poco a poco riempiendo la conca, o il „ fondo più avanzato FCDE (*tav.* 2. *fig.* 2.), ed interrendo, si che „ viene a formarsi basso fondo o scanno, ov' era prima la profondità, „ che serviva da recipiente delle materie trasportate dal fiume, e si „ compone la nuova foce a quella minima profondità, ch' è necessa„ ria allo scarico dell' acque in tutte le condizioni del fiume.

L' esperienza sull' Adige accennata da principio lo dimostra ad

evidenza. Tutto questo lavoro si va facendo successivamente in quella quasi laguna che forma il fiume nel confondersi col mare; e così è di' tutti i fiumi, che possono da se tenersi aperto lo sbocco in mare, come lo fa vedere le cotidiana esperienza.

Prop. II. „ A questo riprodursi della nuova foce AB succe- „ de nel tronco immediatamente superiore un escavamento, pel quale „ si converte in concavità il basso fondo CD o la foce di prima.

E questo pure viene dall'esperienze sopraccennate sull'Adige comprovato interamente. Accumulandosi di fatto a poco a poco le sabbie e la belletta d'intorno alla nuova foce nascente, e più dai lati, che dove la corrente ha vigore, restano pure a poco a poco l'acque immediatamente superiori, tra le proprie alluvioni quasi incassate; sicchè non avendo più libertà di spandersi come prima, e divenendo in oltre più alte di corpo, per essere impostata più innanzi la cadente del pelo, cominciano a solcare il fondo, e a scavare ov'era lo scanno poch'anzi, come appunto s'è ritrovato collo scandaglio alla mano.

Prop. III. „ Inoltrata in mare la profondità minima AB della „ foce, si sposta ed avanza insieme l'acclività del fondo HD, e can- „ gia pure situazione la profondità massima GH, per cui il fondo „ superiore resta depresso sotto l'orizzontale del pelo basso del ma- „ re FL.

Questa *proposizione* consegue dalle precedenti necessariamente. Imperciocchè essendosi osservato, che alla trasposizione del basso fondo in AB, succede di fatto un escavamento nel contiguo tronco superiore, è necessario pure, che l'acclività avanzi anch'essa, e si riproduca come in IB. Quindi non avendo il fiume sofferto altronde alcuna alterazione per giunta o scemamento d'acqua, come si suppone, ch'è quanto dire, mantenendosi costante il sistema del fiume, e dovendo in conseguenza col corpo d'acqua di prima risalire il nuovo fondo acclive, e comporvisi, come innanzi, è necessario che anche il punto H, d'onde comincia l'ascesa, cioè la profondità massima GH sotto l'orizzontale del pelo basso del mare, trascorra avanti, come in IK, e alla foce inoltrata si avvicini.

Prop. IV. „ Da questo manifesto riprodursi degli accidenti di „ prima nell'infimo tronco rinascente, dietro all'avanzamento della „ foce in mare, si può conchiudere non senza gravissima ragione, „ che il fiume da B verso M tenda effettivamente a ristabilirsi in „ un andamento di fondo BIPM simile e similmente posto al fondo „ di prima DPHL.

Imperciocchè la vera, e per se attuosa cagione, per cui nel tronco ultimo di un fiume torbido si mantiene il fondo escavato, e così come si ritrova coll'osservazione, depresso con poca o niuna declività sotto l'orizzontale del pelo basso del mare, si è; tutti gl'Idrometri

consenzienti; la libertà di corso cui acquistano l'acque del fiume, dovendo in ogni stato spianarsi col pelo del mare anche bassissimo. Questa necessità importa, che da qualche distanza dalla sboccatura debba il fiume piegare il suo pelo, strignersi al fondo, e disporre anticipatamente la sua cadente a confondersi colla superfizie del mare. E questa distanza dovrà essere vie maggiore, quanto più l'acque del fiume dovranno cader dall'alto, cioè quanto più elevato ne' suoi diversi stati sarà il pelo del fiume. In conseguenza ove sensibilmente nell'ultimo tronco cominciano i fiumi in somma piena ad inchinare il loro pelo, quivi comincia pure a crescere la velocità, e in un la forza di scavare il fondo, la quale non ha luogo superiormente, ove tal accesso di velocità non si genera, e sempre più, quanto più si velocitano l'acque tra via approssimandosi alla foce. Cotal punto, ove cominciano a piegare i fiumi il lor pelo altissimo, cade a un dipresso dove giugne l'orizzontale del mar basso a segare il lor fondo, cioè verso il punto L (*tav.* 2. *fig.* 2.), come le osservazioni fatte dal signor *Zanotti* sul Po di Lombardia, e sul Tevere sembrano comprovarlo. Ma ovunque stabiliscasi questo principio, è facile il provare che dietro al prolungamento in mare della sboccatura debba anch'esso trasportarsi innanzi. In effetto sia questo punto in D (*tav.* 2. *fig.* 3.), e la DB rappresenti la cadente delle piene, essendo in B la sboccatura, si tiri la DC parallela all'orizzontale del mare ABE, e dal punto A la AC parallela alla BD, essendo prolungata sino in A la foce. Siccome la quantità dell'acqua è la stessa prima e dopo del prolungamento, se non disporrà il fiume la sua cadente precisamente nell'AC parallela ed eguale alla BD, dovrà essa assai poco declinare dalla AC, non essendovi ragione per cui non abbia il medesimo corpo d'acqua da ricomporre la nuova cadente del suo pelo presso a poco nello stato e condizione di prima, onde acquistare nelle parti omologhe gli stessi gradi di velocità, e spianarsi col medesimo pelo orizzontale del mare in A. Preso dunque un punto come F, nell'orizzontale DC, assai prossimo a C, e condotta la FA, se non la CA, dovrà necessariamente la FA, assai prossima alla CA, rappresentare la nuova cadente, ed F il punto ove dopo l'avanzamento della foce in A comincia a piegarsi il pelo alto del fiume. Di fatto l'esperienza giornaliera fa vedere, che la nuova cadente del pelo, come FA, dietro al prolungamento della linea in mare, induce la necessità di alzare gli arginamenti nell'ultimo tronco, tenendosi il pelo delle piene più alto, che non era da prima (*Manfredi* Annotazioni al Guglielmini; *Grandi* Vol. IV.) Adunque si può stabilire che la causa, che s'è detto, operante per se nel mantenere nell'ultimo tronco il fondo disposto in poca o niuna declività, allo spostarsi della foce si sposta anch'essa, e prende più

a basso il suo principio necessariamente. Ma se con questa causa si combini anche il reciproco movimento del mare, se non come causa per se, almeno come causa occasionale, in far sì che dal punto spezialmente ove il fiume è alterato dai flussi, il fondo dell' alveo si renda men declive, che non si manifesta superiormente, come appunto hanno osservato uomini gravissimi (*Guglielmini* Nat. de' fiumi cap. 8. coroll. 4., Manfredi Annotazioni al medesimo coroll., *Frisi* de' fiumi e de' torrenti cap. VII.), e com'è ragionevole il crederlo, non sarà difficile il dimostrare, che al prolungarsi delle linee, quel punto dell' alveo, ove termina cotale alterazione per conto del mare, s' inoltra anch' esso, e seconda la causa principale nell' accostarsi alla nuova foce. E primieramente non ha dubbio, che ne' flussi del mare non sia costretto il fiume ad appoggiarsi ad un pelo d' acqua più alto, ed elevarsi in conseguenza di superfizie per acquistare la velocità dovuta allo scarico delle proprie acque: e quindi ne' riflussi, come più alto di corpo, correre con maggior velocità che non farebbe, se il pelo del mare non si fosse alzato, e conseguentemente con maggior forza di tener agitate, sollevate, e incorporate le torbide. Di modo che non è senza fondamento il credere, che dal punto ove comincia questo risentimento, discendendo debba crescere più e più, e divenire energica la causa addotta da principio, e scemarsi sempre più la declività del fondo, quanto più verso la foce si procede. Ma dal prolungarsi delle linee non va mai disgiunto un ritiro del mare, ancorchè non si renda sensibile se non se dopo qualche tempo; il che succede sotto gli occhi di tutti, e vien dal fatto dimostrato ad evidenza alle sboccature de' fiumi, che mettono capo ne' nostri mari. E dietro a questo ritiro del mare avviene necessariamente, che l' effetto de' flussi, il quale in un fiume di sistema determinato, deve estendersi ad una determinata distanza, non possa più giugnere al sito di prima; il punto in conseguenza, d' onde prima del prolungamento della linea cominciava il fiume ad essere commosso dall' azione del mare s' inoltra, ed accompagna l' allontanamento della foce. Ma si è pur veduto, che il punto dove comincia a piegarsi verso gli sbocchi il pelo delle piene trascorre innanzi anch' esso al protraersi della linea. Dunque avanza verso la foce ancora il punto ove l' inclinazione del corpo d' acqua combinata, nel modo che s' è detto, coll' azione del mare, comincia a farsi più efficace nel rendere men declive il fondo del fiume. Se dunque da una parte, cioè verso le foci, si fanno più attuose le forze e più valevoli ad escavare il fondo, che non erano prima del prolungamento della linea, e dall' altro capo si allontanano e cessano di agire, è manifesto che succederà un profondamento, come PIB (*tav.* 2. *fig.* 2.), da quel capo ove le forze debbono crescere, ed un rialzamento di fondo, come PML,

all' opposta parte, ove dette forze si diminuiscono. E se il fiume potesse in tal nuova disposizione d' alveo rassettarsi, è certo che adoperandosi le stesse cause nella formazione del nuovo tronco, che sono concorse alla formazione del precedente, trasposte soltanto di sito, dovrebbe riprodursi il nuovo fondo, dopo il prolungamento, simile e similmente posto al fondo precedente. Ma essendo le sboccature sempre soggette alle vicende di nuove protrazioni di linea, e agli effetti che ne derivano sempre rinascenti, e non potendo quivi in consegnenza rigorosamente stabilirsi l' alveo del fiume, può almeno fondatamente conchiudersi, che il fiume tenda effettivamente a ristabilire il nuovo fondo BIPM in positura simile e similmente posta al fondo precedente DPHL, ch' era l' assunto di questa *Proposizione*.

VII. Le tre prime *proposizioni* cavate dall' osservazione, hanno fatto strada alla quarta, servendomi le cose conosciute quasi di scala, onde gradatamente procedere alla cognizione d' una verità, che di lancio forse non era possibile di discuoprire. Mi vi sono pertanto trattenuto a di lungo, e perchè l' importanza della cosa lo richiedeva, e ad oggetto di schiararla in modo, che sulle conseguenze non potesse moversi dubbio ragionevolmente. Se così è dunque, come abbiamo fatto vedere, che posto l' avanzamento della foce in B, se non può riprodursi il fondo BIPM rigorosamente simile e similmente posto a DPHL, essendo disturbata l' opera da nuovi progressi sempre rinascenti, sarà almeno provato, quanto può esserlo in una materia di questa natura, co' fatti e col ragionamento, che mentre nasce escavamento di fondo, come DI, ov' era prima la minima profondità della foce, all' estremità opposta del tronco insorge un rialzamento, come MN: e che parimenti nelle parti intermedie, preso un limite come P, da indi in giù comincia a generarsi il profondamento, e in su all' opposto l' alzamento di fondo. Resta quindi definita l' alterazione, e la modificazione (§. VI.), che succede nel tronco quasi che orizzontale intermedio, mediante la quale si trasfonde l' effetto del prolungamento ne' tronchi superiori. Si vede primieramente, che in quel tronco possono talmente esser piccoli da una parte del punto P gli scavamenti accaduti, e dall' altra gl' interramenti del fondo, che si manifestino appena a' nostri scandagli, e possa quindi per lunghi tratti di miglia giudicarsi esente l' alveo da alterazione. Ma che all' opposito se fossero fatte le osservazioni verso le due estremità del tronco, cioè verso la foce per una parte, e nelle vicinanze del sito, ove l' orizzontale del pelo basso del mare sega il fondo del fiume, e per l' altra, si scoprirebbe sensibilmente la mutazione accaduta là di profondamento, e qua di rialzamento di fondo, la corrispondenza e consenso de' due termini del tronco, e l' operar che vi fa il prolungamento

della linea, nel profondare da un capo, e nell' elevare il fondo dall'altro, senza che ne' tratti di mezzo apparisca seguita notabile alterazione.

VIII. E quando al propagarsi dell' effetto ne' fondi inclinati superiori, si consideri, che modificandosi così, come s' è detto, il tronco intermedio, vanno successivamente crescendo le aggestioni al capo superiore. Ma non ha dubbio, che non cessino per tal modo i tratti di alveo, come MNL, dal far parte di mano in mano del canale quasi che orizzontale, e si aggiungano di fatto al fondo immediatamente superiore. Adunque la linea dell' alveo inclinato del fiume si allunga effettivamente. E si sa che il prolungamento della linea opera appunto nell' alzamento del fondo negli alvei inclinati. Ecco dunque come ne' tronchi superiori, medianti le modificazioni accennate nel tronco tra essi interposto e gli sbocchi, seguano necessariamente gli alzamenti di letto, che pur l' esperienza ci manifesta. Se così non fosse, e non avesse luogo per una parte il fatto successivo ripetersi de' medesimi accidenti più e più a basso verso il mare, e non si verificasse dall' altra il progresso oltre il punto L degli alvei inclinati de' nostri fiumi torbidi, l' estensione dell' ultimo tronco di fondo quasi che orizzontale non avrebbe, contro l' esperienza, confini, atteso il prolungamento considerabile realmente accaduto delle linee tutte, se anche a pochi secoli addietro vogliamo solamente riferirci, e l' avanzarsi in mare che fanno tuttavia sotto gli occhi nostri le foci, lentamente sì, ma che pur fanno continuamente.

IX. Un' osservazione in grande nel Po di Lombardia può in qualche modo confermare le nostre *proposizioni*, e il magistero, che ci siamo ingegnati di adombrare. Questo gran fiume in distanza di sedici miglia incirca dalle foci si divide in due rami, uno detto delle fornaci, l' altro di Ariano, de' quali propriamente il primo è il tronco maestro, l' altro una diramazione di gran lunga inferiore di portata al tronco. Non mancano dal principio di questo secolo osservazioni accuratissime, dalle quali si ricava, che il ramo d' Ariano, s' è andato facendo più e più profondo, che non era da prima. Nel 1716. particolarmente si ritrovò considerabilmente escavato più che non era nel 1693, confrontando insieme ne' medesimi siti le osservazioni fatte ne' due diversi tempi (Visita di Monsignor *Riviera*). E nell' ultima Visita del 1721 si ritrovò ancora più profondo che nel 1716. Non v' ha chi non abbia riflettuto, che mentre per una parte s' allungava di fatto la linea del Po in mare, quel ramo sempre più abbassavasi di fondo; ma la ragione di tal fenomeno par che si ripetesse concordemente dall' introduzione fattasi, prima della metà del passato secolo, nel Po di Lombardia dell' acque del Panaro, e

dell' altre, che venivano distratte pel Po di Ferrara. Non nego che dovendo proporzionarsi il letto del Po a questa giunta d' acque, non abbiano dovuto accadere allargamenti, e profondamenti di alveo, come appunto osservano tutti que' dotti uomini, che hanno scritto su questo particolare. Ma si rifletta prima, che quest' acque aggiunte non dovevano tutte avviarsi al mare pel ramo di Ariano, ch' era anche in que' tempi di condizione assai avantaggiosa, avendo esso lo scarico più felice nel tronco a sinistra, più ampio, più profondo, più attuoso incomparabilmente. In conseguenza troppo notabile era l' abbassamento accaduto, come si rileva ne' luoghi citati, perchè potesse rifondersi sull' azione di quella parte d' acqua, che poteva essersi rivolta pel ramo di Ariano.

A questo si aggiunga, che non pare l' operar solito della natura quello d' impiegar quasi un secolo; dal tempo dell' introduzione del Panaro a quello dell' ultime osservazioni fatte in questo secolo su quel ramo; nel proporzionare il letto conveniente ad un accrescimento determinato d' acqua, che si faccia in un fiume, spezialmente negli ultimi tronchi, ove coll' altre cause attive, accennate di sopra, cospira la costituzione delle sponde e del fondo di materia ammovibile, com' è la sabbia e la belletta. Di modo che per ispiegare l' escavamento insortovi, come nel caso nostro s' abbia sempre da ricorrere al Panaro. Riflettendo per tanto alle osservazioni da me fatte alla foce dell' Adige nel solo giro di quattro anni, e alle conseguenze legittime, che si sono dedotte da queste osservazioni, e da altri fatti, per mezzo di un fondato raziocinio, non può aver dubbio, che quel notabile profondamento osservato in questi ultimi anni non debba conchiudersi seguito necessariamente dietro al prolungamento della linea, nel modo che abbiamo esposto di sopra. Tanto più che tutti concordemente riconoscono nel Po di Ariano, essersi in quel frattempo protratto considerabilmente in mare lo sbocco, cioè per quasi quattro miglia in un sol secolo. E di fatto considerando la posizione di quest' alveo, che si dilunga dal mare per sole sedici in diciasette miglia, e la grande distanza dell' altro termine superiore del tronco, ove l' orizzontale del pelo basso del mare sega il fondo del fiume, il quale riesce tra la Stellata e Lagoscuro, in distanza, come s' è detto (§. V.) di ben sessanta miglia, sembra che quel tratto del Po, in conseguenza d' uno spostamento di foce così notabile, possa appunto recapitare in quella parte inferiore del tronco, ove necessariamente deve accadere profondamento di letto (§. VII. Prop. IV.). Così tra la Stellata, e Lagoscuro fossero state fatte in quel tempo men vaghe osservazioni sull' alterazione de' fondi, che s' avrebbe una conferma plenaria di questa importantissima teoria. Ma la materia è ormai messa in tal lume, se non m' inganno, che

d' ora innanzi non parrà più oggetto di pura curiosità quello di accertare ne' fiumi di sistema d' acque stabilito, che mettono in mare, e disegnar con precisione il termine superiore dell' ultimo tronco, termine dall' avanzarsi del quale consegue l' alzamento de' fondi superiori, e che può per questi considerarsi quasi foce equivalente. Mirabile di fatto, come s' è veduto, è il consenso che hanno tra di se questi due termini, tra i quali va librandosi il fiume nell' ultimo tronco, e dietro alla trasposizione de' quali si può ormai, non senza fondamento, conchiudere, protraersi effettivamente, ed inoltrarsi in mare gli alvei de' nostri fiumi.

NVOVO SOSTEGNO

A PORTA, E TRAVATA

DI

ANTON-MARIO LORGNA.

De' sostegni in uso scrisse ampiamente il *Zendrini* nel cap. XII. delle leggi e fenomeni dell' acque correnti, e il *Belidor* nell' architettura Idraulica. Altri sono stabili come le pescaie; altri mobili come i sostegni a doppie porte e conca intermedia, a porte a vento, a travate, e a cateratta finalmente. Nel suo libro de' canali navigabili parla pure assai giudiziosamente degli uni e degli altri il celeb. Ab. *Frisi*. Ma prima di tutti ne trattò a dilungo il *Guglielmini*, fondatore della scienza de' fiumi, che che ne pensi il *Leibnitzio* (Com. Philos. et Mathem. Epist. CCXIX.) Ne' canali però che da altri maggiori si derivano o a titolo di diversione nell' escrescenze del canal maestro, o per gli usi della Società, come sono la navigazione, le irrigazioni, gli edifizi, e somiglianti occorrenze, qualor sia d' instituzione e bisogno, che or vada interamente aperta la derivazione, ora chiusa del tutto, due soli di questi modi sono praticabili; quello cioè delle cateratte, e quello delle travi. Imperciocchè essendo il canale derivato solitario, e senz' acqua straniera, che ricorra inferiormente al sostegno, le porte che pur sono così maneggevoli, non possono chiuse riaprirsi, avendo per una parte l' acqua del fiume appoggiata e premente, e non per l' altra un corpo equivalente d' acqua, che possa contrabilanciarla. In effetto non so che in simili canali, ove abbia, chiudendogli, a mancar l' acqua inferiormente, e debbane a vicenda riaprirsi, sieno state giammai adoperate le porte, che poste tra due acque riescono così felicemente. Ma un sostegno a cateratta non è sempre adatto, specialmente per l' angustia dell' aperture ch' egli richiede, moltiplici e incomode; se sia considerabile il corpo d' acqua da estrarre, e pel barchereccio interdetto innfizioso alla navigazione. Il sostegno a travi orizzontali, o verticali, ove d' imboccatura notabile si tratti, è l' unico sinora, che possa in canali solitarj utilmente praticarsi.

Quanto però nelle cateratte sono agevoli da abbassare le paratoie, altrettanto difficilmente nel sostegno a travata si assestano le travi,

per poco che sia abbondante e impetuosa l' acqua da escludere, e ampia la bocca: di modo che non è mai pronta la chiusura, e resta talvolta incompiuta, qualora anche un sol trave per accidente obbliquamente negl' incastri s' impegni e costringa. L' aprimento all' opposito non è malagevole, e può rendersi facilissimo. Se dunque si potesse combinare la somma facilità nel chiudere per mezzo delle porte, colla facilità di aprire con le travi, si avrebbe per simili canali solitarj raccolto il buono de' sostegni diversi, immaginati sinora, in un solo sostegno, rimosse le inconvenienze. E questo è il sostegno appunto, cui sto per descrivere. Ma come anche i fiumi più limpidi, ch' escono dagli emmissarj de' laghi, non vanno esenti da posature, e però vuol ben dire accidente raro che a ridosso delle porte, nel tempo che stanno chiuse, specialmente per lungo tempo, non s' accoglino materie, così necessità richiede, che abbia in oltre con se il novello sostegno gli opportuni artifizj, onde sgombrare e pulire la platea anteriore da sedimenti. In tutti que' sostegni a porte, cui m' è accaduto di vedere, ho sempre osservato essere di non piccolo imbarazzo e fastidio cotale ingombro, che da se l' acqua potrebbe pur divertire, se l' arte ve la disponesse. In questo pertanto ho cercato di unire agli altri suoi proprj anche questo vantaggio. E perchè non è raro il caso, che i nostri concepimenti o non del tutto, o imperfettamente almeno rispondano all' intenzione, non sarà fuor di proposito il dire, che sin dall' anno 1773 è stato con fabbrica grandiosa costrutto un tale sostegno in fianco dell' Adige alla Badia nel Polesine di Rovigo. Quella derivazione, detta l' Adigetto, ha dodici piedi Veneti d' imboccatura: la porta diciotto di altezza. Il maneggio del sostegno è riescito facile; e ancorchè stia chiuso talvolta mezz' anno continuo, in brevi istanti si sgombra dalle sabbie, che vi mette dinanzi l' Adige.

AB BC sono le due imposte della porta, che chiudono l' imboccatura AC (*tav.* 2. *fig.* 4.). Potrebbe la porta essere anche di una sola imposta, se fosse moderata l' imboccatura. Aperte si annicchiano nell' incavature, come CKM, AHT, tutte preparate in pietra viva nelle sponde della fabbrica CR, AS, perchè l' acqua tragitti senza incorrere in risalti: al qual effetto si foderano di buone tavole di Larice anche nelle facce interne, il che non si pratica nelle porte comuni de' sostegni, non dovendo far esse l' uffizio di sponde all' acqua corrente, come le nostre. Nel mezzo d' ogni imposta sono tagliate le consuete portelle, quanto è più possibile basse e vicine alla platea, le paratoie delle quali si sollevano dalla sommità della porta, com' è in costume. D è un incastro verticale scalpellato in pietra viva per ritenere un capo delle travi DE da coricarsi l' una sull' altra orizzontalmente. Dall' opposta parte in E l' incastro

corrispondente, ove l' altro capo delle travi vuol applicarsi, è incavato in un grosso cilindro di larice eretto, e rattenuto verticalmente, e volubile intorno al proprio asse. L' uffizio di questo incastro mobile si è di ritenere le travi assestate al pari dell' opposto in pietra D, obbligato in sommità il cilindro da una spranga di ferro, come nella fig. 5.; e qualor venga levata la spranga, ed esso rivolgasi un poco sull' asse, come nella fig. 6., le travi tutte ad un tratto da se si disimpegnino, e vadano a seconda dell' acqua. Nel fondo delle due nicchie in pietra per le imposte della porta, CKMAHT siano fatti due fori K, H di grandezza proporzionata alla natura e quantità delle materie che possono deporsi temporaneamente dinanzi alle porte chiuse, come quelli che debbono dar loro passaggio per mezzo de' corrispondenti condotti KO HN, formati di viva pietra e massiccia nel vivo della fabbrica, cui diremo sfogatoi. La platea anteriore RGIAS sia per tanto divisa dalla groppa IL in due piani inclinati; uno verso l' apertura K, e l' altro verso H, perchè l' acqua più agevolmente incalzi e trasporti per esse i sedimenti. A queste aperture vanno applicate le paratoie di legno da aprirsi e chiudersi dall' alto della fabbrica. Li due incastri stabili a, b in vicinanza del ponte X sono di riserva per qualche straordinaria esigenza. V, Y sono i due casellini, ove sta al coperto l' argana, che con le consuete catene serve ad aprire la porta, e a frenarne il moto nella chiusura. Descritta la costruzione del nuovo sostegno, e tutte le sue condizioni, mi fo ad esporne brevemente il maneggio.

Aprimento del Sostegno.

Si riconosca primieramente se v' abbia posatura a ridosso della porta, ed essendovene in qualche copia, s' aprano gli sfogatoj, e lo si dia scarico nel canale inferiore. Chiusi gli sfogatoj, si assestino tante travi orizzontali nell' incavature D, E, quanto è sufficiente per prevalere di alcun poco al pelo del fiume esternamente appoggiato alla porta. S' aprano di poi le portelle, e l' acqua entrando nella conca CBADE si pareggi col fiume. Coll' argana s' aprano l' imposte della porta, e si assicurino alla sponda cogli uncini a quest' uso preparati. Assicurate le porte, si levi la spranga di ferro, che ritiene il cilindro di larice E dal rivoltarsi intorno al proprio asse, e la pressione dell' acqua sulle travi lo fa tosto girare, come mostra l' esperienza; e le travi tutte ad un tratto piombano a basso, e si veggono una dietro all' altra comparire nel canale inferiore, donde si traggono poi, e si mettono al sicuro; ed il sostegno è aperto.

Chiusura del sostegno.

La chiusura è così agevole, che non vuole con molto discorso essere descritta. Con le catene dell' argana si va da ambe le parti moderando l' abbrivo dell' imposte, e rattenendole perchè gradatamente si vadano l' una all' altra accostando, nè per impeto conceputo cozzino insieme violentemente nell' incontrarsi. S' avverta in oltre di tener aperti nell' atto della chiusura così gli sfogatoj, come le portelle, perchè minor parte d' acqua incalzi contro la porta medesima. In istanti, e con dieci e più piedi d' altezza d' acqua corrente nell' Adige si chiude questo sostegno nel sito sopra mentovato. Chi volesse proteggere le porte dall' inginrie del tempo, potrebbe su quattro pilastri erigere un semplice tetto, che le difendesse, bastando a quest' oggetto di ricoprire di latta la testa del cilindro E, ed impeciare il rimanente. E perchè a sostegno chiuso non abbiano a trattenersi in copia posature sulla platea anteriore, debbe il custode una volta alla settimana aprire le portelle della porta, e gli sfogatoj laterali, perchè si sgombri di mano in mano delle materie, che vanno sopravvenendo.

Questo è il sostegno, che ho ragionevolmente denominato a porta e travata, di cui dimostra l' esperienza la praticabilità anche su i fiumi della natura dell' Adige.

Può talvolta però accadere, che trattandosi di fiume soggetto per grandi escrescenze a rialsarsi moltissimo del pelo, si rendano di soverchio pesanti le porte e difficilmente maneggevoli, se siano a tutta altezza costrutte. Un ripiego soffre da adoperare al bisogno mirabilmente. Si costruiscano le porte con le due travi maestre AB, CD (*tav. 2. fig. 7.*) a tutta la somma altezza necessaria, e si compisca il lavoro delle porte sino in EF solamente, cioè a quell' altezza discreta, che si crede opportuna per gli stati ordinarj del fiume, e facile al maneggio, quasi la porta esser dovesse la EACF. Ne' due pezzi rimanenti EB, FD delle travi maestre s' intagli un' incavatura verticale. A misura del bisogno vi si assestino orizzontalmente tavoloni sciolti, come *ab*, *cd*, ec.; i quali possano poi dimettersi, cessato il bisogno. Per tal modo non s' aggravano di peso soverchio le porte nell' uso ordinario, e s' impedisce temporaneamente la sormontazione ne' casi straordinarj.

OSSERVAZIONI

INTORNO ALLE ROTTE DE' FIUMI

DI ANTON-MARIO LORGNA.

Le rotte ne' fiumi grandi non sono avvenimenti così frequenti, onde trar si possano sperienze e documenti giornalieri. E chi ha d'ordinario il carico di otturarle o non è da tanto, o non s'avvisa di far conserva de' ripieghi spremuti dal bisogno, e dagli artifizj adoperati a misura delle circostanze. Quindi è, che tolti alcuni principj generali, l'impresa è per lo più condotta dal caso, e a discrezione di gente prezzolata, che per interesse dilunga almeno l'opera se non manca talvolta di fede per averla da ricominciare. Eppure sarebbe utile cosa oltremodo, che di simili fatti fosse trasmessa memoria per norma ne' casi avvenire, sicchè potesse a poco a poco ristringersi sotto regola quello, ch'è finora una pratica dispendiosa e mal sicura. Siami pertanto lecito di fare il primo passo, giacchè gli avvenimenti deplorabili nell'Adige, e nel Canal-bianco dell'anno 1774 possono non essere sterili argomenti di nuove utilissime considerazioni. Cinque rotte, ed un generale dirupamento degli argini furono le memorabili conseguenze d'una piena straordinaria accaduta in quel fiume a' primi di Maggio. E come per sovrano comando ebbi l'incarico generale di rimettere l'acque in obbedienza negli alvei abbandonati, e di restituire gli arginamenti e le difese a condizione più robusta e durevole, che non era da prima, così non ho mancato di mettere a profitto tutte le occasioni, che mi si offerivano per aggiugnere dal canto notizie e norme, così alla parte teoretica, come alla pratica tanto utile, e forse più che non conviene negletta, dell'idrometria.

I. Nessuno ch'io sappia prima del *Zendrini* ha parlato fra gl'Italiani delle rotte ne' fiumi grandi. Quest'uomo benemerito della materia dell'acque dopo di aver trattato a dilungo nel capitolo XI. del suo libro delle Leggi e fenomeni dell'acque correnti, intorno a questo particolare, discende a proporre il metodo in uso a suoi tempi di chiuderle, e di mettere in miglior difesa le situazioni danneggiate. Ma se per mano di un solo non s'erige fabbrica ordinariamente; non sarà fuor di proposito, che nuove osservazioni si accumulino, e si aggiungano alle sue, quasi nuovi materiali da porre in opera; ne

forse per altro mezzo potranno mai avanzarsi le nostre cognizioni in questa materia intralciatissima dell' acque.

La strada che ho tenuto in queste operazioni è diversa da quella; ch' ei suggerisce in gran parte; e come non è lecito fare delle cose proprie con le altrui paragone, quando non è mestieri, così anderò esponendo i principj co' quali mi son condotto, e gli artifizj, che ho messo in uso onde ottenere il mio fine, lasciando, che altri formi su tutto quel giudizio che crederà più giusto e conveniente.

II. Cercando dunque d' internarmi nel suggetto, poichè l' occasione, madre di gran cose, lo richiedeva, mi feci a ragionare in questo modo. La chiusura d' una rotta non altro importa fra noi, fuorchè rimettere nell' apertura fatta dalla violenza dell' acque, l' arginamento di terra, ch' esisteva da prima, sì che il fiume ritorni ad incassarsi nel suo alveo naturale. Ma perchè non è possibile di avanzarsi dai due capi della rotta con semplice terra, che verrebbe asportata dal corso dell' acqua, ragion vuole, che se ne protegga l' avanzamento con materie più pesanti e superiori di forza a quella del fiume. E come poi accostandosi sempre più verso il filone dalle teste della rotta, ove l' acqua d' ordinario ha minor corso, riesce sempre più violento il movimento, e ricresce più e più a misura che inoltrandosi il lavoro si va ristringendo la bocca, così è necessario che le materie adoperate per cuoprire l' avanzamento della terra dai due capi verso il mezzo, siano più e più resistenti proporzionatamente agli aumenti di velocità, che va acquistando il fiume di mano in mano. Non essendo dunque la forza da vincere da principio eguale alla forza da vincere in progresso, e minore incomparabilmente di quella, contro cui si dee lottare in fine della chiusura: come appunto cammina per gradi l' ostacolo da superare, così dee procedere per gradi la resistenza, onde spalleggiare il trasporto della terra, e l' avanzamento del lavoro. Questo ragionamento semplicissimo mi fe intanto conchiudere, che molto mal a proposito si adoperavano le travi da principio fitte in terra, che come resistenza più di tutte potente a reprimere il corso, andava naturalmente riserbata nel progresso, e moltiplicata gradatamente in fine dell' operazione. Quindi un risparmio considerabile di spesa, e di tempo, forse più della spesa computabile e prezioso.

III. Si costuma nel Polesine di Rovigo da molti anni di rivestire con erba sala seccata, o con paglia di segala due o tre zolle di terra grassa e compatta, ritenute con quattro legami della stessa pianta, o con isprochi, acciochè una massa ne risulta, detta comunemente volpara, di diciotto pollici circa di lunghezza, larga più di sei, e intorno a quattro profonda, pesante dodici, e sin quindici libre a peso Veneto. Non può esprimersi a quante occorrenze istantanee sull' acque

potrebbe estendersi l' uso della volpara, diffuso che fosse. Due uomini esperti nella state sogliono fabbricarne più di mille. Su queste pertanto presi a far fondamento particolarmente; su gruppi di tre insieme collegate con vermene di vinco; su gabbioni cilindrici tessuti con tralci di salcio o di vite di ben sette piedi di altezza, e due e mezzo di diametro; e su mezzi gabbioni. Venia per tal modo a preparare una scala di resistenze sempre crescenti, le quali proteggendo gradatamente l' avanzamento della terra, rimettessero a maggior distanza dai capi della rotta, che non soleasi, la fitta de' pali. Così fu in effetto; e nelle rotte del Canal-bianco prima, e dall' Adige a Lusia in seguito, mi riuscì in modo questa economica disposizione, che non credo inutile lo stabilire su tali principj, e sulla fede dell' esperienza alcune regole, onde chiudere le rotte grandi e profonde, che tutto o per la massima parte distraggono il fiume dal tronco maestro; qualora da se, attesa l' altezza della campagna sottoposta, non arrivino ad incassarsi l' acque in gran parte. Nel qual caso nè tanto artifizio, nè tanta forza richiedesi.

IV. Si riconosca dunque in primo luogo col mezzo della trivella la natura del terreno per tutta la bocca della rotta, onde accertarsi, ove particolarmente si riscontri il miglior tratto di terra soda e tenace, sfuggendo il fondo sabbioso o fradicio, quant' è più possibile.

Stabilito così a un di presso il sito, ove può tornar bene l' ultima chiusura, o la stretta della rotta, come suol dirsi, corrispondente al sito di miglior fondo, si segni con travicelli fitti a larghi intervalli per l' imboccatura l' unghia o il piede dell' argine nuovo con la direzione, che più credesi opportuna, onde migliorare la condizione di quel tronco che vuol ristabilirsi. Due di questi segnali siano distinti dagli altri, i quali rispondano a quell' apertura prossimamente, nel mezzo della quale s' è prefissa la stretta. Si spianino in seguito li due capi o teste dell' imboccatura, sicchè disposte in dolce declive, siano agli operai accessibili per ogni parte; e si cominci ad avanzare con la semplice terra nell' acqua all' uno e all' altro capo con una fronte almeno, che occupi la metà dell' argine in base, sorgendo cogli strati di terra da principio fuor d' acqua, anche tre soli piedi, e non deviando mai dalla traccia de' travicelli già fitti in acqua. Proseguasi questo lavoro sinchè si riconosce, che la terra resiste abbastanza, e non viene trasportata dal corso. Subito dopo si cominci al fiume, nella direzione de' paletti, a fondare e tessere un arginello di volpare, che sorga fuor d' acqua, e spalleggi, avanzando, il lavoro di terra, che avanza del pari, e lo segua fedelmente. Ma questo progresso ha pure il suo confine; mentre veggendo, che la volpara lanciata all' acqua vien rapita dalla corrente, si prenda a fondare e proseguire l' arginello co' gruppi accennati (§. III.) di tre volpare.

costipate, sino a fior d' acqua: si faccia poi l' alzamento fuor d' acqua colle volpare semplici a cotali stipe soprapposte. Intanto si continua col favore di questo nuovo arginello ad avanzarsi colla terra lateralmente. Ma via via crescendo il ristrignimento dell' imboccatura, e accelerandosi l' acque, forz' è ricorrere al mezzo gabbione per fondamento dell' arginello da seguitare: finalmente succede a questo il bisogno di far uso del gabbione intero.

V. Inoltrati così, quant' è possibile, e non essendo più permesso di proseguire con tale lavoro, divenendo troppo violento il corso dell' acqua, conviene necessariamente dar mano alla palafitta, e avanzar protetti dal paradore. L' acqua corrente per la rotta Colombara a Lusia aveva cento novanta pertiche Venete di larghezza. Senza alcuna palificata, col metodo sopra esposto, si ridusse ad una sezione di sole trenta pertiche di luce; sì che potemmo avanzarsi in pochi dì, coll' argine di terra così coperto, quaranta pertiche dal capo superiore, e cento venti dall' inferiore al sito determinato per la stretta, senza ricorrere alla fitta de' pali.

Prima dunque di dar mano al paradore, e alle contemporanee palificate, si fortifichi la testa inferiore della bocca, così ristretta, al segno che si crede più opportuno, dovendo il progresso del lavoro essere fatto dal capo superiore a seconda del fiume, di modo che l' inferiore sostener deve vie maggior urto, quanto più dal superiore va crescendo l' avanzamento; e cotale fortificamento si fa di gruppi di volpare, e di volpare semplici, rialzando l' opera sopra l' acqua a scarpa, e riducendo la stipa a qualche piede di larghezza in sommità, secondo la natura del fiume, e cacciando terra indietro, la quale per tal modo viene ricinta per ogni parte contro gl' intacchi della corrente. Assicurata la testa inferiore, si pensi al modo di palificare adattato all' indole del fiume e del fondo, alla maggior o minor bassezza della campagna, e a tutte le altre circostanze. Si ponderi, e si riconosca a quale apertura minima si potrà a un di presso ridurre l' ultima bocca della stretta, e sia questa per esempio di sette pertiche al più, come può comodamente ottenersi sull' Adige. Il paradore, la prima palafitta, e la contro-palafitta possono con questa proporzione distribuirsi, sì che quattro volte maggiore dell' apertura della stretta sia il paradore in circa: tre la prima palafitta, e due la seconda. Il più o meno è riserbato al giudizio del direttore secondo le circostanze.

AB è il paradore (*tav.* 2. *fig.* 8.); CD la prima palificata messa a un di presso ove recapitar deve a perpendicolo il ciglio del nuovo argine, la quale per tanto alla rotta di Lusia riuscì lontana dal paradore otto pertiche crescenti; EF la seconda palificata distante dalla prima sedici piedi al più; GH la linea degli Orboni (Vedi *Zendrini*

al luogo cit.); IK quella de' contraorboni a gruppo. Questo è tutto il complesso delle palificate, ch' io credo indispensabile nelle rotte di un gran fiume, come l' Adigo, rilevate di fondo sopra il piano delle aggiacenti campagne. Non parlo de' collegamenti pel paradore, e per l' altre palificate, come cose che possono vedersi per disteso nel *Zendrini*.

VI. Si ordiscano per tanto i telaj del paradore, e delle due palafitte; e prima che crescano le difficoltà, si conficchino effettivamente tutti gli appoggi degli orboni e contraorboni, cioè le due linee di pali GH, IK. Ma si dia mano nel tempo stesso al paradore da B verso A; alla prima palificata da G verso D: alla seconda da F verso E. Nel paradore si moltiplichino gli edifizj, e nell' altre palafitte meno a proporzione, affinchè la fitta di tutte le palificate sia contemporanea, ed abbia termine ad un tempo. A misura che il paradore va avanzando, si proseguisca l' intermesso lavoro alla testa superiore, e la stipa di mano in mano, non più di gabbioni, ma di volpare e gruppi di volpare s' inoltri coperta dal paradore; e dietro a tale arginello si continui pure il trasporto della terra, onde viepiù ristrignere la bocca (*tav.* 2. *fig.* 9.). Giunti coll' arginello in B quasi dirimpetto al punto D, si pieghi l' andamento verso D, e vi si metta capo: con che si venga a chiudere e formare la testa superiore. Così si viene ad abbracciare, e strignere il complesso delle palificate, cui diremo il castello, col lavoro di terra. Ma questa operazione vuol esser fatta mentre i pali non si tocchino ancora nelle palafitte, altrimenti richiederebbesi sforzo maggiore, riducendo essa, e costrignendo tutta l' energia, e la corrente dell' acqua al castello. Fatto questo, si proseguisca con calore la fitta de' pali, nè s' interrompa mai sino al compimento, lavorando giorno e notte. E intanto da ambedue le teste si avanzi col lavoro delle volpare, e si abbraccino i capi della seconda palafitta EF, strignendo sempre più l' operazione al castello, sicchè finalmente, quando sia compiuto e fortificato il castello, sia del pari e contemporaneamente tutta l' apertura ridotta al sito, e alla misura convenevole della stretta, siccome dimostra la fig. 9. Frattanto sia parimenti approntato tutto l' occorrente deposito de' materiali per la stretta, consistente in un ammasso di volpare, gruppi di volpare, sacchi d' ogni sorte riempinti di terra, e cose simili, il quale vuol essere soprabbondante. Fra il paradore, e la prima palificata si costruisca un ponte su piccole barche piatte largo almeno dodici piedi, e altrettanto dalla prima palafitta lontano; e sull' intervallo parimenti, tra la prima e la seconda palafitta, si formi un tavolato di dieci piedi, sicchè restino sei piedi di apertura tra esso, e la prima palificata. Stabilito il momento della stretta si dispongano, ed istruiscano gli operaj in modo, che

girando pel tavolato, o pel ponte, sempre o a furia vengano lanciati li materiali sopradescritti nell'acqua tra il ponte o la prima palafitta, e tra la prima palafitta e il tavolato. Sorto il materiale fuor d'acqua, si concorra da ambe le teste della stretta, e con barche, a gittar terra di buona qualità tra il ponte e il paradore, sì che quivi s'alzi prima di tutto l'argine, che stagna ogni trapelamento, e stabilisce la sicurezza dell'operazione.

VII. Veduto in generale della chiusura dello rotte, alcuni avvertimenti vogliono aggiugnersi per gli accidenti, cho non possono prevedersi, e utili in qualche circostanza.

Sogliono disporsi lungo il paradore, e tal volta superiormente alcuni speroni di travi, perchè respingano il corso dell'acqua dalla rotta, e lo rimettano nel tronco del fiumo. Questa pratica può essere utile, e non vuolsi trascurare, potendolo richiedere la posizione e l'indole della rotta, e diverse altre circostanze. Nella rotta del Canal-bianco non ne ho fatto uso, perchè superflua. In quella di Lusia sull' Adige un solo sperone parvemi indispensabile in testa del paradore. Ho giudicato più dannoso che utile il ripiego di moltiplicarne la fitta, atteso il fondo di ben ventotto piedi Veneti, che aveva il fiume lungo il paradore, fondo cui non voleva tormentare maggiormente, ed accrescere co' moti vorticosi, che avrebbe l'acqua preso inevitabilmente. Sogliono in oltre, qualor sia il fondo instabilo, moltiplicare le palafitte incredibilmente. Ma si può con risparmio considerabile di spesa, e di tempo vincere anche questa difficoltà. Ho osservato sull' Adige diversi luoghi di antiche rotte, e v'ho scoperto in moltissime sino a sei ordini di palificate parallele. Primieramente lo spazio interposto tra l'unghia, e la cresta dell'argine da ristabilirsi, non vuole assolutamente essere ingombrato da palafitte, ma di sola buona terra riempiuto. Non può giammai legarsi la terra col trave, e i pali non reggono a lungo contro la spinta de' terreni. Siane prova agli occhi una serie di rotte su questo fiumo, ove le palificate o sono rovesciate del tutto dal peso dell'arginamento, o inchinate moltissimo a segno di render mal sicuro l'argine soprapposto. E tanto l'esperienza mi fo conoscere pericolosa, e incauta la pratica di lasciar i pali nell'interno dell'argine, che non ho difficoltà di consigliare ad estrarne, o reciderne quel più ch'è possibile, prima di addossarvi l'arginamento. Così ho fatto puntualmente nelle rotte principali prese l'anno 1774, 1775. All'instabilità poi, e infedeltà de' fondi può in altri modi rimediarsi, o al più con una sola palificata aggiunta alle descritte. Si figgano dunque per tutta la fronte della stretta lunghe travi squadrate contigue del tutto tra di se, o combaciate colla prima palafitta maestra in modo, che ognuna recapiti precisamente alla fessura delle due travi prossime

della palafitta medesima, e si battano a fior d'acqua, sì che ricerchino miglior fondo colla punta, e chiudano i vani della prima palificata. Questo ripiego vale assai più che diversi ordini di palafitte disposti con intervallo tra di se. Che se poi tale sia la natura del fondo, e così grande la profondità generatasi, e il corso del fiume, che non convenga riposare su questo solo espediente, un altro ne additeremo sicurissimo. Si stucchino due arginelli di discreta mole, l' uno di sopra, l' altro di sotto del castello, i quali vengano ad abbracciarlo, e tendano ad unirsi in un punto, ove collo scandaglio siasi riconosciuta la campagna più alta, che non è in altra parte circonvicina. La (*tav.* 2. *fig.* 10.) ne mostra la disposizione, e la condotta. E come è una operazione questa, che richiede brevissimo tempo, mentre contemporaneamente si procede dall' uno, e dall' altro ramo MP, NQ, e si avanza, spalleggiando verso il fiume il terreno, che si conduce con volparoni fatti di rami di salce in luogo d' erba sala, con gabbioni, sacchi di terra, ed altri materiali pesanti, così va ella commisurata colle altre in modo, che terminata la fitta de' pali nel castello, siano ad un tempo i due capi P, Q ridotti alla distanza tra di se di pochi piedi, sicchè possano distendersi sul vano QP alcune grosse travi, che a guisa di ponte diano comunicazione ai rami. Sull' uno e sull' altro di questi si tengano materiali, come s' è detto per la stretta (§. VI.) Primieramente questa operazione sicura, e spedita fa l' effetto mirabile di tener in collo, e ringorgata nella vasca MNPQ l' acqua, e di torle la forza di escavare le palafitte del castello nell' atto non meno dell' operare, che nel dar la stretta. In oltre incamminata che sia la stretta al castello, se mai succeda qualche improvviso accidente, che la metta in dubbio, ad un tratto si dà la stretta al vano PQ.

VIII. Un passaggio non preveduto, che si fe l' Adige una notte verso la testa inferiore del castello, nella rotta più grande di Lusia, per cui s' era fatta strada l' acqua sotto le punte de' pali pel tratto di quattordici piedi m' obbligò a pensare, e a far uso della terza palafitta a fior d' acqua, che ho detto, e anche di questo secondo artifizio; sicchè in pochi dì con una profondità viva ove di ventotto piedi, ove di trenta, s' è chiusa felicemente la rotta.

IX. Prima di abbandonare questo suggetto, siami lecito di esporre altra idea ancora di prendere una gran rotta, ove il corso sia violentissimo, e malagevole in conseguenza la fitta de' pali. Se le rotte, onde ho fatto parola, fossero accadute in quelle parti, ove l' Adige corre in ghiaia, che non erano, e dove l' impeto della corrente è assai grande, com' è noto a chi conosce l' indole di questo gran fiume d' Italia, n' avrei certamente fatto uso, non senza sicurezza d' ottimo riuscimento. La (*fig.* 11. *tav.* 2.) metterà più del discorso in chiaro la cosa.

Sia per tanto AB la bocca della rotta. Con gabbioni, sacchi, volparoni, fascine, ed altro simile materiale si preperi nel mezzo della rotta, o più propriamente nel sito del maggiore spirito della rotta, un recinto CDEF di venti o più pertiche di fronte; secondo l' estensione della rotta; rilevato sopra il pelo dell' acqua, ove portando terra per ogni parte con barche o per ponti sopra barche costrutti, venga a riempiersi lo spazio CDEF, e formarsi di lui isoletta nel cuor della rotta, che in due divida il corpo dell' acqua uscente per la bocca AB. Se l' estensione lo comportasse, potrebbe la bocca nello stesso modo partirsi in tre o più diramazioni per mezzo di più d' una isoletta. L' operazione è facile, non essendo l' acque per altra parte violentate, e ritrovandosi in libertà di trarsi alla destra e sinistra parte, ove non se le oppongono ostacoli. Fatto questo; s' intraprendano i lavori medesimi contemporaneamente in entrambe le diramazioni, che per una sola bocca si sono prescritti poch' anzi. Essendo ripartita l' acqua, è facile da vedere, che la sua forza è pure divisa. Quindi e a molto maggiori angustie potrebbero ridursi le strette con minore apparecchio, e men contrastate riuscirebbero le operazioni di gran lunga, che non sarebbe, se con tutto il fiume, e contro tutta la sua corrente unita si avesse da lottare. Tutto il rimanente poi, mutata proporzione, come s' è detto di sopra.

E questo è quanto m' occorreva di dire intorno alla chiusura delle rotte, e quanto su la fede delle mie sperienze sull' Adige, e sul Canal-bianco posso veridicamente tramandare su questa importantissima materia.

DESCRIZIONE

D' UNA NUOVA LIVELLA A DOCCIA DI CRISTALLO E CANNOCCHIALE

DI ANTON-MARIO LORGNA.

Qualora non riesca agevole, o sia dalle circostanze interdetta la pratica di commettersi all' acque de' condotti, e fosse campereccie, fatta stagnante, per una livellazione che richiegga esattezza, convien per livellare riposar sulla fede di qualche strumento necessariamente. E nel caso ancora, che s' incontrino tra via stagni e fossi d' acqua ferma, uno strumento è sempre indispensabile, onde legare insieme le livellazioni fatte coll' acqua stagnante, la quale vuol ben dire rarissimo accidente, che per lungo tratto continui, e non sia or in uno, or in altro orizzonte costituita. Ma tante condizioni esige un osservatore, e non senza ragione, in ordine a se, e per rispetto alla sicurezza dell' operare, che forse desideriamo ancora, e non so se potrà così facilmente rinvenirsi, uno strumento da livellare, che a tutte le istanze sodisfaccia pienamente. L' occasione d' una lunghissima livellazione m' ha convinto della necessità d' una livella esatta, e di facile struttura e maneggio; e l' occasione stessa m' ha indotto a pensare, e immaginare in seguito questa, cui sto per descrivere. Chi s' è procacciata l' orizzontale, da prolungare colla vista, sopra una retta perpendicolare alla direzione di un grave reso penzolo; chi sulla superficie di colonne equilibrate tra di se di un qualche liquore; e chi le ha combinate insieme entrambe in un medesimo Strumento, una quasi a rettificazione dell' altra. Quindi le livelle diverse che si veggono descritte in tanti Autori. Ma non havvi poi chi non convenga, che a tutte le livellazioni quella si debba preferire, che può praticarsi coll' acqua stagnante di laghi, fossi, o simili ricettacoli d' acque scolate. Parvemi dunque di poter conchiudere, col consenso di tutti, doversi più che d' altro far uso dell' orizzontale de' liquori in quiete, subita, facile, e indipendete dalla mano dell' artefice. E che non essendo sempre all' occorrenza pronte l' acque stagnanti delle campagne, si avrebbe potuto, emulando quasi le fosse campestri, con un picciolo canale o doccia artifiziale con entro

un liquore, di cui la superfizie fosse distesa e continua, dalle dimensioni in fuori, ottenere una fossa portatile, e sicura al pari della camperecccia. Viddi poi che questo pensiero non era venuto in mente a me solo. Se n' ha un saggio in *Vitruvio* tra gli antichi, in *Mariotte* tra i moderni. La mia livella per altro è assai diversa, ancorchè fondata sui medesimi principj; e se ne può fare il confronto. Decidano poi gl' intendenti qual di tutte meriti la preferenza. Il signor *Selva* ottico Veneto con somma diligenza ne ha fabbricate diverse. Sembra che al fatto e all' esperienza regga l' ordigno mirabilmente, e risponda all' intenzione.

I. ABC (*tav.* 3. *fig.* 1.) è una doccia cilindrica di cristallo chiaro e senza bolle, lunga venti pollici Veneti, e d' intorno a quindici linee d' interno diametro, chiusa nell' estremità B, C, e con una sola apertura in A a guisa d' imbuto, per cui possa infondersi un liquore nella doccia.

BDE (*tav.* 3. *fig.* 2.) è una guscia, o un mezzo-cilindro cavo di metallo, in cui può esattamente incassarsi la doccia di cristallo pel capo D ammovibile, e annesso per viti alla guscia, essendo fermo stabilmente l' altro capo E.

HFG (*fig.* 3. *tav.* 3.) è una piastra di metallo vista in pianta, alla quale va annesso con viti il pezzo K incavato che la sostenta. Questa piastra vista di prospetto è la DGE (*tav.* 3. *fig.* 4.), la quale porta in D una nocella, in E una vite EI a spire sottilissime e frequenti. Colla nocella si unisce alla cassa BDE (*tav.* 3. *fig.* 2.) in D́, e con la vite in É.

SLTTL (*tav.* 3. *fig.* 5.) rappresenta l' intera livella montata sul treppiede, in cui vedesi l' uffizio del pezzo K, il quale riceve nella sua cavità un pezzo di metallo, che sorge dalla piastra TT, che forma ed unisce la testa del treppiede; il qual pezzo K viene assicurato, quando occorre, al treppiede per mezzo di una vite, che sta di sotto della piastra. Con la vite IE s' alza ed abbassa la livella per piccoli intervalli; purchè siano le spire frequentissime e delicate, essendo libero in D il movimento.

ORTS (*tav.* 3. *fig.* 6.) dimostra la livella della (*tav.* 3. *fig.* 5.) vista di fronte con altre parti, che vi vanno aggiunte. R, T sono due tubetti di metallo annessi stabilmente e uniti ai due capi della livella in M, N. Nel primo R sta nicchiata la lente oggettiva; nel secondo T l' oculare co' fili incrocicchiati vicino al foco. Al capo T si applica l' occhio ad un forellino: e senza cannone che congiunga i due tubi estremi si traguarda, essendo le lenti messe siccome a compiuto e chiuso cannocchiale converrebbero.

Il tubo in R è annesso alla testa della livella non ammovibile e

fissa. L' altro coll' oculare è attaccato alla guscia; essendo la testa S, corrispondente alla D (*tav.* 3. *fig.* 2.), quella che può rimuoversi liberamente per estrarre e pulire il cristallo quando occorre.

L' orlo *b d* della guscia (*tav.* 3. *fig.* 5.) di metallo è tirato ed appianato esattamente, sicchè tutti i suoi punti siano in un medesimo piano per tutta la lunghezza *b d*. L' asse del cannocchiale è messo in un piano parallelo al piano dell' orlo *b d*. Nell' appianamento di quest' orlo, e nella collocazione dell' asse consiste la cura maggiore che aver dee l' artefice nella fabbrica di questa macchinetta, dalle quali operazioni dipende essenzialmente la squisitezza dello strumento.

II. E quanto all' uso; s' intenda infusa acqua tinta di carmino per l' imbuto S (*tav.* 3. *fig.* 5.) nella doccia di cristallo in tanta quantità, quanto è sufficiente per pareggiare o sopravvanzare di poco l' orlo *b d*. Si otturi con sovero e pece, se si vuole, la bocca S, riparando il liquore dall' agitazione del vento, dalla pioggia, e dall' aria medesima placidissima, che potrebbe incresparne la superficie. Con la vite I s' alzi o s' abbassi pian piano il cannone, sinchè il liquore rada egualmente per tutta la lunghezza del cristallo l' orlo *b d*. Assicurato l' osservatore essere l' orlo medesimo o nello stesso piano, o in un piano parallelo alla superficie del liquore stagnante, traguardi pel cannocchiale lo scopo. È certo dalla costruzione, che la linea per cui l' osservatore traguarda, sarà quanto può esserlo il liquore medesimo in perfetta positura orizzontale. E siccome egli ha sotto gli occhi una superficie continua d' acqua stagnante di un piede e mezzo di lunghezza, in cui ha campo di riconoscere l' andamento del pelo relativamente all' orlo *b d*, così è ben difficile che non s' accorga prontamente d' ogni divario. E perchè nel rivoltare che si fa dello strumento in ogni battuta, fermo nel mezzo tra i due termini il treppiede, potrebbe accadere che l' asse del cannocchiale passasse in altro piano orizzontale, che non conviene: sul cannone di cristallo sono segnate nelle estremità alcune lineette parallele tra di se e all' orlo della guscia, affinchè possa ridursi la superfizie del liquore nello stesso piano orizzontale di prima.

E questa è la fabbrica, e l' uso della nuova livella, che m' era proposto di descrivere in questa memoria.

DELLA

RELAZIONE NE' FIUMI

TRA IL RESTRIGNIMENTO DELLE SEZIONI

E

L' INTRODUZIONE DI NUOVE ACQUE

DI ANTON-MARIO LORGNA.

Alcune osservazioni possono sembrare a prima vista sterili e di niuna conseguenza, che col tempo divengono feracissime. Ciò potrebbe confermarsi con esempli tratti dalla fisica non meno che dalle più sublimi parti della geometria. Come d' una sementa accade, la quale giace infruttifera sinchè a promoverne lo sviluppo non concorrono le forze esterne necessarie, così è delle osservazioni da principio solitarie e neglette, le quali poi con altre relative o dipendenti collegate promovono una scienza, e formano bene spesso il fondamento di nuove dottrine.

Una pertanto vo' esporne, fatta due anni fa, che potrebbe non essere del tutto inutile, se fosse coltivata, qualor si tratti d' unione d' acque, che non è forse la parte più chiara ed intesa dell' idrometria.

OSSERVAZIONE.

I. L' acqua d' un canale AB (*tav. 3. fig. 7.*) arrivata ad un parti-acqua B dividevasi in due egualmente ne' rami BC, BD. L' imboccatura del ramo BC era armata di chiaviche, perchè talvolta tutta l' acqua avea da scaricarsi pel solo BD: e l' altra BH avea un regolatore di pietra semplicemente. Così per patto. Scorrea dunque l' acqua per BD liberamente, ma dopo un buon mezzo miglio dividevasi di nuovo disegualmente in due parti, che discorrevano ne' canaletti DE, DF. La circostanza di questa ripartigione m' invogliò a fare l' esperienza seguente.

Feci chiudere la bocca BG del ramo BC, sì che tutta l' acqua tragittavasi pel ramo BD uscendo e divertendosi ne' canali minori DE, DF. Segnai sul parti-acqua D, ch' era di pietra, l' altezza dell' acqua,

dopo però di aver lasciato passare una grossa ora, perchè l' acque non dessero più indizio di crescere, e si mettessero in istato permanente. Dopo di questo feci riaprire l' imboccatura BG, attendendo che di bel nuovo si rimettessero l' acque nello stato di prima. Correndo pertanto l' acqua divisa come da principio per BC, BD, ristrinsi con travicelli assettati nel fondo e alle sponde, a guisa di regolatore, la bocca DI in modo che riuscisse la sua larghezza ugnale alla metà della larghezza di tutte due insieme le imboccature DK, DI quanto più esattamente poteva ottenersi. Otturai poscia con fascine e terra la bocca DK, avendo prima messi alcuni segni lungo la ripa del canale BD, onde accertarmi, che il rincollo indotto da cotale ristrignimento non si rendesse sensibile sino all' imboccatura BH; e attesi che le acque si componessero in permanenza di stato. Assicuratomi dunque, che il ringorgo non giungeva sensibilmente all' insu, che a poche pertiche di distanza dall' imboccatura DI, andai a riconoscere quant' era l' alzamento insorto al parti-acqua D. Mi sorprese non poco il vedere, che per quanto potea l' occhio discernere, il pelo dell' acqua toccava il segno precisamente, cui era dessa giunta allorchè tutto il canale AB era stato costretto, chiuso BC, a scaricarsi per le due bocche insieme DI, DK, cioè per una larghezza doppia della larghezza attuale. E vi ristette sinchè feci ridurre le distribuzioni allo stato di prima. Questa è l' osservazione fatta.

II. Certo è intanto che le due bocche in D doveano insieme scaricare effettivamente un corpo d' acqua doppio dell' ordinario nel primo caso; come dovea pure scaricare la sola destra DI nel secondo; che messe le bocche DK, DI insieme in pari circostanze della sola bocca DI, quanto al corpo d' acqua da scaricare, l' acqua poggiò di fatto nell' uno e nell' altro caso alla stessa altezza sensibilmente, e che per conseguenza non avrebbe errato, chi trattandosi di conoscere qual alzamento avrebbe prodotto in D tutta l' acqua del canale AB trasmessa per le bocche DK, DI insieme, avesse proposto di chiudere una delle due bocche, come DK, non toccando il canale BC, e di costrignere la metà dell' acqua del canale AB a tragittarsi tutta per la sola bocca DI, ridotta alla metà della larghezza delle due insieme prese, asserendo che l' altezza insorta in D sarebbe stata sensibilmente l' altezza ricercata. La cosa merita qualche considerazione per parte degli Idrometri. Imperciocchè se mai la relazione, che sembra passare tra il ristrignimento d' un fiume, e l' introduzione nello stesso fiume d' un nuovo corpo d' acqua, avesse limiti così stretti, che senza errore gravissimo si potessero dalle sperienze fatte sullo ristrignimento delle sezioni d' un dato fiume, sperienze non estremamente difficili da farsi, dedurre argomenti non irragionevoli per determinare gli effetti d' un' introduzione d' acque nuove nello

stesso fiume, sperimento all' opposito che forse non può in grande farsi giammai, qual vantaggio non si ritrarrebbe dal poter indagare e riconoscere un magistero, un' operazione della natura più complicata e recondita dai fenomeni d' una più semplice incomparabilmente?

III. In effetto, ristrignendo la sezione di un' acqua corrente, i fenomeni che ne risultano son questi.

1. Che l' acqua s' alza di pelo più e più secondo che il ristrignimento è maggiore.

2. Che se il fondo è invincibile, l' acqua si compone nella sezione ristretta a maggior altezza, che non avea da prima; ma non si rifà poi della diminuzione con altrettanto guadagno in altezza, essendo d' ordinario questo alzamento tenue in confronto della perdita fatta in larghezza.

3. Che il compenso è riposto nella velocità acquistata molto maggiore di prima; sì che tra il piccolo aumento di altezza, e il grande di celerità, si pareggiano le partite, e passa l' acqua velocemente per la sezione minore nello stesso tempo, che passava men veloce per la sezione maggiore.

IV. Che se il fondo sia ammovibile, l' acqua nella sezione ristretta ne corrode una parte e acquista profondità, sicchè per rispetto ad una orizzontale fissa parrà talvolta, dopo stabilite e rassettate di corso le acque, che il fiume non siasi sensibilmente alzato di pelo, quando l' altezza viva è realmente cresciuta in un con la velocità conseguente, e l' operazione è fatta per escavamento di fondo.

Ora si paragonino questi fenomeni colle apparenze de' fiumi, allorchè vengono arricchiti di nuove acque, e si vedrà, che almeno in genere tuttociò che accade nella sezione ristretta di un fiume, accaderebbe similmente nella sezione naturale aumentandola di nuove acque. Ne' vasi intanto non è discorde la teoria dall' osservazione del §. I. potendosi facilmente dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA.

IV. Se una data quantità d' acqua, somministrata da un getto perenne, esca prima da un foro K scavato nel fondo d' una conserva AD (*tav.* 3. *fig.* 8.), in cui mantenga ella l' altezza che le compete DF; ed esca poi pel foro G d' altra sottoposta conserva LI, essendo la sezione del foro K m volte maggiore della sezione G, e vi faccia l' altezza IN, dico, che l' altezza IN, è la velocità con cui uscirà l' acqua dal foro G, sarà eguale, ciascuna a ciascuna, all' altezza DP, e alla velocità che avrebbe in K una quantità d' acqua n volte maggiore di prima, la quale avesse da uscire pel foro K della conserva AD.

Imperciocchè chiamata Q la data quantità d'acqua, F la sezione del foro K, f quella del foro G, A l'altezza DF, X l'altezza IN, e generalmente $A^{1:m}$ la velocità pel foro K, $X^{1:m}$ quella pel foro G: essendo la quantità d'acqua uscente pe' fori K, G la medesima, sarà manifestamente $Q = FA^{1:m} = fX^{1:m}$. Ma $F = nf$ per supposizione, dunque $nA^{1:m} = X^{1:m}$, e facendo escire pel foro K una quantità d'acqua n volte maggiore di Q, sia Y l'altezza DP a cui si dovrebbe ella comporre, e $Y^{1:m}$ la sua velocità al foro K. Sarà del pari $nQ = FY^{1:m}$; ma $Q = FA^{1:m}$, e però $nQ = nFA^{1:m}$. Dunque $Y^{1:m} = nA^{1:m}$. E si è ritrovato $nA^{1:m} = X^{1:m}$; in conseguenza $Y^{1:m} = X^{1:m}$, e $Y = X$. Il che ec.

V. Ma quanto a' fiumi la teoria rigorosamente non altro ci somministra, che il teorema seguente; non potendosi nell'acque correnti assumere le velocità in alcuna determinata ragione delle altezze, come può legittimamente farsi ne' vasi, sulla fede di tante e tante volte replicate sperienze.

TEOREMA.

Se un fiume in istato permanente venga ristretto nella larghezza di qualche sua sezione, oppure cresca per l'unione d'altro fiume; e qual ragione ha la larghezza della sezione intera alla larghezza della sezione ristretta, tal ragione abbia tutto il fiume cresciuto al fiume di prima: sarà la velocità nella sezione ristretta, scaricando il fiume di prima, alla velocità nella sezione intera, scaricando il fiume cresciuto, reciprocamente come l'altezza che farà nella ristretta il fiume di prima all'altezza che farà nell'intera il fiume cresciuto.

Sia A l'altezza della sezione intera; L la sua larghezza; V la mezzana velocità: ed A′ l'altezza della sezione ristretta; L′ la sua larghezza, e V′ la mezzana velocità. Sia poi Q la quantità dell'acqua che scarica in un dato tempo il fiume per ogni sezione; sarà $ALV = Q$. Ma la quantità dell'acqua è la medesima prima e dopo del ristringimento; dunque sarà parimenti $A'L'V' = Q = ALV$. Posta per tanto $L : L' = n : 1$, sarà $L' = L : n$, e però $A'V' = nAV$. Di nuovo sia A″ l'altezza della sezione dopo l'accrescimento del nuovo fiume, L″ la larghezza, V″ la mezzana velocità, Q″ la quantità totale dell'acqua; sarà $A''L''V'' = Q$; ed è poi per ipotesi $L : L' :: Q'' : Q$, cioè $Q'' : Q :: n : 1$; in conseguenza $Q'' = nQ = A''L''V'' = nALV$. Ma $L'' = L$. Dunque $A''V'' = nAV$. E si è dimostrato superiormente $A'V' = nAV$. Sarà dunque $A''V'' = A'V'$, e $V' : V'' :: A'' : A'$. Il che ec.

VI. Che se le velocità potessero estimarsi secondo qualche ragione delle altezze, si potrebbe, come nelle conserve, dimostrare, che

se il fiume venisse ristretto alla metà, al terzo ec. della larghezza primiera, seguirebbe nella sezione ristretta la stessa altezza, e la stessa velocità, che si avrebbe, se per la sezione intera si facesse passare un fiume doppio, triplo ec. del fiume di prima.

VII. Queste sono le considerazioni nate dall'occasione di quell'esperimento che accennai da principio, che ho creduto utile di distendere in carta su questo suggetto. Se mi si offeriranno incontri di replicare con accuratezza e di proposito; più che non potea fare in quello; le sperienze, e le osservazioni intorno al ristringimento delle sezioni di qualche piccolo fiume, e sull'immissione nello stesso fiume di nuove acque, non lascierò di profittarne certamente. Sarebbe oltre modo importante, che si riconoscesse l'estensione di questa relazione, l'influenza che potrebbero avervi le diverse circostanze, e i limiti dell'uso che se ne potrebbe fare nell'idrometria.

DEL RIPARO ISTANTANEO

DALLE CORROSIONI DE' FIUMI

DI

ANTON-MARIO LORGNA.

Non di rado intraviene ne' fiumi grandi arginati, che nel tempo d'una piena insorga così subita e potente corrosione al piè d'un argine, la quale scalza ogni riparo, intacca furiosamente il corpo dell' argine, fa crollare e dirupar la terra, e mette una situazione in pericolo gravissimo. E vuol ben dire fortuna, che sempre vi s' incontrino al riparo uomini esperti, e i materiali occorrenti al bisogno. D' ordinario sul Po, sull' Adige, e su molti altri fiumi s' ingrossa l' argine alla campagna a furia, e si rincalza, rimettendo alle spalle ciò che si va perdendo di fronte. Ma forse potrebbe esser questa una causa non ultima di tante lunate, sinuosità, svolte acutissime e risentite che si riscontrano ne' nostri fiumi incassati per arginamento. Talora se l' intacco non ha estensione, e sia sul principio, sogliono con materie pesanti gettate al fondo rallentare il progresso della corrosione; ma se il fondo è grande, e ricresca tuttavia la piena o persista, non s' ottiene sì prontamente l' intento, che non abbia prima il fiume ridotta a poco la mole dell' argine, e bene spesso abbandonando i direttori l' opera per disperazione di arrestare la corrosione accadono le rotte. Così per esperienza fatale in entrambe le rotte di Lusia nell' Adige, delle quali s' è parlato nella IV. Memoria.

Costumano ancora taluni nell' Adige di riparare ad un' instantanea corrosione con palificate. Ma l' occasione di praticare somigliante difesa non è poi questa; quand' anche cotal natura di riparo non avesse altronde difetti tali, onde proscriverla da fiumi grandi intieramente, anche a titolo di preservazione degli argini. La fitta in un fondo corroso e scompaginato non fa che smuovere e disporre sempre più il terreno circostante a cedere alla violenza dell' acqua, e ai moti vorticosi, che v' induce per giunta l' obice verticale, che se le oppone.

Riflettendo a tutto questo in atto di devermi appigliare a qualche ripiego necessariamente, ch' è ben diversa circostanza dal rifletterví fuor d' occasione, riconobbi che facea d' uopo combinare molti.

effetti con un espediente solo, efficace, e di semplice apparecchio. Altrimenti o la mancanza de' materiali, o la tardità e complicatezza delle operazioni, o tutto insieme potevano render lunga, difficile, e vana ancora l'intrapresa. Dopo varii tentativi uno semplicissimo me ne riuscì così felicemente in varie occasioni, che penso di farne conserva, e descriverne l'artifizio e l'uso. Egli è sì rimoto e non così facile a cadere in mente, che merita un luogo tra queste Memorie. Scandagliato primieramente il fondo da riparare istantaneamente, si leghi al capo d'una lunga corda un sacco pieno di terra o più d'uno, se la violenza dell'acqua lo richiedesse. Si prenda di questa corda tanto tratto, quant'è l'intervallo dal fondo del fiume alla sommità dell'argine con qualche braccio di più. Si avvolgano tutto intorno alla corda, cominciando al sacco, grossi manipoli di fascine verdi o secche in modo che la testa d'una raggiunga la coda dell'altra, e con buoni sprochi o cordicelle minori si leghino le giunture fortemente, e le fascine di tratto in tratto; e la corda cammini sempre, quasi midollo, per tutta la lunghezza dell'involto, il quale vuol essere almeno uguale alla profondità scandagliata del fiume sino a fior d'acqua. La maggiore o minor forza del fiume nel sito corroso sia norma pel diametro maggiore o minore da darsi al fascio. Ma non le fascine solamente, li tralci di vite, li rami di qualunque albero recisi sul fatto, i fusticelli di sorgo, le canne palustri, l'erba sala, la paglia lunga, e somiglianti materie, tutto può venire a sesta, secondo le circostanze e il bisogno, e adoperarsi utilmente per formare o ingrossare la stipa d'intorno alla corda. La *tav.* 3. *fig.* 9. dà un' idea di questo semplicissimo apparecchio. Se ne formi per tanto buon numero, e cominciando al capo superiore della rosa, si vada dall'argine abbandonando all'acqua il sacco, e ritenendo a se l'involto, che dovrà calarsi a poco a poco accompagnando l'avanzamento del sacco. Tosto poi che questo trovi il fermo, e vi si alletti, si applichi quello alla sponda, e il capo superiore della corda si leghi ad un paletto fitto sull'argine. Se dall'inchinarsi del paletto, e dal tendersi, che fa la corda si comprenda che il sacco vuol discendere, si svolga la corda, e di nuovo, fermo che sia il sacco, la si leghi al paletto. Se ne disponga in seguito contiguamente l'uno all'altro quel numero che basta a cuoprire l'argine dalla corrosione, e se ne sopra ponga un altr'ordine, se mai l'impeto fosse grande. Cessata la piena, si può agevolmente ricuperare il sacco, la corda, e tutto il materiale, onde sostituire al provigionale ed istantaneo un riparo permanente. Il sacco col suo peso fa le funzioni d'Ancora, e di mano in mano che l'energia dell'acqua gli va cavando di sotto il terreno, segue quello a profondarsi sinchè detta energia sia dalla resistenza superata. Il disporsi che fanno quest' involti

in iscarpa, e il cedere delle fascine all'urto dell'acqua, le toglie la forza. Sull'effetto del legname sottile, e della scarpa da conferirsi ad ogni sorta di riparo su i fiumi molto acconciamente parla nel suo Discorso sull'Arno il *Viviani*. E il celebre ab. *Frisi* nel suo libro de' fiumi commenda a ragione le fascinate dell'Olanda, ch' io pure sotto diverse forme, ma sempre di arbusti, e tralci di salcio o di vite, sono andato da qualche anno propagando, specialmente ne' grandi ripari fatti sull'Adige, ove corre in arena.

E tanto è il freno, e il rintuzzamento dell'acque, che fanno cotai materie, che non ho potuto allontanarmene neppur per gl'improvisi bisogni d'una rosa da fermare sul momento, e a grandi profondità, di che ho avuto esperienze utili in diverse occasioni.

DISSERTAZIONE

SOPRA IL QUESITO

Quali vantaggi o danni, e in quale stato d'acqua produca nel sistema generale d'un fiume la moltiplicità de' suoi sbocchi nel mare. Con quali principj se ne debba fissar il numero, e la direzione; e con quali pratiche stabilirne la sussistenza massimamente per le acque scarse, e per l'opposizione de' venti

PRESENTATA AL CONCORSO DEL MDCCXCIII.

DAL SIGNOR ABATE PIETRO ZULIANI

CORONATA

DALLA REALE ACCADEMIA DI SCIENZE, E BELLE LETTERE DI MANTOVA.

INTRODUZIONE.

I. La Reale Accademia colla pubblicazione di questo problema nell' atto che invita per la seconda volta ed eccita gl' ingegni coltivatori della materia delle acque a promuovere maggiormente e perfezionare la cotanto utile e necessaria scienza del governo de' fiumi, assicura colla sua autorità o mette fuori di controversia, che la qualità degli sbocchi de' fiumi in mare influisce nel sistema generale de' medesimi, e che ogni fiume di corso continuato e rassettato si deve risguardare come un tutto, le cui parti sono tra loro in corrispondenza ed hanno un certo rapporto, in vigor del quale le une traggono vantaggio o sconcerti dalle altre, e dalla buona, o cattiva costituzione delle medesime, e massimamente di quella che forma la foce, risulta generalmente lo stato più o meno felice di tutto il fiume.. L' approvazione, che la R. Accademia dimostra col suo problema per questo principio ammesso già dai nostri Italiani e riconosciuto coerente alla ragione ed ai fatti, è opportunissimo per reprimere gli attentati di una opinione contraria favorita da un moderno chiarissimo.

Francese (1); il di cui studio principale nel discorso preliminare alla sua opera, e nell' opera stessa dove tratta la materia de' fiumi, comparisce diretto ad oscurar il merito degli Idraulici Italiani, ed a combatter e screditare le più sicure e le più utili regole de' fiumi insegnate dal Guglielmini (2).

Benchè a dir vero le dottrine, che comprende la scienza de' fiumi insegnata e trattata dai più celebri Idraulici Italiani, presso i quali si può dire nata e cresciuta, essendo per la massima parte approvate dal comun consenso de' più rinomati Fisici e Matematici anche delle altre colte Nazioni, e confermate ormai dalle molte sperienze di un secolo, non ponno temere il confronto di *Nuovi principj d' Idraulica* nè le opposizioni, che in grande numero in questa opera recente vi si contengono.

Io coll' aiuto e guida dei lumi, che appunto dagli illustri e benemeriti Autori Italiani singolarmente vengono somministrati nella materia dei fiumi, e col sussidio ancora di quelle cognizioni, che lo studio, ed un qualche esercizio ed impiego in questa stessa materia mi fece acquistare, imprendo a versare sopra il proposto argomento degli sbocchi, sentendomi dall' eccitamento replicatamente prodotto dalla R. Accademia come risvegliato e messo in azione il genio di conoscere le leggi de' fiumi, i principj de' loro sconcerti e danni, ed i metodi di prevenirli o ripararli: materia questa di massima importanza pel pubblico e privato interesse.

Prometto, che io in questo trattato suppongo ciocchè più generalmente succede in natura, vale a dire, che li fiumi portino torbide, e che il loro letto sia composto di parti ammovibili dalla forza dell' acqua; e considero il sistema d' un fiume dalla foce ascendendo verso l' origine sino al punto della sua linea dove principia ad avere il corso rassettato e stabile, che è dove propriamente riceve il nome di fiume perduta la natura di torrente qua e là vagante. E per procedere con tutta la chiarezza d' un buon metodo, io contemplo nel presente quesito come quattro punti di ricerca, e però in altrettanti capitoli divido la mia memoria.

(1) M. Bernard Nouveaux principes d' Hydraulique ec. cap. 3. sez. IV. n. 260 e sez. XVII. n. 359. e seg.

(2) Nel discorso storico e critico, e in più luoghi del cap. 3. della cit. opera,

CAPITOLO PRIMO.

Quali vantaggi o danni, e in quale stato d'acqua produca nel sistema generale d'un fiume la moltiplicità de' suoi sbocchi nel mare.

DEI DANNI.

II. Nell' esame della prima parte del problema che risguarda li vantaggi o danni, che la moltiplicità degli sbocchi può produrre nel sistema generale d'un fiume, il primo pensiere che mi si presenta alla mente è, che ai fiumi in genere sia di danno l'avere molti sbocchi. È cosa certa, che le acque d'un fiume venendo disunite colla moltiplicità degli sbocchi devono avere una forza minore per vincere la resistenza, che loro fa l'acqua del mare per penetrarvi dentro; perciò patiranno alla foce un maggior impedimento e ritardo di quello che fossero per incontrare, se tutte raccolte insieme sboccassero per una foce sola. E perchè le acque de' fiumi si alzano di pelo a proporzione che dagli ostacoli vengono rallentate e tenute in collo, si vede che la moltiplicità degli sbocchi tende a cagionare un effetto dannoso ne' fiumi, qual è il rallentamento del corso, e quindi l'innalzamento del loro pelo. È però vero che la natura suol mettere riparo a questo tale sconcerto; essendocchè li fiumi per l'impedimento, che trovano a insinuarsi nel mare, si allargano, o si approfondano, o si allargono e insieme si approfondano fino a tanto che l'ampiezza della loro sezione allo sbocco supplisca al difetto della velocità; e lo stesso succede a proporzione nelle altre sezioni superiori alla foce, che risentono il rigurgito del mare; dovendosi scaricare nello stesso tempo per le sezioni ritardate, e entrar nel mare sotto il suo pelo tant'acqua quanta ne discende pei tratti superiori dell'alveo, dove non giunge a farsi sentire l'opposizion del mare.

Ma comunque per tale mezzo si metta riparo al rialzamento del pelo del fiume dipendente da un certo grado di resistenza che trova l'acqua del fiume a penetrar per entro quella del mare, e si preservi fra certi limiti l'aumento di altezza che si genera nel fiume pel flusso del mare; non si rimedia però similmente a quel ritardo di corso e rialzamento di pelo, che nasce dai rigurgiti straordinarj, e che sembra dover riuscire tanto più sensibile, in parità di altre circostanze, quanto il fiume è dotato di minor impeto per superare li contrasti, che fa il mare al suo scarico.

III. Ma un disordine e danno più manifesto e sicuro, e insieme più grande è quello dell' interrimento e alzamento di fondo, a cui

la foce del fiume si renda più soggetta, quando il fiume passa in mare diviso in molti shocchi, che quando vi entra tutto unito per uno sbocco solo. Imperciocchè sussistendo il principio, che l'acqua d'un fiume divisa ha minor forza che tutta unita in un sol corpo per superare la resistenza, che incontra entrando in mare, ne deve succedere non solo, che l'area di tutte insieme le sezioni di molti shocchi d'un fiume nel mare, sia più ampia ed estesa di quella, che avrebbe lo stesso fiume sboccando per una foce sola; ma che inoltre quella grande ampiezza dei molti sbocchi nasca con una vera perdita di profondità, derivando da un grande aumento di larghezza; a talchè il fiume diviso in molti sbocchi abbia sempre, in pari altre circostanze, la foce meno scavata e profonda sotto il pelo del mare, di quello che l'avrebbe ridotto che fosse ad un solo sbocco. E la ragione è chiara da se, perchè quanto l'acqua è più impedita e ritardata nel suo corso, tanto più si trova impoverita di forze per iscavare il fondo, ed anche per portare avanti le proprie sue torbide. Così vediamo, che le acque di più fiumi, qualora concorrono e si uniscono in un alveo solo, hanno minor larghezza, e minor altezza di pelo che prima; perchè appunto raccolte ed unite soffrono minor resistenza, corrono più celeri, ed hanno maggior forza per escavare i fondi, e per tener sospese e portar avanti le torbide.

IV. Nè solo la moltiplicità degli sbocchi d'un fiume nel mare è cagione d'un maggior interrimento ed inalzamento della sua foce, perchè gli scema la forza di escavare, ed anche di portar avanti in mare le materie incorporate colle sue acque, che anzi per contrario gliele fa deporre; ma deve di più la stessa moltiplicità degli sbocchi dare adito, che la foce s'interrisca e si alzi più facilmente di fondo anche per le sabbie stesse del mare. Imperciocchè il mare nelle tempeste smuove e solleva le sabbie de' suoi fondi dove specialmente sono meno bassi; e queste sabbie incorporate colle stesse acque del mare burrascoso, o spinte avanti dalle loro onde per l'impeto de' venti, sono trasportate verso i lidi, e quindi verso gli shocchi de' fiumi, presso ed entro ai quali ne vengono pur anche tradotte perpetuamente dal perenne moto radente del mare. Se le acque d'un fiume al suo ingresso in mare si trovino unite, allora sboccando esse con maggior forza nel mare respingono le di lui sabbie, ed anche radono gli scanni formati da altre già deposte ed accumulate: ma se vi shocchino divise, in questo caso per la diminuita loro forza non sono più atte come prima a sospignere le sabbie, ed a sgombrare gl' interrimenti prodotti dalle burrasche del mare. E però ne deve succedere, che il fiume non solo per conto delle proprie torbide, ma anche per le sabbie del mare debba in vigore della moltiplicità degli

sbocchi soggiacere ad una foce meno sgombra e profonda di quella che avrebbe scaricandosi nel mare per una sola bocca.

V. Vano sarebbe l' attendere che quest' effetto venisse tolto od impedito dall' azione del flusso e riflusso del mare, quand' anche dalle maree possa risentir beneficio la foce de' fiumi, e, sia cosa certa che molto ne risente il loro ultimo tronco, purchè essi fiumi possano tenersi aperto lo sbocco nella spiaggia; comunque di contrario parere sia stato un illustre Autore (1). Osservò il Guglielmini, che li fiumi di poca acqua s' interriscono e si alzano il loro letto anche nell' ultimo tratto d' alveo dove può giugnere il flusso e riflusso del mare, sebbene dal sito dove si risentono gli alzamenti delle maree in giù, resti il fondo un po più scavato che al di sopra, e si mantenga con minore pendenza (2). Segno questo, che l' abbassamento di fondo, e la concavità che si dà a vedere nell' ultimo tronco inferiore degli alvei de' fiumi sino presso la foce, dove torna a rialzarsi il letto divenendo acclive, è un effetto che nasce e dipende non solo dall' azione del flusso e riflusso del mare, che tenendo in agitazione le acque del fiume contribuisce a mantener sospese le materie incorporate, e facendo il flusso alzar di pelo le stesse acque vi concilia una maggiore rapidità nel riflusso, ma ancora dalla forza sua propria del fiume, le cui acque col proprio peso, e colla velocità ed impeto da cui vengono animate nelle escrescenze e piene del fiume per l' aumento singolarmente di caduta, che allora riceve il pelo del fiume verso l' ultimo tronco, si scavano e si tengono approfondato lo stesso tronco inferiore ed ultimo dell' alveo. Ma se la profondità del letto del fiume superiormente alla foce segue la proporzione della portata dello stesso fiume, benchè vi abbia parte nel produrla e mantenerla il flusso e riflusso del mare, è ragionevole, che anche la profondità stessa della foce, comunque soggetta all' azione delle maree, corrisponda al corpo d' acqua che il fiume per essa mette in mare; e che però rendasi minore colla moltiplicazione degli sbocchi.

VI. Il fiume Brenta, il quale fu portato unitamente al Bacchiglione verso la metà del secolo XVI. a sboccar in mare pel porto di Brondolo, benchè abbiasi protratto non poco il suo cammino, e sia interrito e nello sbocco, e in tutta la linea specialmente da pochi anni in qua, pure cotesto fiume si osserva aver ancora presentemente la sua foce tale, che eccede in profondità un piede ed anche più

(1) Eustachio Zanotti Ragionamento sopra la disposizione dell' alveo de' fiumi ec.

(2) Scrittura 42., e 47. sopra l' introduzion del Reno in Volano. Raccolta d' Autori che trattano del moto dell' acque T. II. di quest' edizione.

quella del grosso fiume Adige, che mette nel mare per porto Fossone poco distante da quello di Brondolo. Ma il fiume Brenta ha sempre continuato a entrare in mare unito per uno sbocco solo; e l' Adige per contrario vi si scarica per più bocche. Il corso di questo fiume viene attualmente attraversato nel suo ingresso nel mare da un vastissimo banco di sabbia, che si estende ben avanti verso l' alto mare. Per entro questo banco il fiume si è scavato tre canali principali, che costituiscono le sue bocche in mare. Quella di mezzo diretta verso levante o piuttosto greco-levante è la meno profonda di tutte fuori del tempo delle piene del fiume; quella dal lato sinistro guarda verso greco-tramontana, e la terza dal lato destro è rivolta a ostro-scirocco; e questa stessa di presente dopo di essere inoltrata alquanto in mare si trova divisa in due, una delle quali, cioè quella più vicina alla spiaggia si va ora disseccando, e l' altra va acquistando profondità. Il banco di sabbia in tutta l' estensione di mezzo alle due bocche laterali è coperto dall' acque anche in magre del fiume, ma a pochissima altezza; e la profondità della foce del canale o sia sbocco a destra, ch' è attualmente il migliore e più scavato e profondo degli altri due, non arriva ad essere che circa piedi due in tre al più sotto il pelo della comune, fuori delle escrescenze e piene del fiume; quando la profondità ragguagliata della foce del fiume Brenta è di circa piedi 4 Veneti sotto la comune.

E se si esamineranno gli sbocchi di que' fiumi che si diramano prima di giugnere in mare, come fa il Po, si troverà, che quello avrà foce più profonda che porterà copia maggiore d' acqua. Quindi siccome è massima ricevuta e comprovata, che l' accrescimento dell' acqua ne' fiumi che sboccano al mare, profonda la loro foce non ostante tutti gl' interramenti laterali, e che giova, ed anzi alcune volte bisogna unire li fiumi per disgombrar ed approfondar lo sbocco al mare (1); così parimente fu conosciuta utile la pratica di restringere e tenere unite alla foce le acque de' fiumi, che formano porto di navigazione in mare, onde mantenere sgombri e profondi gli stessi porti e fiumi per uso della navigazione; come si può vedere presso il Belidoro (2) ed altri Autori. A quest' oggetto mirano non solo le palizzate al porto di Goro, ma anche le operazioni fatte in questi ultimi anni dai Ferraresi sul Po alle Papozze per rivolgere ed unire maggior quantità d' acqua di quel gran fiume nel ramo di Ariano a benefizio della sua foce e porto di Goro, il cui miglioramento si fa non senza discapito del Po delle Fornaci, e della bocca maestra.

(1) Gugl. della nat. de' fiumi cap. 9. prop. 4.
(2) Archit. Idraul. l. 3. cap. 4. e 7.

VII. Una conferma, che succeda ciocchè abbiamo notato della moltiplicità degli sbocchi de' fiumi riguardo alla loro foce, si è il vedere che il simile nasce anche nelle sboccature, o sia nei porti delle lagune formate di sole acque salse, dove non concorre all' interrimento delle foci, che la sola sabbia del mare, e la sola azione delle maree al loro disgombramento. Il celebre proto ingegnere Cristoforo Sabbadini, che visse nel secolo XVI. e lasciò varj suoi scritti, che lo comprovano molto intelligente ed esperto in materie di acque, dimostrò chiaramente con forti ragioni, che il porto di Malamocco delle lagune di Venezia si era reso e si manteneva sgombro e ben profondo, perchè era stato chiuso e tolto alle acque della laguna un altro sbocco in mare situato nel lido di mezzo tra Malamocco e Chioggia (1). Fu anche parere costante fino dall' anno 1549. degli Architetti delle acque di quella Serenissima Repubblica, che per ridonare al porto di S. Niccolò del lido di Venezia una notabile profondità, un mezzo de' più efficaci sarebbe stato quello di chiudere l' altro porto, che in poca distanza gli succede denominato il porto di S. Erasmo (2).

VIII. Provato per tanto, e forse anche più di quello che abbisognava, che la moltiplicità degli sbocchi d' un fiume in mare pregiudica alla sua foce facendola interrire e alzare di fondo, riesce quindi facile il conoscere e mostrare come la stessa moltiplicità degli sbocchi venga ad essere cagione d' un danno di somma importanza in tutto il sistema generale del fiume, qual è il rialzamento del suo letto.

Insegna il gran maestro de' fiumi, ed è dottrina riconosciuta ed ammessa per sicura anche a' giorni nostri dopo tante osservazioni, da un suo non meno emulator illustre che seguace di bel genio, e sommamente benemerito nella scienza pratica ragionata delle acque per le dotte e utili lezioni date alla luce, che *il fondo dello sbocco è la base sulla quale s' appoggia la cadente di qual si sia fiume*; e che però la cadente d' ogni fiume viene diretta dal fondo di sua foce, appoggiandosi le cadenti superiori sopra le inferiori in modo, che siccome la cadente ultima del fiume è regolata dalla bassezza dello sbocco, così il termine di quella, ch' è immediatamente superiore a questa, si regola dall' altezza dell' ultima nel suo principio, e così di mano in mano, col dovuto riguardo al corpo d' acqua del fiume, alla quantità e natura delle torbide, ed alla qualità della

(1) Ab. Cristoforo Tentori. Della legislazione Veneziana sulla preservazione della laguna art. XI.
(2) Lo stesso. Articolo XI. e altrove.

materia componente il fondo dell'alveo. Poichè dunque il fiume colla moltiplicazione degli sbocchi si alza il fondo della sua foce, è necessario, che s'interrisca e si alzi di fondo lungo tutto il suo alveo per formarsi e mantenersi la cadente, che gli compete. È questo un danno reale e notabilissimo nel sistema generale d'un fiume; mentre quanto più i fiumi si alzano di fondo, tanto più facilmente spandono e rompono nelle loro escrescenze, e riesce sempre più difficile da sostenersi la loro inalveazione.

Quest'effetto per altro ha i suoi limiti. Imperciocchè ogni fiume, che abbia tanto di forza da poter da se penetrar entro il mare, si terrà sempre aperto il suo sbocco in qualche sito, od in più siti insieme; e perciò sussisterà dentro certi limiti la profondità della foce, e quindi anche la pendenza del fiume; la quale, giunto che sia una volta il fiume a stabilirsela, si manterrà la stessa a un dipresso senza più crescere o calare; venendo in tal caso a vicenda e scavato, e interrito l'alveo al crescere, e calare delle piene del fiume. E ciò si vuol intendere prescindendo da alterazioni accidentali, e finchè nuove cause non intervengono capaci di alterare l'introdotta stabilità del letto del fiume e della sua foce; come sarebbe un aumento di corpo d'acqua per nuovi influenti, o una diminuzione prodotta da nuove diramazioni, un abbreviamento, od allungamento della linea ec.

IX. La prolungazione della linea dipendente dal ritiro del mare ossia dall'avanzamento dei lidi sopra il fondo occupato dalle acque del mare, si osserva dove più dove meno in tutti i nostri fiumi d'Italia, in quelli almeno che si scaricano nell'Adriatico. Ma siccome si è provato, che la moltiplicità degli sbocchi d'un fiume nel mare dà adito, che più facilmente e in maggior copia succedano gl'interrimenti, alla foce del medesimo, e però presso la spiaggia del mare, in vece d'essere portati avanti a seppellirsi nel mare profondo; e questi interrimenti che si vanno formando alla spiaggia sono una vera ed efficace cagione della protrazione dei lidi verso il mare; così è credibile che la moltiplicità degli sbocchi confluisca all'allungamento della linea; a tal che si possa dire che, poste le altre cose uguali, si prolunghi più presto e maggiormente la linea d'un fiume diviso in molti sbocchi, che quella di altro simile fiume che entri nel mare con le sue acque tutte unite per uno sbocco solo. Di fatto nei fiumi, che per l'unione e copia delle loro acque sboccanti in mare hanno forza di tenersi aperta e profonda la foce, non succede l'allungamento della linea, che per le deposizioni laterali fatte sopra spiaggie di poco fondo, le quali giungono a formare le ripe dove antecedentemente non erano. Ma nei fiumi che s'interriscono la foce concorre a formare la prolungazione della linea anche l'interrimento stesso della loro foce; mentre al colmarsi di questa sono

obbligate le acque ad abbandonare il sito del loro sbocco, ad aprirsi nuovi canali, e lasciar che si formi terreno asciutto ciocchè prima era fondo di mare. È dunque ragionevole, che se la moltiplicità degli sbocchi contribuisce per le cose dette all' interrimento della foce d' un fiume, concorra anche a fargli più prontamente allungare la sua linea.

Ora dimostrò chiaramente il Michelini il primo (1), ed è cosa facile da vedersi, che si scema ne' fiumi la pendenza col prolungarsi della loro linea. E perchè ogni fiume esige di correre con una determinata pendenza relativa, come si è notato, alla natura e quantità delle torbide che porta, e al corpo d' acqua e sua altezza viva; ne segue, che il fiume al prolungarsi della sua linea, non altrimenti che al rialzarsi del fondo della foce, s' interrirà l' alveo, e si eleverà maggiormente di fondo per riacquistare e mantenersi la sua naturale pendenza.

Osservò il Guglielmini (2), che il prolungarsi della linea del Reno dentro le valli San Martino, di Cagnola, di Malalbergo, e di Marara *seguito*, come egli scrive, *dall' anno* 1604. *sino al corrente* 1693. *ha fatto alzar il di lui fondo molti piedi*. E il Manfredi ha notato, che l' alzamento del fondo si andò formando a proporzione che si andò prolungando la linea per le valli, onde conseguir il fiume la pendenza ad esso competente di circa 15. pollici per miglio (3). Se dunque la moltiplicità degli sbocchi d' un fiume in mare gli promuove e facilita, come è probabile, il prolungamento della linea, diverrà per questo stesso riguardo cagione d' un maggiore e più pronto rialzamento del suo letto, ch' è quanto dire d' uno sconcerto nel sistema generale di esso fiume: sconcerto e danno cagione evidente di molti gravi disordini e danni dello stesso fiume.

X. Il sig. Bernard insegna e sostiene, che la maggior o minor protrazione della linea, come anche il maggior o minor corpo d' acqua e sua altezza viva, nulla confluisca nel formare o variare la pendenza dei fiumi, e niente serva per far alzar od abbassare il fondo degli alvei, sicchè il fiume abbia piuttosto una che un' altra cadente. *Ce n' est ni par sa distance à la mer, ni par l' étendue de son cours, ni par l' abondance des eaux qu' une riviere rassemble, que sa pente est déterminée* (4). Ma questa proposizione contraria ai più certi e sicuri principj dell' Idraulica, e che può dirsi come sovvertitrice delle dottrine e regole fondamentali sopra la natura e governo de' fiumi,

(1) Della direzione de' fiumi cap. 31. Tom. IV.
(2) Scrittura 3. sopra il Reno. Tomo II.
(3) Nelle note al cap. 14. della nat. de' fiumi.
(4) Nouveaux principes d' Hydraulique ec. cap. 3. sez. V. n. 265.

lasciateci dal Guglielmini, e abbracciate da tutti i nostri Italiani anche dopo l' esperienza d' un lungo corso di tempo, non merita che io mi trattenga a confutarla. Solo rifletterò che l' asserzione dell' illustre idrometra Francese anzichè essere un principio generale come egli pretende, non è che un eccezione particolare della legge, che universalmente regge ne' fiumi; la qual eccezione non può avere luogo che soltanto dove il letto d' un fiume sia composto di rupi e scoglj, o di altra materia così resistente, che non possa venire corrosa, smossa, ed asportata dall' azione dell' acqua, ed abbia il fiume tanta velocità da non essere obbligato a deporre per via le sue torbide.

XI. Bensì potrebbe essere soggetto degno da esaminarsi, se il prolungamento della linea possa divenir capace di rialzamento di fondo anche nell' alveo di que' fiumi, i quali si sono stabiliti sopra un fondo orizzontale, o presso che orizzontale in vigore dell' immenso corpo d' acqua che portano, come il Po di Venezia. Il Guglielmini nella sua terza scrittura sopra la diversione del Reno (1) scrisse, che *l' allungamento della linea non si attende ne' canali che camminano a forza di proprio peso, e senza sensibile declivio, qual è l' alveo del Po dalla Stellata al mare*. E nella scrittura 14. art. 2. si esprime in questi termini „ Se „ il prolungamento della linea operi o no nell' alzamento del fondo „ de' fiumi, che corrono quasi orizzontali, non ci arrischiamo di de„ terminarlo; ma supposto che si, ci assicuriamo bene di dire, che „ tale alzamento non può rendersi sensibile in pochissima pendenza, „ qual è quella del Po, ed in così grande distanza „. Altri, entra questi anche il riputatissimo Eustachio Manfredi nella sua risposta alle ragioni de' signori Ceva e Moscatelli (2) asseriscono decisivamente, che il fondo de' fiumi orizzontali non si rialza al prolungarsi della loro linea; poichè supponendo, che il fiume abbia stabilito il suo fondo sopra una linea orizzontale, e su questa abbia forza di correre senza deporre il suo limo, in simile caso nulla rileva se tal orizzontale si prolunghi, non rallentandosi per tal modo la velocità dell' acqua in alcuna parte dell' alveo, nè potendo variarsi quella pendenza che non vi è.

A me però questa ragione non apparisce dimostrativa, perchè nè meno la pendenza del Po, di cui parlano quegli Autori, può dirsi realmente nulla, benchè sia piccolissima e come insensibile, e tale minimo grado di pendenza basti a quel gran fiume per portare sino dentro il mare le sue torbide. Ma appunto perchè il fiume stesso

(1) Racc. T. II.
(2) Racc. T. V.

esige una qualche pendenza benchè minima, ne segue, che venendo questa a mancare col prolungarsi della linea, debba il fiume rialzarsi il fondo per mantenersela. Si aggiunga che col prolungarsi la linea si aumentano le resistenze degli sfregamenti, e però non ci possiamo assicurare, che l' acqua conservi in tutto il suo lungo corso la forza di prima, e che si suppone necessaria perchè non faccia deposizioni, e si alzi di fondo. Nemmeno l' esperienza che si porta, d' essersi cioè il Po abbassato di fondo dopo l' introduzione in esso del Panaro a fronte che dopo tal operazione siasi allungata la linea, è convincente. Imperciocchè le nuove acque aggiunte al Po grande coll' impedire che si è fatto nel 1638., che le sue piene si diramassero nell' alveo vecchio di Ferrara, e coll' introdurvi nello stesso Po grande il Panaro, ponno avere accresciuta la velocità di esso Po, e la sua forza più di quello che gliene avesse fatto perdere la prolungazione della sua linea. È inoltre da riflettersi, che al tempo, in cui il Po si escavò il fondo per l' accresciuto corpo d' acqua, la sua linea a fronte del ricevuto prolungamento era tuttavia più breve, come avverte il Guglielmini (1), di quella che percorreva avanti il Taglio Veneto di Porto Vivo; sulla quale antica linea si può credere, che il Po avesse come stabilito da prima il suo letto.

XII. Io sarei di parere, che ne' gran fiumi, i quali benchè torbidi, camminano con poca pendenza e pressochè orizzontali, l' innalzamento di fondo prodotto dalla lunghezza aggiunta alla linea non fosse assolutamente nullo, ma bensì però piccolissimo e pressochè insensibile, come insegnò il Guglielmini, quando si voglia avere riguardo al solo difetto che ne nasce nella pendenza. E la ragione è, perchè un fiume, che corre con minimo declivio, non può perderne che assai poco coll' allungarsi della sua linea; e perciò con un rialzamento quasi insensibile di fondo si rimette nella pendenza sua naturale.

Ma se per avventura il fiume perdesse del suo declivio non solo per la maggior protrazione della linea, ma ancora per un qualche rialzamento del fondo del mare alla sua foce; o se gli scemasse la sua velocità e forza per resistenze accresciute, o venisse caricato assai più del solito di pesanti torbide, in simili circostanze potrebbe venir obbligato ad alzarsi il fondo sensibilmente. Nella scrittura *Voto di M. Domenico Riviera* si pretende pegli esami fatti nella visita 1716., che il fondo del Po in generale dalla Stellata in giù non si sia alzato, ma che per contrario nel ramo di Ariano siasi abbassato. Ma il Zendrini (2) da due documenti ricava e prova essersi fatto

(1) Scrittura 14. sopra la divers. del Reno.
(2) Leggi e fenomeni delle acque correnti cap. 11. art. 22.

un rialzamento o di piena o di fondo di quasi quattro piedi di Bologna nel Po alla Polesella sino al 1721. E alla Cavanella dice, che *si conosce pur cresciuto il fondo del Po*. Le quali alterazioni propende egli a credere provenute dalla prolungazione della linea come da principal cagione. Altri Autori più recenti asseriscono assolutamente, che il Po si va rialzando il fondo. Se si tratti dell' alveo del' Po inferiormente alle Papozze si potrebbe assegnare una causa considerabile del suo interrimento anche l' ingrandimento che va prendendo il ramo d' Ariano.

Per altro si sa, che l' allungamento della linea deve far alzare il pelo delle piene, quand' anche non si alzasse il letto del fiume, come osservò il Guglielmini alla prop. 9. cap. 6. della natura de' fiumi. E il Manfredi nell' annotazione a quel luogo avvertì essere ciò già accaduto nel Po. Dal che si ricava, che la prolungazione della linea è sempre dannosa al sistema generale d' un fiume.

Ma sopra questo punto degli effetti dell' allungamento della linea ne' fiumi orizzontali o quasi orizzontali, basti il fin qui detto, giacchè pochissimi sono li fiumi torbidi, anzi niun altro havvene presso di noi fuori del Po, che a somiglianza dello stesso Po abbondi talmente d' acqua e d' altezza da poter camminar quasi orizzontale pel tratto di 50. e più miglia.

Dei vantaggi derivanti dalla moltiplicità degli sbocchi.

XIII. Abbiamo notato fin qui li danni che nel sistema generale d' un fiume ponno essere cagionati per la moltiplicità de' suoi sbocchi nel mare. Ma come avviene ordinariamente in tutte le cose naturali, che ai mali si uniscono dei beni; o che ciò che nuoce ad alcune cose, giovi a certe altre, così succede, che anche la moltiplicità degli sbocchi abbia i suoi beni, e che in alcuni casi, e per certi fiumi non sia dannosa, ma utile. Sono da considerarsi anche gli usi e vantaggi, che può ricevere da più sbocchi nel mare il sistema generale d' un fiume, onde avere una norma più facile e sicura per conoscer e definire se giovi o nuoca ad un dato fiume il moltiplicargli il suo sbocco.

Quando le aggestioni allo sbocco d' un fiume sieno cresciute ed accumulate a segno tale, che o da se sole, o per la forza ancora de' venti e delle onde del mare in burrasca, impediscano dove più dove meno, che il fiume entri in mare e si scarichi per tutta la latitudine della sua foce, le acque di esso fiume si formeranno de' canali, e si apriranno diverse bocche per mezzo le aggestioni nei siti di minore resistenza, o dove saranno maggiormente sforzate a piegarsi e dirigersi. E altra volta per simili cause si porteranno altrove, e si formeranno

strada per altro sito in mare. Tale appunto si conosce essere l'origine della moltiplicità e del cangiamento degli sbocchi che si osservano in varj fiumi. Che se al moltiplicarsi e dividersi degli sbocchi succeda, che per nuove aggestioni si alzi sopra il livello del mare il fondo nello spazio, che divide gli sbocchi, e vada prolungandosi la linea del fiume, allora nascerà di vedere il fiume verso il suo termine diviso in più rami, come si osserva nel Po. Non intendo però d'escludere ogni altra causa ed origine, che naturalmente può avere avuto luogo nella diramazione inferiore sì di questo, che di altri fiumi reali. Imperciocchè oltrecchè i rigurgiti del mare in tempesta, od altre cause potrebbero avere sforzato il fiume nelle sue piene a diramarsi e prendere con porzione delle sue acque una nuova strada prima di arrivar al mare, può anche esser avvenuto, che le sue acque si diffondessero anticamente per delle valli o paludi prima di giugnere in mare; e che per la colmata prodotta in quelle bassure si sieno le stesse acque in progresso di tempo unite in più rami tra loro separati, secondo che venivano determinate a correre dalle deposizioni già fatte e alzanti il terreno.

Da ciò per tanto che la moltiplicità degli sbocchi che naturalmente succede, nasce in quanto il fiume non trova bastante ingresso in mare per una sola bocca; e variano gli sbocchi di sito in quanto le acque del fiume impedite da una parte si fanno strada da un'altra in mare, si vede, che la moltiplicità degli sbocchi non è cosa voluta direttamente dalla natura del fiume, quasichè inclinasse assolutamente più a correre e scaricarsi in mare diviso, che unito; ma è cosa che il fiume è forzato a procurarsi pegli opposti ostacoli. Così li torrenti mutano corso quasi ad ogni altra loro piena pegli impedimenti che essi medesimi si creano o incontrano per via; e il più dei fiumi corrono per alvei tortuosi ben per altre cagioni, che perchè al loro corso sia più confacente la linea curva, che la retta; come taluno ha pensato, condotto da principj puramente astratti; e alcun altro si è immaginato dal vedere, che pochissimi sono li fiumi, che si mantengono un corso rettilineo. Siccome il principio da cui nasce o dipende il moto e corso del fiume è l'azione della gravità combinata colla fluidità dell'acqua, così è chiaro, che il fiume non tende, che a discendere e passare al luogo più basso; e la strada retta è quella, che più prontamente ve lo porta, e che colla brevità della linea accresce il declivio, e scema le resistenze, e fa che le acque inalveate si mantengano il letto più scavato, e meno esse si alzino col loro pelo sopra il livello dei terreni, che tagliano ed attraversano col loro corso. Ma gli ostacoli sono quelli, che fanno deviare il corso all'acqua dal retto sentiero, e il difetto di resistenza nelle sponde degli alvei dà adito al fiume di mutare la direzione de'

medesimi, e di piegar il suo corso secondo che viene spinto, e sforzato dagli impedimenti.

XIV. Ma sebbene il fiume si vegga moltiplicare i suoi sbocchi al mare, perchè viene come violentato a farlo qualora trova impedimenti da non poter penetrar in mare e scaricarvisi per uno sbocco solo, non cessa per questo, che la moltiplicità degli sbocchi non si renda non solo necessaria in alcuni fiumi, ma anche utile in tutto il sistema generale de' medesimi. Imperciocchè quando il mare sia poco fondo per molto tratto verso la spiaggia, dove sbocchi un fiume di grande portata, non è possibile, che le acque del fiume in tanta larghezza quanta ne esigono le foci de' gran fiumi, abbiano forza di escavare e tenere sgombro e basso quel fondo del mare alla spiaggia quanto abbisogna il fiume per iscaricarsi felicemente in mare entrando sotto il pelo del medesimo; bensì per contrario deve riuscire più facile, che scavino il fondo stesso e l' approfondino in alcuni siti solamente, formandosi per entro a quelle deposizioni come de' canali, ne' quali raccolte le stesse acque del fiume vagliano colla forza meno dispersa del loro corso a mantenersi quella profondità di foce, che procuri uno scarico assai più facile a tutto il fiume, che non avrebbe se dovesse entrar in mare colle sue acque dilatate e sparse in tutta la vastità d' una bocca sola pochissimo fonda.

L' esperienza conferma ed avvalora questo ragionamento; mentre vediamo, che li fiumi tutti di massima portata abbondano di sbocchi. Si racconta, che l' Oranocchio entri nel mare per più di 50. bocche, e per alcune di esse con caduta e grande velocità. L' imboccatura del Senegal dicesi larga una mezza lega francese, attraversata ed ingombrata da banchi di sabbia, ma che di mezzo a questa specie di gran rosta vi sieno aperti due sbocchi come due canali, pei quali entri e scorra in mare la maggior parte del fiume (1).

Si sa, che anche le acque delle Lagune di Venezia uscendo dai porti si dividono come in più canali, che esse si formano nelle sabbie sul fondo del mare, e i più profondi di essi canali sono quelli, che danno ai vascelli ingresso nel porto. Gli stessi, come anche quelli degli sbocchi de' fiumi, variano di sito e di direzione per li venti e burrasche del mare; ma non cessano di mantenersi in numero.

Il vedere come li fiumi di molti sbocchi si preservano per lunga serie d' anni un determinato numero di sbocchi, benchè li cangino di sito, e ne rendano or questi or quelli o più o meno capaci, come fu osservato nel Po (2), è una nuova conferma, che la natura di

(1) Vedi M. Bernard. cap. 3. sez. 16.
(2) Relazione e voto di M. Riviera n. 67. Racc. T. IX.

tali fiumi, ch' è quanto dire il complesso delle cause che in essi operano, esige certa moltiplicità di sbocchi, e che questi in cotal numero servono allo scarico del fiume, e per ciò giovano al sistema generale del medesimo. Il Po godendo di molti sbocchi si è approfondato il letto, e abbassato anche col pelo delle sue piene riportato alla superficie delle adiacenti pianure, allorchè ricevette l'influente Panaro, come appunto richiede la natura e buona costituzione de' fiumi.

XV. L'esigenza e vantaggio di più sbocchi per un fiume si manifesta vieppiù ancora quando si consideri il fiume mentre deve entrar in mare agitato e sollevato dai venti. È a tutti noto, che l'acqua del mare in tempo burrascoso viene sollevata e spinta gagliardamente dalla furia dei venti verso le spiagge, e contro le foci dei fiumi. Il Zendrini (1) da osservazioni altrui raccolse, che nel 1705. li venti dell'Adriatico predominando un contumacissimo scirocco poterono alzare e sostenere per modo tale le acque di quel golfo, che la marea salì sopra il pelo ordinario oltre quattro piedi di Bologna. Sulle coste di Francia per testimonianza del sig. Bernard (2) li venti alzano le acque del Mediterraneo sino a quattro piedi di Parigi.

Ora è manifesto, che ogni qual volta il mare si solleva alcuni piedi sopra la comune, e con impeto viene spinto contro la direzione d'un fiume, deve portare un ritardo notabilissimo al corso delle sue acque, e un rialzamento considerabile di pelo anche superiormente al sito del fiume dove giungono a farsi sentire le ordinarie maree. Però se si combini la burrasca impetuosa del mare collo stato di escrescenza e piena del fiume, come alcune volte succede, è facile a vedersi, che in tal caso si gonfierà maggiormente il fiume, e si alzerà di pelo, e le sue acque così inalzate e tenute sospese produrranno rotte ed allagamenti; come appunto osserva il Zendrini, che avvenne nell'innondazione memorabile in tutta la Lombardia del 1705. Nè mancano altre osservazioni, che confermano lo stesso fenomeno; mentre più d'una volta si è veduto, che sebbene la piena d'un fiume alle sue parti alte e più vicine all'origine non fosse delle maggiori, pure riuscì d'una massima elevatezza e delle più dannose nelle parti basse, dove poteva giugnere a farsi molto sentire il rigurgito delle maree.

La moltiplicità pertanto degli sbocchi può essere di qualche riparo a questo disordine; potendo succedere, che per alcuno di essi che guarda con direzione diversa dagli altri, niente o poco direttamente

(1) Delle leggi e fenomeni ec. cap. 8. art. 7.
(2) Cap. sez. 16. n. 348.

agisca il vento ed il mare coll'impeto delle sue onde. E però facilitandosi per tale sbocco lo scarico del fiume nell'atto che trovasi impedito fortemente e tenuto come sospeso negli altri sbocchi, che di fronte ricevono l'impeto dei venti e del mare in tempesta, si avrà quindi il vantaggio che li rigurgiti del mare, che soffre il fiume gli riescano meno dannosi.

XVI. Si potrebbe anche dire con fondamento, che la natura colla moltiplicità degli sbocchi provvede ai bisogni del fiume preventivamente; mentre le sue acque trovano sempre aperta la via in mare per questo o per quell'altro sbocco, senza che il fiume sia in necessità di arrestar il corso, o di doversi aprir e formare una strada tutta nuova per l'impedimento, che gli venisse opposto in uno de' suoi sbocchi. Non è nemmeno necessario, che in un fiume di molti sbocchi si alteri e deteriori tutto il suo sistema coll'interrimento e rialzamento sensibile del suo alveo, allorchè succeda che taluno de' suoi sbocchi s' interrisca, potendo gli altri supplire al difetto di quello, che si fosse guastato colmandosi. Che se al viziarsi d'uno sbocco faccia d'uopo che se ne ingrandisca alcun altro, onde il fiume abbia il suo scarico senza risentirne danno, ciò può riuscire più agevole ad un fiume che trovi in pronto molti sbocchi già aperti, che ad un altro fiume, il quale non abbia che quel solo sbocco, dove si difficulta il suo ingresso e scarico in mare.

Coloro che frequentano colla navigazione il porto di Fossone, asseriscono, che ad ogni piena del fiume si trova che varia la profondità delli suoi sbocchi, approfondandosi a vicenda or l'uno or l'altro alquanto più o meno di prima; sussistendo per altro dopo calate le acque, più profondo quello a destra verso Ostro-scirocco, che quello a sinistra diretto a Greco-tramontana; e meno di tutti due il terzo di mezzo rivolto a Greco-levante. Indizio che l'acqua del fiume è contrastata a entrar in mare alcune volte più, e alcune meno da una parte, che da un'altra di direzione molto diversa; e che perciò giova al fiume l'avere più sbocchi in mare diretti a diverse plaghe. L'uso e vantaggio di più sbocchi per certi fiumi si renderà manifesto anche dalle cose che diremo verso il fine del capitolo secondo n° 27. 29. 30.

Dello stato d'acqua in cui ponno essere prodotti li descritti danni, e li vantaggi.

XVII. Esposti li danni e li vantaggi che produce nel sistema generale d'un fiume la moltiplicità de' suoi sbocchi nel mare, resta da vedere *in quale stato d'acqua* ve li produca.

E a quanto ai danni, quel del ritardo nel corso e del rialzamento

di pelo per la maggiore difficoltà, che il fiume diviso in più sbocchi deve sentir a penetrar entro il mare, oltrecchè l'abbiamo fin da principio (n.° 2.) computato da poco, almeno nell'ordinario rigurgito del mare, esso non potrebbe riuscire sensibile nel sistema generale del fiume fuori dello stato delle sue piene. Imperocchè sebbene nello stato d'acqua magra, ed anche d'acqua media o quasi media, la resistenza del mare relativamente alle forze del fiume sia maggiore, che nello stato di abbondanza e piena del fiume; tuttavia in quel tale stato d'acqua, quand'anche potesse mai succedere un qualche maggior rallentamento di corso e rialzamento di pelo per la moltiplicità degli sbocchi, non si vede che possa recare alcun danno, quando non fosse quello di difficoltar il passaggio d'alcuni scoli nel fiume medesimo.

E supponendo, che il fiume corra chiaro tanto in acqua magra, che in media, siccome allora depone assai poco o niente, fuorchè dove riducesi la sua acqua stagnante; così niun maggior danno sensibile neppure riguardo alle deposizioni potrebbe temersi in tali stati d'acqua dalla maggiore difficoltà che avesse il fiume per entrar in mare a cagione delle sue acque divise colla moltiplicità degli sbocchi.

Ma se allo stato d'acqua media si unisce quello ancora d'acqua torbida, come succede nelle escrescenze, piene, e mezze piene del fiume; allora potrebbe meritare d'essere preso in considerazione anche l'effetto delle deposizioni lungo l'alveo del fiume in acqua media. Ma perchè il fiume suole deporre ed alzare il suo letto finchè si abbia stabilita la sua naturale pendenza, e questa dipendente non proprismente dal numero, ma dalla qualità degli sbocchi più o meno profondi, crediamo opportuno il riportare l'effetto delle deposizioni e interrimenti dei fondi del fiume, a quello che siamo per dire degli interrimenti delle foci, e loro conseguenze.

XVIII. Gli altri danni e ben degni di riflessione, che abbiamo notato prodursi dalla moltiplicità degli sbocchi, consistono nell'interrimento e rialzamento del fondo della foce, e consecutivamente del fondo dell'alveo; e nella più pronta prolungazione della linea, e quindi in un ulteriore rialzamento del fondo del fiume; le quali alterazioni introdotte nel sistema d'un fiume lo sconcertano mirabilmente, e ne producono calamitosi effetti. (n.° 3. 8. 9.)

Gl'interrimenti alla foce in quanto vengono cagionati semplicemente dalle sabbie del mare sollevate e spinte dalle burrasche, o portate dal moto radente o sia litorale del mare, devono succedere e farsi in istato d'acqua magra del fiume più che in altri stati. Poichè il fiume in magra ha minor forza, che in altri stati per portar avanti, o respignere e sgombrare le materie, che le acque del

mare vi trasportano, e depongono verso la spiaggia, e lo sbocco del fiume.

Se poi consideriamo gli stessi interrimenti alla foce, cagion dell' innalzamento del suo fondo, come anche della prolungazione della linea del fiume, in quanto vengono prodotti dalle materie portate e depostevi dal fiume, è ragionevole il credere, che essi si generino principalmente nelle piene del fiume, siccome allora il fiume ha la maggior forza per sostener e portar avanti le sue torbide in quantità sino allo sbocco in mare. È vero che ogni fiume col maggior vigore delle sue acque alte si scava la foce, se la difende anche dagli interrimenti delle proprie torbide col tenerle sospese, e collo spingerle più avanti in mare, e col deporle dai lati dello sbocco; ma oltrecchè a ciò fare è meno atto il fiume diviso e indebolito colla diramazione in più sbocchi; deve altresì succedere che tal fiume in piena accumuli e prepari da vicino le aggestioni che alzano e rovinano la foce, sebbene questa durante il maggior impeto delle piene si dia a veder più bassa di fondo.

Ma se si tratti degli interrimenti e rialzamenti del fondo dell' alveo prodotti a cagione dell' ingombro e dell' elevazione del fondo della foce, e del prolungamento della linea; questo tal effetto dannoso negli alvei dei fiumi, deve nascere allorchè il fiume e più disposto che mai e atto a deporre per via le sue torbide; e ciò succede nel calare delle piene, e singolarmente nelle code delle medesime piene; mancando il fiume in tale suo stato non solo di forza escavante, ma anche di velocità necessaria per sostenere e portar avanti le torbide, di cui le sue acque si trovano tuttavia impregnate, e cariche.

Non dissimulo qui il parere d'un esimio Idraulico, che li fiumi depongono anche dopo che sono ridotti a correre con acque chiare; ma, come altrove di sopra ho avvertito, crederei che le deposizioni del fiume in tale stato d'acqua o non sieno calcolabili, o lo sieno quelle soltanto, che si fanno a poco a poco dove l'acqua riducasi stagnante, e ne' siti dove corra con lentissimo moto.

XIX. Il recentissimo Idraulico Francese tra le altre sue particolari dottrine e regole intorno la natura de' fiumi, ha anche questa, che li fiumi, i quali corrono in sabbia e terra, non si alzino mai sensibilmente di fondo, fuorchè allo sbocco; pretendendo egli che quanto il letto del fiume s'interrisce e si alza dal calare e finire d'una sua piena, altrettanto al sopravvenire d'un'altra escrescenza e piena di nuovo si scavi e si sgombri (1).

(1) Cap. 3, sez. 17. n. 366. 367. e 379.

Questa sentenza dell'invariabile altezza di fondo ne' fiumi è tanto più strana, quanto che si pretende che abbia luogo a fronte che si accordi e si ammetta interrimento e rialzamento alla foce degli stessi fiumi. Quei soli fiumi, che sono giunti ad aversi stabilito il loro alveo, sono quelli, che si mantengono il fondo tanto lungo l'alveo, che alla foce ad una pressochè costante altezza media interrendo ed escavando a vicenda. Ma si rifletta, che succedendo lo stabilimento dell'alveo, esso si fa e si regola in conformità di quello della foce; sicchè se il fiume per la moltiplicità degli sbocchi sortirà una foce meno profonda, anche il fondo dell'alveo si stabilirà ad una maggiore elevatezza.

Ma pochi sono que' fiumi, che abbiano l'alveo stabilito in guisa da preservarselo tale anche in corso di molti anni. Ed è poi del tutto falso, che niun fiume, dove corre in arena o limo, si alzi mai di fondo. È cosa dimostrata ad evidenza di fatto incontrastabile, che li fiumi si alzano di letto interrendo e colmando il proprio alveo, sia per giugnere a quella pendenza, di cui abbisognano per sostener ed asportare le loro torbide, sia per preservarsela al prolungarsi della linea, o all'interrirsi ed alzarsi della foce e fors'anche del fondo stesso del mare. Anzi le osservazioni provano, che si sono fatte e tuttavia si vanno facendo delle elevazioni di fondo notabilissime, dove più dove meno, nella massima parte de' fiumi, come si può vedere presso il Viviani (1), il Michelini (2), il Guglielmini ed il Manfredi (3), come anche presso il Zeodrini (4), il Frisi (5), ed altri autori. Io aggiugnerò qui, che da recenti iterate osservazioni, e dal confronto di antichi documenti fu rilevato a tutta evidenza, che il fondo del fiume Brenta si è interrito e rialzato dal principio dove questo fiume corre in sabbia e terra sino ben avanti l'ultimo tronco inferiore protetto dal flusso e riflusso del mare; e che il prodotto rialzamento di esso fondo arriva sino a 5, e 6 piedi Veneti, e più ancora.

Da un registro lasciato da un pubblico Perito, e osservator diligente e pratico dell'Adige, in vicinanza del qual egli aveva la sua abitazione, e che finì di vivere nel 1790., si vede un rapido alzamento nel letto di esso fiume in corso di otto anni. L' osservazione

(1) Discorso al Serenissimo gran Duca Cosimo III. Racc. T. III.

(2) Della direzione de' fiumi cap. 31. Racc. T. IV.

(3) Scrittura 3. e 4a. sopra il Reno Racc. T. II., e della natura de' fiumi cap. 9. e 14.

(4) Leggi e fenomeni de' fiumi cap. 11., e in una scrittura del 1727. sopra il fiume Brenta.

(5) Dei fiumi e torrenti cap. 3.

fu instituita di anno in anno a Vallurbana in un tratto d'alveo quasi dirimpetto al castello di Lendinara. Da tale osservazione risulta, che il letto del fiume in così breve corso di tempo si è colmato all'altezza di circa tre piedi, proseguendo l'innalzamento colla seguente progressione.

Dal 1778.	al 1779.	once	2.
1779. . . .	1780.		$2\frac{1}{2}$
1780. . . .	1781.		3.
1781. . . .	1782.		$3\frac{1}{2}$
1782. . . .	1783.		4.
1783. . . .	1784.		$7\frac{3}{4}$
1784. . . .	1785.		$7\frac{1}{4}$
1785. . . .	1786.		7.
		Once . .	37.

Suppongo che un tanto rialzamento e in così pochi anni sorprenderà chiunque, come sorprese me pure. Ma per il carattere già a me ben noto dell'autor di tali rilievi io non ho motivo per credere, ch'egli abbia voluto ingannare, o che egli stesso siasi ingannato di grosso nello scandagliare. Dall'altra parte si sa, che gl'innalzamenti non sono sempre gli stessi; che quelli di alcuni anni non danno regola per altri degli anni antecedenti o susseguenti. Oltrecchè si potrebbero anche assegnare delle cause di un grande disordine di quegli anni nell'Adige; fra le quali cause avrebbe il suo luogo la soverchia larghezza data al fiume col taglio e ritiro delle golene contro ciò, che era stato da altri suggerito per un regolamento di quel medesimo fiume.

XX. Poichè sono comprovati e manifesti li rialzamenti de' letti de' nostri fiumi, qualunque essere si voglia la loro origine, abbiamo in ciò una cagione palese e sicura, oltre ad altre, perchè le piene de' fiumi si vadano alzando di pelo, e riescano sempre pericolose, e spesso dannose. Appunto nello stato di piena del fiume avrebbero luogo gli effetti rovinosi di quegli interrimenti, e rialzamenti di fondo, che abbiamo detto doversi fare in vigore della moltiplicità degli sbocchi; e tali effetti consistenti in corrosioni, tracimazioni, rotte, ed allagamenti, accaderebbero tanto più facilmente, e tanto più grandi riuscirebbero quanto maggiori e di più durata fossero le escrescenze e piene del fiume.

In altri stati d'acqua, come in acque medie e basse non appariscono dannose conseguenze per l'interrimento e rialzamento del letto del fiume; quando non si volessero contare quelle della navigazione più stentata, se il fiume sia navigabile, del lavoro difficoltato

negli edifizj che fossero piantati sul fiume, e quella finalmente della caduta diminuita, e dell' esito impedito agli scoli.

XXI. Rispetto ai varj vantaggi, che ho notato (14. 15. 16.) poter derivare dalla moltiplicità degli sbocchi nel sistema generale d'un fiume, quello dello scarico meno difficoltoso in tempo di mare in tempesta, può essere sensibile nello stato di escrescenze e piene del fiume, qualora queste si combinino colle burrasche e furie del mare. L'altro vantaggio poi del prestare che fanno li molti sbocchi insieme uno scarico corrispondente al grosso fiume, come anche quello di poter avere il fiume uno sbocco in pronto al viziarsi d'alcun altro; siccome questi due vantaggi spettano alla natura del fiume ed a tutto il suo generale sistema, così si ponno amendue risguardare quali vantaggi del fiume per ogni suo stato d'acqua. Con questa differenza però, che prescindendo dall'effetto nocivo, che per altri riguardi può, come si è veduto, risultar in un fiume dalla moltiplicità degli sbocchi, si faranno essi due vantaggi sentire specialmente nelle escrescenze e piene del fiume; comecchè in tale stato d'acqua abbisogni piucchè mai il fiume di scaricarsi, e riescano di maggiore pericolo e danno li suoi vizj e sconcerti.

CAPITOLO II.

Con quali principj si debba fissar il numero degli sbocchi d'un fiume nel mare.

XXII. Que' che credono gettato invano lo studio e l'opera che impiegare si volesse per migliorare la foce d'un fiume, potrebbero forse pensare che sia inutile similmente il cercare quale numero, e quale direzione di sbocchi meglio convenga ad un fiume, e più inutile ancora il tentativo per istabilirne la sussistenza: come se l'uomo non potesse conoscere ciò, che meglio convenga per ben sistemar un fiume; o non gli fosse possibile di correggerne gli sregolamenti, e metter riparo a nuovi sconcerti e disordini. Ma ben altramente ha giudicato la R. Accademia, invitando gl'Idrometri alla soluzione del suo problema; e il riputatissimo giudizio di lei non mi permette d'esitar a credere, che possa benissimo rendersi utile l'umana industria, sia che si tratti di migliorare lo sbocco attuale d'un fiume, sia che si cerchi di fissare lo sbocco per una nuova innalveazione da farsi ad un fiume. Io accordo, che lasciando sussistere le stesse cause operatrici, si renda inutile l'escavazione, e lo sgombro, che si facesse alla foce d'un fiume per migliorarla; perchè ben presto tornerà allo stato di prima, come appunto dicesi essere quasi avvenuto

nel fiume Adour, dove per altro giunse in seguito l'arte a conseguir molto del suo intento (1).

Ma non così parimente succederà, se alle cause, per cui la foce viene viziata, si pratichi il dovuto rimedio col dare altra direzione allo sbocco del fiume, o coll'applicarvi ripari opportuni e adattati al contemplato oggetto, come si usa con buon successo anche negli sbocchi delle lagune: o finalmente (e sarà questo per lo più l'ottimo espediente) col portare il fiume a sboccar in altro sito e con buona direzione. Di raro accade, che le cause che guastano lo sbocco d'un fiume, e ne sconcertano tutto il suo buon sistema, sieno tali da non ammettere alcun rimedio, e da renderne vano ogni ritrovato e tentativo dell'arte. Così, per modo d'esempio, se taluno per migliorare la condizione d'un fiume torbido, e abbassarne il pelo delle sue piene, si accingesse a scavarne l'alveo interrito e colmato senza aggiungervi altri regolamenti, getterebbe inutilmente tutta la fatica; perchè il fiume in breve corso di tempo tornerebbe colle sue deposizioni a ridursi il fondo del letto allo stato di prima, ricuperando la sua competente pendenza. Ma se oltre di escavare ed approfondare l'alveo, si abbreviasse anche la linea col taglio delle svolte, e si restringesse l'alveo se troppo ecceda in larghezza; o si accrescesse il corpo d'acqua e sua altezza viva con nuovi influenti; in tale caso l'alveo del fiume scavato per mano d'uomini non tornerà a colmarsi al segno di prima; e l'opera umana sortirà il suo intento.

Non manchiamo d'esempj di nuovi sbocchi procurati ai fiumi in mare con esito felice pel sistema degli stessi fiumi come quello del fiume Morto, del Serchio (2), e del Lamone (3). Il Viviani nella sua Relazione a Cosimo III. intorno al riparare le città, e campagne di Pisa dalle inondazioni fa elogio al Meyer espertissimo Ingegner Olandese, il quale progettò di *voltar l'uscita d'Arno a sboccar in mare* in altro sito per rimediare ai danni di quel fiume (4). Di questo progetto del Meyer parlò con lode l'ab. Frisi, e avrebbe voluto che si mettesse in pratica per Pisa (5). Ma per ogni altra prova di fatto convincente, che si possa correggere e migliorare anche stabilmente lo sbocco ai fiumi, vaglia il nuovo sbocco con tanta intelligenza e maestria prescritto e fatto costruire con tutto il buon effetto pel

(1) Bossut. Hydrodin. T. II. cap. 23. n. 822.
(2) Perelli ragionamento sopra la pianura Pisana.
(3) Cap. 4. nota 44. della Relazione per la diversione de' fiumi Ronco e Montone.
(4) Raccolta Tom. III.
(5) Libro 8. de' fiumi che portano arene e torbide cap. 1, e 5.

fiume Bevano poco distante da Ravenna dal celebre sig. ab. Marì (1), nel quale la scienza dei fiumi gode di veder ai giorni nostri come rinato il gran Guglielmini.

XXIII. *Ma con quali principj si dovrà fissar il numero e la direzione degli sbocchi* d' un fiume nel mare? Della direzione parleremo nel terzo capitolo.

Rispetto al fissar il numero, sebbene il chiarissimo sig. di Buat trovi grandissima analogia tra il letto d' un fiume ed un tubo orizzontale, od inclinato (2); e il celebre sig. Gio. Domenico Michelotti cerchi di provare, che ne' canali regolari ha luogo la legge, che regge nell' acqua uscente da vasi (3); ciò non pertanto convien confessare, che i fiumi, che si ponno trarre dalle leggi adottate per le acque uscenti da' fori aperti ne' vasi, e dalle stesse sperienze in piccolo de' vasi e tubi, sono troppo tenui e rimoti dal soggetto per fissare le leggi dei fiumi, e per servire di guida e norma sicura nella regolazione de' medesimi; come avvertì l'ab. Grandi (4), ed il Manfredi (5); e lo ha dimostrato un prestantissimo matematico e idraulico in una sua dissertazione coronata dalla R. Accademia nel 1781. (6). E però da tali principj non si saprebbe come prendere regola per fissare ad un fiume il numero de' suoi sbocchi nel mare. Meno ancora ci potremmo fidare di principj puramente astratti ed ipotetici. Le tante varie ipotesi immaginate per conoscere e stabilire le resistenze, ed i ritardi, che soffrono li fiumi dai recipienti ne' loro sbocchi, sono una prova bastante, per tacerne altre, onde accertarci, che bisogna ricorrere alle osservazioni, ed all' esperienza de' fiumi stessi, e valerci dei principj tratti da tali fonti della natura per regolare e corso e sbocco de' fiumi; senza però mai scordarci, che *in pratica gl' impedimenti fanno alcune volte perdere l' uso a tutte le regole* (7).

XXIV. Li principj pertanto fondamentali e generali tratti dall' osservazione, e dalle leggi fisiche, i quali deve avere presenti alla mente un Idrostatico trattando di voler fissare il numero degli sbocchi ad un fiume, crederei che fossero li seguenti:

1. L' accrescimento, e per ciò anche l' unione dell' acque in un

---

(1) Idraul. pratica ragionata vol. I. sez. 8.
(2) Principes d' Hydraulique T. I. p. 1. sez. 1. cap. 2.
(3) Sperimenti Idraulici T. I. p. 2. cap. 3.
(4) Nella pref. al trattato del movimento delle acque.
(5) Nelle note al cap. 8. della nat. de' fiumi, e altrove.
(6) Cocoli. Dissert. sopra il quesito: stabilire la vera teoria delle acque uscenti da' fori aperti ne' vasi ec.
(7) Guglielmini cap. della nat. de' fiumi.

fiume, che sbocca al mare, profonda la sua foce non ostante tutti gl'interrimenti laterali.

2. L'acque de' fiumi, che corrono per alvei soggetti ad essere corrosi e scavati, come anche ad essere interriti, s'insinua ed entra in mare sotto il pelo del medesimo, alzandosi, e abbassandosi il pelo del fiume all' alzarsi ed abbassarsi di quello del mare; in guisa che l' ingresso del fiume nel mare si fa a mezza onda, venendo regolata la superficie dell'acqua dal punto di mezzo tra il maggiore alzamento ed abbassamento dell'acqua ondeggiante.

3 Quanto più un fiume perde di profondità nella sua foce, tanto più a proporzione se la dilata, e viceversa.

4. Li fiumi uniti richiedono sbocco maggiore in mare non solo in larghezza, ma anche in profondità.

5. Certi fiumi richiedono più foci, perchè trovano impedimento ad entrar in mare, e scaricarsi per una sola; e quando alcuna delle molte foci si ottura, come la più impedita, o la meno veloce, l'acqua si volta pegli altri sbocchi, ne' quali sono minori gl'impedimenti, e per conseguenza il corso è più vigoroso; oppur se ne apre un nuovo più facile e più spedito.

6. La felicità del corso d' un fiume dipende sommamente dalla felicità del suo sbocco, per cui il fiume abbia facile e pronto scarico; e la felicità dello sbocco risulta dal trovarsi libero da ingombro, ben profondo, e poco soggetto ai venti impetuosi del mare.

7. In aggiunta a tutti questi principj coerenti agli insegnamenti dell'eccellente osservatore de' fiumi, avrà l'idrostatico in considerazione anche li vantaggi, e danni, i quali ponno risultare dalla moltiplicità degli sbocchi. Si è parlato nel precedente capitolo di tali danni e vantaggi pel sistema d'un fiume in genere senza determinar precisamente, se gli uni prevalgono agli altri; nè individuar espressamente in quali fiumi siano per aver luogo i primi, e non li secondi, e viceversa, o almeno più gli uni che gli altri. Ma la cognizione delli riferiti danni, e vantaggi, e delle loro cause, posta la moltiplicità degli sbocchi, non può non essere di aiuto e di regola unitamente ai proposti principj per istabilire in quali fiumi e circostanze giovi o no il moltiplicare gli sbocchi, e quale numero di essi meglio convenga per un dato fiume.

XXV. Io sono di parere, che l'idraulico dalla ponderazione di tali principj verrà condotto a fissare ad un solo il numero degli sbocchi de' fiumi, fuorchè in alcuni pochi casi; e quando non si tratti de' fiumi principali e di massima portata. Di fatto vediamo, che un gran numero, e forse la massima parte de' fiumi minori ha uno sbocco solo in mare. E se rifletteremo alle cause dei vizj e disordini di tanti nostri fiumi d'Italia, troveremo, che per quanto in essi sconcerti

ha parte lo sbocco, ciò dipende ordinariamente dal sito, e forse anche dalla direzione, e non già dall'unità dello sbocco stesso; e che per ciò si rimedierà al disordine del fiume per riguardo al suo sbocco attuale col provvederlo di altra foce formata con ben intesa direzione, piuttostochè col moltiplicarsi le foci. L'Adige dopo che pegli interrimenti raccolti ed ammassati avanti la sua ampia imboccatura è giunto ad avere tre sbocchi, continuò e tuttavia continua ad essere vizioso e rovinoso non meno che il Brenta, ed altri fiumi, che si mantengono un solo sbocco nel mare. Per contrario alcuni fiumi, che vennero ristretti ed incassati al loro ingresso nel mare per obbligare le loro acque a sboccar unite invece di entrar nel mare dirsmate e disperse per molte strade, hanno ricevuto benefizio procacciandosi foce più profonda. Non si può tuttavia dare una general esclusione alla moltiplicità degli sbocchi; mentre si è provato, che anche la moltiplicità ha i suoi vantaggi, e si osserva, che la natura se la procura, e se la mantiene, amando li fiumi maggiori d'avere più sbocchi.

XXVI. Ma per fissare il numero degli sbocchi, e conoscere quando ed a qual segno convenga moltiplicarli, oltre i lumi, e la direzione, che si può trarre dai principj generali già proposti, sono da aversi in riflesso altri oggetti ancora in particolare, da cui prender regola e norma come da altrettanti principj. Tali sono 1. la causa, che fa naturalmente moltiplicare e variare gli sbocchi de' fiumi, ed il fine, per cui la natura apre molti sbocchi ad un solo fiume; 2. la profondità del mare verso la spiaggia, dove mette il fiume; 3. la grandezza e la natura del fiume, pel quale si cerca di fissare il numero degli sbocchi.

XXVII. Quanto alla causa (1.°) gli estesi banchi di sabbia, che si formano avanti lo sbocco del fiume in mare sforzano le sue acque ad aprirsi de' canali, ed a penetrar in mare per più bocche; e in alcuni luoghi anche i venti burrascosi obbligano il fiume ad aprirsi nuove foci in luoghi coperti o secondanti la furia dei venti. Il fine poi della natura nell'aprire, che fa molte foci ad un fiume solo, non è, come riflette il Guglielmini, perchè abbisogni di un tanto numero, mentre rare volte si serve di tutte per iscarico delle acque di esso, ma per eleggersi secondo le occasioni quella, per la quale è più facile e più spedito lo sfogo (1).

In vista di tutto ciò, siccome qualora lo sbocco d'un fiume si trovi impedito fortemente e difficoltato, giova dargliene un altro, così sarà ben fatto il destinare più d'uno sbocco ad alcun fiume

(1) Cap. 8. prop. 4. della nat. de' fiumi.

qualora accada, che metta in mare, dove per lungo tratto ben avanti dentro il mare stesso si affaccino de' grandi banchi di sabbia, i quali uniti formino un obice pressochè insuperabile all' ingresso, ed avanzamento del fiume per entro il mare. E similmente potrà essere opportuna la moltiplicità degli sbocchi e con diverse direzioni, dove la spiaggia sia aperta a molti venti gagliardi per modo che nessuno sbocco possa mettersi a coperto da venti impetuosi. Nel primo caso venendosi a formare come tanti canali attraverso de' banchi di sabbia, troverà il fiume minore difficoltà ad entrar in mare di quella che se avesse ad affrontare l' opposto impedimento de' banchi in tutta l' estensione dall' una all' altra estremità della larghezza, che richiede nel suo ingresso in mare. E nell' altro caso la moltiplicità degli sbocchi con differenti direzioni dà campo alla natura del fiume di determinarsi collo scarico delle sue acque ora da questa, ora da quella parte, dove è meno contrastata dall' impeto delle onde, e dalla furia de' venti.

XXVIII. Ma se per avventura il mare (2.°) a poca distanza dal lido avesse molta profondità, nè si osservassero sul suo fondo dirimpetto alla foce del fiume raccolti degli scanni di arena insuperabili, cessa il bisogno di dare più d' uno sbocco al fiume, quando però non ci fosse ragione di temere impedimenti assai forti, e da più bande per conto dei venti.

Non avvi cosa, che più favorisca la bontà dello sbocco d' un fiume, e ne escluda il bisogno di molte foci, quanto la profondità del mare dove entra il fiume. Anche li fiumi di mediocre portata danno ingresso a' bastimenti, quando sboccano in mare, dove questo sia profondo; e per contrario anche li gran fiumi cessano d' essere navigabili alla loro foce, se si scarichino in sito dove il mare sia poco profondo.

Nè il timore benchè ragionevole, che in progresso di tempo abbiano a formarsi delle aggestioni e de' banchi di sabbia allo sbocco del fiume, porta un bisogno di dargli da principio più sbocchi. Imperciocchè si formerà egli medesimo di per se più bocche a proporzione che le deposizioni alla foce si anderanno formando, e cresceranno a segno d' impedire lo scarico delle sue acque per una sola bocca e direzione. Così appunto è credibile che sia avvenuto nella massima parte de' fiumi, che entrano in mare per molte strade.

XXIX. Le cause e circostanze da me spiegate per determinarci ad accrescere ad un fiume il numero de' suoi sbocchi, suppongono ancora che il fiume porti grosso tributo al mare (3.°). Se la natura non mostrasse da se agli occhi di tutti, che li grandi fiumi sono quelli, che hanno molti sbocchi, e non così li piccoli, potrebbe sembrar a prima vista che li fiumi maggiori abbisognassero meno che

altri d'avere molte bocche per penetrar entro il mare; essendocchè li grossi fiumi abbondano di forza per superare gli ostacoli, e sono atti a portare ben avanti in mare le proprie torbide, e persino le sabbie; come osservò il Guglielmini parlando del Po; sopra il quale riflette in oltre che la difficoltà, che molte volte trova a entrar in mare, succede ne' rami minori particolarmente, e che questi contrastati dalle burrasche si aprono altro sbocco più breve e più facile ad altra parte (1).

Ma tutte le cose in natura hanno i loro limiti: tanto il grande che il piccolo oltre certi termini perde la sua forza. Il fiume piccolo ed anche il mediocre abbisogna dell' unione di tutte le sue acque per meglio farsi strada in mare, e tenersi aperta e scavata la foce ad una sufficiente profondità, onde non aversi a rialzare enormemente di letto nel suo alveo. Per contrario il fiume di grande portata anche diviso nel suo ingresso in mare dentro certi limiti conserva forza bastante per penetrarvi, e tenersi la foce sufficientemente profonda; come appunto si osserva, che un fiume reale mantiene il suo corso e la sua grandezza a fronte d' un qualche mediocre diversivo; quando per l' opposto ad un fiume di poca portata si rendono sensibili e dannosi li diversivi per mediocri che sieno.

Anzi deve di più succedere, che un gran fiume sortisca ordinariamente una migliore foce diviso in più d' uno sbocco, che se per una bocca sola entrasse nel mare. Questo non accaderebbe, quando le sue acque tutte raccolte ed unite entrassero immediatamente in mare profondo, ed esse medesime si mantenessero a molta altezza sopra del fondo. Ma ciò di raro, e forse nè anche mai avviene almeno per lungo tempo in alcun fiume. Il mare o si trova, o col tempo si rende poco profondo alla spiaggia presso dove mettono li fiumi, o per lo meno presenta sul suo fondo qua e là de' montoni di sabbia attraversanti gli sbocchi de' gran fiumi, come che questi vi portano sino al luogo del loro ingresso torbide, ed anche arene in copia grande. Di più siccome li fiumi richiedono il fondo della foce più elevato del letto dell' alveo dell' ultimo loro tronco, così devono avere una larghezza alla foce più ampia che superiormente; e perchè ne' gran fiumi la larghezza dell' alveo è proporzionata al loro immenso volume d' acqua, così ancora maggiore deve rendersi la larghezza della loro foce. Però le loro acque dilatate in tanta ampiezza avrebbero minor forza da affrontar il mare, da portar ben avanti in esso le loro torbide, da radere e consumare gli opposti banchi di sabbia, e da tenersi sgombra la foce e profonda a quel segno che

(1) Scrittura 15. sopra la divers. del Reno.

richiede la migliore costituzione del fiume; e che si conseguisce dalle stesse acque mentre sboccano in mare divise, e in copia raccolte in alcuni canali per entro ad esso formati.

XXX. Che se anche si supponga, che le acque d'un grosso fiume entrando in mare tutte per una bocca sola d'enorme larghezza potessero scaricarsi felicemente quanto ricerca il corso del fiume, ancora succederebbe, che in progresso di tempo venissero a dividersi in più canali, ed a formarsi più d'uno sbocco. Imperciocchè in tanta vastità di bocca o foce non sarebbe possibile, che da per tutto trovassero ugual facilità d'entrar in mare, e da pertutto si mantenessero egualmente aperto lo sbocco; ma dove minori fossero gli opposti ostacoli dei banchi di sabbia, delle onde del mare, e dei venti burrascosi prenderebbero maggiore corso, e con ciò verrebbero a formarsi necessariamente de' canali e sbocchi nel tratto medesimo della loro ampia imboccatura; e quindi in vece di continuar a mantenersi quella sola prima supposta bocca, e tutte entrar nel mare per la medesima strada, vi sboccherebbero da più parti; e tra le molte diverse bocche aperte, quella diverrà la più ampia e profonda, per la quale avrà il fiume trovata maggior facilità d'insinuarsi in mare. E perchè, se non un solo, assai pochi almeno ponno essere li siti e le direzioni, per cui riesca ugualmente facile l'ingresso e corso del fiume in mare, ne nascerà, che tra li molti sbocchi generati un solo, o pochi più d'uno sieno quelli pe' quali corra e si scarichi il maggior corpo d'acqua del fiume, e che si preservino al cangiarsi e moltiplicarsi degli altri minori, che servono come di supplemento. E tali massimi sbocchi costituiscono la foce corrispondente al gran fiume, sul fondo della quale come base si appoggia e si regola la cadente del medesimo fiume.

E qui è anche da considerarsi, che i gran fiumi camminano con poca pendenza, ed anzi per un alveo orizzontale verso la foce, e tanto più a lungo quanto sono più grandi; e però se anche la loro foce per la divisione delle acque fatta col moltiplicare gli sbocchi riesca meno profonda, ciò può farsi senza che essi fiumi ricevano danno, come ne riceverebbero li fiumi minori e bisognosi di molta caduta. Così vediamo che il Po corre a Lago scuro sopra un letto circa 20 piedi sotto terra, benchè la sua foce non sia più profonda di cinque piedi. Da tutto questo risulta, che ne' fiumi primarj la moltiplicità degli sbocchi non è dannosa, ma piuttosto utile, e che perciò si può e si deve ammetterla, e che anzi riesce d'ordinario inevitabile.

XXXI. Li proposti principj, che servono di regola per conoscere e distinguere in quali circostanze, ed in quali fiumi sieno da moltiplicarsi gli sbocchi, sono anche come di guida e norma all'ingegnere

per fissar il numero degli stessi sbocchi per un dato fiume; purchè alla considerazione di essi principj vi aggiunga l' esame e la cognizione della natura e costituzione particolare dello stesso fiume, e delle cause, per cui esso fiume od altro simile si trova in uno stato buono, o cattivo. Così appunto nel fissar la pendenza per un nuovo alveo d' un fiume consultiamo la natura del medesimo fiume, la pendenza che aveva prima, e quella ancora di altri fiumi simili col dovuto riflesso della felicità od infelicità dell' attuale loro corso.

In massima sarei di parere, che a pochi fiumi fossero da moltiplicarsi gli sbocchi, cioè ordinariamente soltanto ai fiumi maggiori e di grande portata, e che non mettono immediatamente nel mare profondo. Mal si applicherebbe ai fiumi la legge di finir col dividersi, e disperdersi in molti rami, come da molti traggono il loro principio ed incremento. Crederei in oltre, che anche in que' fiumi stessi, ne' quali occorre e giova moltiplicare gli sbocchi, non dovesse l'idrometra estenderne il loro numero che a due o al più a tre. Con tal numero si provvede a sufficienza alla causa ed al fine, per cui si rende necessaria ed utile la moltiplicità degli sbocchi, senza indebolire la forza del fiume, nè pregiudicare alla conveniente profondità della sua foce. Che se pur il fiume fosse per esigerne un maggior numero, lascierei che il medesimo se ne formasse da se altri di nuovi all' occorrenza subdividendo quelli da prima ricevuti. La natura non ha bisogno di tutto ricevere dalla mano dell' uomo. Le basta un qualche aiuto; il resto opera e ottiene da se, e spesse volte assai meglio di quello, che l' arte sappia procurarle.

CAPITOLO III.

De' principj per fissar la direzione degli sbocchi d' un fiume nel mare.

XXXII. Il punto, che risguarda la direzione da darsi agli sbocchi de' fiumi nel mare, è di tanta importanza, che può decidere della sistemazione buona e cattiva d' un fiume. Imperciocchè spesse volte, come osserva il Guglielmini (1), la mala situazione dello sbocco è causa d' inondazioni, recando resistenza al fiume; e a ciò rimediare miglior consiglio viene giustamente riputato quello di provveder il fiume d' una foce di buona direzione piuttosto che fare delle diversioni dispendiose, o d' ostinarsi a superare la mala direzione dello sbocco; come l' abate Mari osserva e dimostra essersi in vano praticato

(1) Della nat. de' fiumi cap. 5.

nel porto di Ravenna (1). Convien per altro confessare, che questo punto di tanta importanza non è sempre de' più facili che abbia la scienza de' fiumi. Chiunque imprenda a fissar la direzione da darsi allo sbocco d' un fiume nel mare d' uopo è, che abbia presenti tutte le molte diverse cause sì generali, che particolari, le quali ponno concorrere ad agevolar e render felice il medesimo sbocco, come anche le altre, che vagliono a difficoltarlo e danneggiarlo, e che ne faccia i confronti, e ne rilevi e comprenda il valore sì delle une che delle altre. Non si manca tuttavia di lumi per procedere convenientemente anche in questo; e l' esperienza del buon esito di varj nuovi sbocchi, che l' arte ha procurato ai fiumi, come antecedentemente si è indicato, ci assicura maggiormente, che il problema anche in questa sua parte è solubile.

Un principio pertanto, col quale fissar la direzione dello sbocco d' un fiume in mare, si è di fare, che il fiume vi si porti e scarichi direttamente, e col minor allungamento di linea che sia possibile. Attenendoci a questo solo principio, che ci viene suggerito dal riflesso di agevolar la discesa del fiume, e di secondare la sua forza per farsi strada in mare, converrebbe lasciar alla natura del fiume la scelta d' alcun' altra direzione per entro il mare, quando quella asseguatali non fosse la migliore anche rispetto alle cause, che agiscono sullo sbocco del fiume. Ma quando si può e si sappia, che giova, deve l' uomo prevenire l' intento e lo sforzo della natura. La considerazione pertanto d' alcun altro principio ci metterà a portata di conoscere quando e come convenga mettere in pratica o modificare il proposto principio, onde conseguire l' oggetto contemplato negli sbocchi de' fiumi in mare, qual è il pronto e facile scarico delle loro acque singolarmente nelle escrescenze e piene de' medesimi.

XXXIII. È chiaro, che gli sbocchi de' fiumi in mare devono risentire il contrasto e l' ostacolo delle correnti del medesimo, quando vi si oppongano, e tanto più quanto più direttamente vi si opporranno. Per evitare dunque l' impedimento e il ritardo, che le correnti del mare ponno apportare allo sbocco e scarico del fiume, fa d' uopo avere in riflesso tali correnti nella direzione da darsi all' ingresso del fiume in mare.

Quanto al moto del flusso, per cui succede che l' acqua del mare si porta verso i lidi, e vi si alza, e al moto del riflusso, per cui nasce il contrario, non si crede, che nella direzione da fissarsi per lo sbocco d' un fiume convenga aver riguardo a questi due moti, mentre succedendosi alternativamente, se il primo s' oppone al corso del

(1) Idraul. prat. vag. T. II. sez. 19.

fiume, e lo fa alzar di pelo, l' altro lo seconda, e gli dà adito di correre, e scaricarsi con più veemenza. E se anche accada, che il mare co' suoi flussi ordinarj sollevi sabbie dal fondo, come taluno asserisce, l' esperienza dimostra, che dalle semplici maree non ricevono danno, come opinò un valente idrostatico, ma piuttosto benefizio gli alvei e sbocchi de' fiumi. E poi come mai si potrebbe mettere lo sbocco d' un fiume al coperto dalle ordinarie quotidiane maree?

XXXIV. Un altro moto, e questo perpetuo si osserva ai lidi del mare Mediterraneo, e specialmente dell' Adriatico, nel quale le acque corrono radendo i lidi d' Italia da sinistra a destra. In vigore di questo moto conosciuto dall' ingegnere Cristoforo Sabbadino avanti il celebre Montanari, come egli stesso avverte, ma da lui con diligenza osservato, e con molte prove dimostrato (1), è facile da vedersi, che gli sbocchi de' fiumi devono piegar a destra nell' Adriatico, come notò il Guglielmini (2). Imperciocchè sebbene l' accennata corrente sia assai lenta e minore del corso di qualunque fiume, come quella che non fa, per le osservazioni del Montanari, che 3. in 4. miglia ogni 24. ore; pure mantenendosi costantemente, comunque variar possa in varj siti la sua velocità, deve, quando null' altro si opponga, obbligar lo sbocco del fiume a secondarla in parte almeno nell' atto stesso che essa viene rapita dal moto maggiore del fiume medesimo; il qual perciò nel suo primo entrar in mare, e finchè non arrivi a perdere le forze del suo proprio corso prenderà una direzione come composta della propria, e di quella della corrente del mare.

XXXV. Che se osservò il Montanari, e dopo di lui notò lo Zendrini (3) ed altri, che li fiumi dello stato Veneto, ed altri ancora dello stato Ecclesiastico, piegano d' ordinario sopra vento, cioè a mano sinistra co' loro sbocchi formando banchi di sabbia a destra, ciò succede, perchè alla destra del fiume, manca il moto litorale del mare per essere tagliato e interrotto dal corso del fiume, che lo attraversa; e colla mancanza di tale moto atto a spinger avanti da sinistra a destra li sabbioni smossi e sollevati dall' onde e dai venti, come anche altra materia incorporata coll' acqua, ne nasce quindi, che da questo lato destro dello sbocco del fiume si depongano, e si estendano le torbide del fiume, e vi restino e si ammassino le sabbie sollevate e spinte dal mare burrascoso, le quali ben presto giungono a formare de' grandi e insuperabili scanni, che colla loro resistenza fanno

(1) Il mare adriatico e sua corrente. Racc. T. IV.
(2) Cap. 8. prop. 4. cor. 7.
(3) Relazione per la diversione de' fiumi Ronco, e Montone cap. 4.

piegato il fiume verso sinistra, dove gli scanni si generano più tardi e meno estesi, perchè la corrente del mare sospinge le arene, ne impedisce la deposizione, e coll' unirsi e confondersi con quella del fiume cospira e tende con esso a portar avanti in mare le torbide del fiume medesimo, come ingegnosamente spiega il lodato Montanari; e la sua spiegazione è ammessa e comprovata dallo Zendrini, e da altri. Che se il fiume giunga col suo corso ad estendersi in mare più avanti degli scanni, che gli fanno sponda a destra, e lo sforzano a piegare a sinistra, allora cessa di più rivolgersi da questa banda. Così il fiume Savio, per osservazione del chiar. ab. Mari dopo di aver interrito a destra piega il corso a sinistra per sortir dagli interrimenti, per rivolgersi nuovamente a destra alla spinta del moto radente (1).

Parimente dove per la deposizione del lido, o per lo sbocco vicino a sinistra di altro fiume, o per altra cagione succeda, che da questa parte si formino scanni ugualmente od anche più che alla destra del fiume, allora si vedrà lo sbocco di questo fiume voltarsi sotto vento o sia a destra, come osservò il Guglielmini in fiumi della Romagna, e del Ferrarese (2), e lo Zendrini nelle bocche del Po dal Camello in giù (3), e spezialmente in quella di Goro. Anche il Sile ha presentemente la sua foce verso la destra, e quasi radente il litorale. Il che può essere provenuto per le sabbie ammassate dal lato sinistro a cagione della Piave, che sbocca da questo lato per il porto di Cortellazzo.

Le foci delle acque salse, come sono quelle ai porti delle lagune di Venezia, si trovano tutte dirette a destra, come avvertì il Montanari (4); anzi lo Zendrini (5) asserisce, che voltano a destra i porti delle lagune *salse o dolci* che sieno; perchè tali acque non discendono e sboccano per impeto ricevuto superiormente, ma in quanto che le stesse acque del mare collo scemar nel riflusso tirano seco quelle, che durante il flusso erano entrate nella laguna; e perciò non avvi ragione, per cui quest' acque non seguano il corso del mare da sinistra a destra voltando da questo lato il filone della loro corrente, e con esso il canale più scavato detto la foce. Da questa proprietà degli sbocchi e foci delle acque marine crede lo Zendrini poter esser derivato, che anche il fiume Lamone tenesse rivolta la sua foce a destra verso scirocco. Imperciocchè lasciando quel fiume

(1) Idraul. ec. T. II. lez. 12.
(2) Cap. 8. prop. 4. della nat. de' fiumi.
(3) Relazione citata.
(4) Nel citato disc. sopra il mare Adriatico.
(5) Relazione citata cap. 4.

il proprio alveo in alcun tempo dell' anno del tutto o quasi del tutto in asciutto dava adito alle acque del mare di occupar la di lui bocca, e volgerla secondo le leggi delle acque salse.

XXXVI. Credo, che meritino d' essere qui riportate alcune osservazioni del maestro del Guglielmini, utili a sapersi, e che fanno a nostro proposito.

Allorchè la Piave nel 1664. con un taglio fu divertita dal vecchio alveo e portata a sboccar in mare per il porto di S. Margherita vicino a Caorle, la foce di quel porto, che prima era diretta a destra, come formata per la maggior parte d' acqua salsa, si rivolse a sinistra, distruggendosi li banchi di sabbia già prima esistenti a quella parte; e frattanto se ne produssero di sì grandi ed estesi a destra da formare in 20. anni una nuova spiaggia lunga più miglia presso quel lido, e larga alcune centinaia di passi. Per contrario la foce dell' alveo abbandonato dalla Piave mutò direzione da sinistra a destra, dopo che quell' alveo divenne ricettacolo delle sole acque del mare, che vi entrano ed uscivano nel flusso e riflusso; e si videro anche distrutti li banchi di sabbia esistenti a destra, finchè la Piave continuò a discender per esso alveo in mare. Poscia portato il Sile a scaricarsi nel mare per quel medesimo alveo e sbocco vecchio della Piave, tornò a cangiarsi la direzione della foce, piegando di nuovo da destra a sinistra; e di nuovo sparvero li banchi di sabbia a sinistra formandosene alla destra. Similmente avendosi la Piave nell' inverno sul principio dell' anno 1684. con una rotta aperta nuova strada al mare per il porto attuale di Cortellazzo, abbandonando quello di S. Margherita, tornò la foce di quest' ultimo porto a piegar a destra, e si videro un' altra volta a comparire li banchi di sabbia a sinistra, e dileguarsi quelli alla destra.

Queste osservazioni mostrano, come riflette il Montanari medesimo, che il moto litorale spinge, e porta avanti le sabbie, e che dove questo viene interrotto, si accumulano verso il lido, e vi sorgono degli scanni, i quali sono originati non solo dalle materie, che vi portano i fiumi, ma da quelle ancora del mare; e forse più da quelle portate e deposte dal mare, che da quelle, che attualmente vi depone il fiume; mentre il Sile nascendo da fontane situate nella pianura sopra Trevigi scorre sempre chiaro e limpido; e la Piave stessa sebben fiume torbido, giungeva sempre chiara anche in tempo delle sue grandi piene al porto di S. Margherita; perchè molto prima d' arrivare a quel porto entrava e si spandeva in un lago del giro di 30. miglia dove perdendo ogni vigore del suo corso deponeva tutte le sue torbide. Le stesse osservazioni unite ad altre fatte dallo Zendrini ci rendono avvertiti di tenere gli sbocchi de' fiumi lontani dai porti situati a destra del loro sbocco. Lo Zendrini, il Frisi, ed

il Mari prescrivono questa distanza non minore di 6, o 7. miglia per assicurar il porto dal ricevere interrimenti dallo sbocco del fiume. Ma se il porto sarà a sinistra dello sbocco del fiume, non ci sarà bisogno di tanta distanza, perchè non soffra danno dalle sabbie, che porta il fiume, mentre in questo caso viene contro esse difeso il porto dal moto litorale.

XXXVII. Dopo tutte queste cose, che ho stimato non inutile di notare qui in proposito della corrente dell' Adriatico radente il lido, credo di poter conchiudere, che per riguardo a tale moto del mare, basti osservar nella direzione da darsi allo sbocco del fiume, che non sia direttamente opposta a quella; e però se per donare al fiume una via più diretta e spedita si dovesse portarlo a tagliar ad angolo retto la direzione del moto radente, non tralascierei di farlo, quando altri riguardi non lo vietassero; poichè sotto questa direzione non soffrirebbe resistenza ritardante dallo stesso moto del mare. Ma se la migliore direzione rispetto al corso del fiume si combinasse in parte almeno con quella del moto litorale, in tal caso sarebbe da diriggersi lo sbocco del fiume in guisa, che non solo non si opponesse, ma secondasse in parte l'andamento di esso moto, purchè altri oggetti d'importanza non esigessero altra direzione; mentre si verrebbe ad agevolarsi maggiormente l'ingresso del fiume in mare facendosi a seconda del suo moto perenne, come vediamo farsi le correnti dei porti o sbocchi di acque salse, che non sono dirette da altra forza che da quella dipendente dal flusso e riflusso, e dal moto litorale; e di più si faciliterebbe anche il trasporto avanti in mare delle sabbie che di continuo giungono allo sbocco del fiume portate dal moto radente.

Nè l'esperienza degli sbocchi di tanti fiumi, che piegono a sinistra sarebbe per se stessa una buona ragione per non dirigere lo sbocco nel modo proposto; dacchè si è veduto, che quella direzione degli sbocchi de' fiumi a sinistra anzi che essere la più naturale e confacente, è cagionata da impedimenti, che si vanno formando dal lato destro, i quali tosto che il fiume giugne a sorpassar coll' innoltrarsi in mare, torna a piegare a seconda del moto radente; e dove si generano e s'incontrano al lato sinistro impedimenti simili a quelli, che si producono al lato destro, presceglie il fiume di entrar a dirittura in mare, o di direggersi collo sbocco a mano destra secondando il moto del mare senza piegar nè prima nè dopo alla sinistra (n. 35).

Vediamo, che anche la massima parte de' fiumi sono obbligati a muoversi per alvei tortuosi; e non per questo si preferirebbe di dare ad un fiume una direzione composta di svolte in vece d'una direzione per linea retta trattandosi di dovergli assegnare quella tal direzione, che meglio convenga al corso ed allo scarico delle sue

acque. Che di più ordinario succede negli sbocchi de fiumi, che di vederli ad interrirsi in progresso di tempo e ad essere attraversati da scanni? E per questo si farà forse scelta per lo sbocco d'un fiume d'un sito, dove il mare sia di fondo più elevato, e più scanni contenga da opporre all'ingresso dell'acque del fiume?

XXXVIII. Ho detto di assegnar allo sbocco del fiume l'accennata direzione, quando altri oggetti o riguardi non vi si opponessero. Questi riguardi, che non si ponno trascurare, ma che si devono aver in considerazione trattandosi dello sbocco d'un fiume nel mare, sono quelli dei venti gagliardi che spirano sul mare sollevando e spingendo avanti le sue onde.

Comunque si questioni tra sommi Idrometri, se il vento da se solo vaglia a recar impedimento sensibile al corso d'un fiume, ed a farlo alzar notabilmente di pelo, è osservazione certa, come si è avvertito al n. 15., che per la furia de' venti, che agitano il mare, e lo sollevano in onde voluminose, che si slanciano con veemenza contro gli opposti lidi e gli affogano, lo sbocco e corso del fiume soffre grande impedimento, e il pelo delle acque in esso fiume s'innalza considerabilmente lungo l'alveo a segno, che l'aumento d'elevazione giugne a farsi vedere molto tratto superiormente al punto fin dove arrivano li rigurgiti ordinarj del mare. Anzi per le osservazioni fatte dallo Zendrini sul Po, si raccolse da lui medesimo, che l'innalzamento, che fa prendere al fiume il mare in tempesta, riesce ancora maggiore, e più avanti superiormente s'innoltra di quello importi il livello, a cui si solleva il mare nelle sue grandi burrasche (1).

Nè solo i venti sono di pregiudizio ai fiumi col mettere ostacolo allo scarico delle loro acque, e col renderli maggiormente gonfi e alti di pelo; ma più ancora collo spingere nelle tempeste l'arena alle spiaggie e avanti e dentro gli sbocchi, che ne rimangono gravemente danneggiati.

XXXIX. Per evitar quanto è possibile simili dannosi effetti nel sistema del fiume, si vede cercar di dare al suo sbocco una direzione per cui declini quanto più si può l'incontro e l'impeto diretto di que' venti, che con veemenza sogliono spirare sul mare, dove il fiume va a scaricarsi.

Nel mare Adriatico contro una buona parte del lido d'Italia si osservano spirare tre venti principalmente, cioè lo scirocco, il levante, ed il greco, e alcuni siti soggiaciono anche al vento di tramontana; ed altri all'Ostro; e taluno al Garbino. Non potendosi

(1) Cap. 8. n. 41. delle leggi e fenomeni ec.

ottenere ne' luoghi, dove dominano cotali venti in numero, che la direzione dello sbocco d'un fiume declini affatto da quella contraria di ciascuno di essi venti; e meno possibile, essendo che in tutte le burrasche del mare sia lo sbocco del fiume affatto al coperto dall'impeto dell'onde, che scorrono ora da una parte ora dall'altra; si cerchi di dare allo sbocco quella direzione, per cui meno che in alcun' altra soffra contrasto e danno lo scarico e sbocco del fiume dalle correnti del mare eccitate e sostenute per la forza dei venti, e delle sabbie, che in gran copia vi trasportano ed ammassano.

XL. Chi senza altro riflettere badasse alla direzione degli sbocchi di molti de' nostri fiumi nel seno Adriatico in siti della sua spiaggia esposti a tre venti di scirocco, levante, e greco, potrebbe facilmente indursi a credere, che si dovesse sempre cercar di mettere lo sbocco del fiume al coperto dallo scirocco, piuttostocchè dagli altri due venti, vedendo come li fiumi declinano co' loro sbocchi dal vento di scirocco col volgersi ordinariamente a sinistra. Ma di questo fenomeno si è già resa altra ragione. E qui per conferma, che il voltar che fanno li fiumi il loro sbocco in mare a mano sinistra non nasce in forza del vento di scirocco, nè in genere perchè con ciò declinino dai venti più contrarj e nocivi all'ingresso e scarico delle loro acque in mare, e si facciano incontro ai meno burrascosi e danneggianti, aggiungerò che la Piave per declinar dal suo lato destro passò a diriggersi anche verso scirocco. Imperciocchè nel principio del suo sbocco in mare per l'attual suo porto di Cortellazzo, che seguì, come si disse, nell'inverno del 1683 al 1684. aveva la sua foce diretta per ostro garbino, come racconta il Montanari, e a poco a poco andò piegando verso ostro, e indi verso ostro-scirocco, ed a scirocco; e a questi ultimi tempi trovasi rivolta colla foce a scirocco levante, tagliando la spiaggia pressocchè ad angoli retti. Lo Zendrini rilevò, che il fiume Savio seguendo la legge di piegar a sinistra aveva lo sbocco voltato contro il vento di tramontana (1). E già il Montanari primo scopritor di questo fenomeno aveva raccolto e notato, che li fiumi piegano la foce a sinistra e depongono a destra comunque la spiaggia del mare si trovi variamente disposta riguardo ai venti, e dove a questi, dove a quegli altri venti stia rivolta; come per contrario le acque delle lagune sboccando in mare, e scaricando in esso molta copia d'acque marine ricevute nel flusso, voltano tutte il filone della loro corrente, e quindi il canale è più scavato a mano destra, non ostante che rispetto ai venti sia variamente la loro bocca situata. Tuttavia sia per la sopra indicata osservazione, sia perchè

(1) Relazione cit. c. 4.

consta, che alcune volte dominando lo scirocco si alza non poco il livello del mare, sia per altri motivi, si sa essere opinione di molti, che convenga difendere lo sbocco del fiume principalmente dallo scirocco, come che questo fosse il più dannoso d'ogni altro vento ai fiumi.

Io non chiamerò il vento di scirocco innocente riguardo allo sbocco e scarico de' nostri fiumi. Imperciocchè spingendo avanti le acque del mare e obbligandole ad elevarsi, deve anche rallentare il corso del fiume, tenerlo in parte sospeso, e far rialzare il pelo delle sue acque. Ma sono di parere, che dovendosi portar un fiume a sboccar in mare ad una spiaggia soggetta ad essere investita dalli tre venti scirocco, levante, e greco, si abbia a temer assai meno d'affrontare lo scirocco che il levante, ed anche il greco. Imperciocchè il vento di scirocco suole spirare con certa equabilità, ed è assai meno furioso del levante, se non anche del greco. Per ciò sebbene quando è nel suo maggior vigore, e vi si mantiene a lungo, vaglia a spinger avanti le acque a segno di farle alcune volte gonfiar ai lidi dello Stato Veneto, *fin due o tre piedi sopra il comune*, come notò il Montanari, (dell'altezza delle maree a Venezia diremo nel cap. IV.), non può recare notabile sconcerto al fiume, quando altri venti ancora non vi si uniscano. È anche da riflettersi, che l'alterazione, che risente il fiume per il solo vento di scirocco nasce in tutto o nella massima parte in quanto che il mare alzandosi di livello si spande a ridosso del fiume, monta pel suo alveo per mettersi ad equilibrio, e obbliga il fiume ad elevarsi. Ora un simile effetto succederebbe, quand'anche lo sbocco del fiume non guardasse il vento di scirocco.

Per contrario altri venti, quando si fanno gagliardi e forti, come appunto si manifesta in certi tempi il vento singolarmente di levante spirano furiosamente, ed incalzano sull'Adriatico, e contro le opposte spiagge d'Italia, agitando il mare dai fondi, spingendo con veemenza le sue acque e sollevandole enormemente in onde spaventevoli, che furiose si scagliano sopra i lidi, e rapidamente scorrono su per lo sbocco del fiume, che incontrano, e si ammonticchiano lungo il fiume stesso, dove confuse colle sue acque pur sollevate, non potendo più essere contenute, si gettano e si spandono ne' vicini bassi luoghi. Tali fenomeni si osservano a certi lidi e spiagge esposte ai tre venti di scirocco, levante, e greco, nelle grandi e massime tempeste dell'Adriatico; e le tempeste le più frequenti, e più grandi, e dannose a quelle stesse spiaggie sono prodotte dalla furia de' due venti greco e levante, ma principalmente dal vento di levante.

Ma non tutto il danno, che li venti burrascosi recano alli fiumi, consiste nel tenerli in collo, e farli rialzar di pelo coll'accresciuto

livello del mare, e coll' impeto, che esercitano le acque di questo contro il loro sbocco. Uno sconcerto ancora maggiore e più dannoso ricevono li fiumi dalle tempeste del mare per le sabbie, che vi portano attraverso e dentro i loro sbocchi.

Siccome però lo scirocco non agita con violenza il mare, non lo solleva in grandi onde, non islancia con impeto le sue acque, così non deve neppure sollevare da' suoi fondi copia di sabbia, nè spingerla verso la spiaggia, e dentro gli sbocchi de' fiumi. Anzi apprese il Montanari dai pratici di marina, che lo scirocco *zappa* il lido, cioè ne rimuove le sabbie. Il che se sia vero, come viene ammesso anche da altri posteriori Scrittori, che parlano dell' Adriatico, potrebbe succedere a motivo che le acque del mare alzandosi al soffiar temperato dello scirocco, e scorrendo lungo i lidi quasi come nel flusso smuovano l' arena; e indi ritirandosi al cessare del vento, seco traggano ed asportino la stessa arena smossa e sollevata.

Ma gli altri venti furiosi, come il levante, che generano le sopra indicate tempeste dell' Adriatico, fanno colla violenza del moto, che imprimono all' acque del mare, sollevare dai suoi fondi specialmente ne' siti di minore profondità, le sabbie, e dove radenti il fondo, dove incorporate e sollevate colle stesse onde le spingono e le portano ben avanti dentro lo sbocco che incontrano, dove ammassandosi rendono stentato e difficile lo scarico del fiume, e ne sconcertano tutto il suo sistema.

XLI. Da tutte queste riflessioni risulta, che il vento di scirocco è meno contrario, e dannoso allo sbocco d' un fiume, che gli altri due sunnominati. Rispetto a quello di levante non vi può essere il menomo dubbio; ma si potrebbe tuttavia dubitare, se lo scirocco sia anche meno dannoso del greco, perchè questo non suol divenir forte e impetuoso a quel segno, che si è detto del levante producitor delle più alte e rovinose burrasche. Ma se le massime tempeste sono mosse e prodotte dalla furia del vento di levante, le più frequenti benchè di minor impeto, è credibile che vengano cagionate dal vento greco. È osservazione costante, che in Venezia ed in altri luoghi di quel dominio, ogni qual volta il tempo si mette a pioggia generale e di durata, soffia vento da greco. Io credo, che questo tal vento, che annunzia l' imminente ed abbondante pioggia per uno o per molti giorni, e che fedelmente l' accompagna, sia un vento riflesso, giacchè non di raro si vede spirar il vento greco anche a cielo sereno costante, e sarà questo il vero e diretto vento greco. Ma quand' anche l' altro sia vento riflettuto dalle montagne, non cessa perciò, ch' egli venga, e soffi sull' Adriatico dalla plaga di greco. E siccome è cosa ordinaria, che ne' giorni molto piovosi insorga del vento gagliardo, e che il mare si trovi agitato ed in qualche burrasca; così

è da credersi, che il vento da greco, benchè meno violento e furioso del levante, agiti piucchè quello da scirocco il mare, produca burrasca, e ne spinga le onde e le sabbie verso le opposte spiaggie e gli sbocchi de' fiumi.

XLII. Per conseguir adunque d' evitar possibilmente il maggior contrasto ed ostacolo dei venti, ed i maggiori sconcerti, che essi ponno apportar al fiume col mare in burrasca, gioverà disporre e regolar la direzione dello sbocco del fiume in guisa che declini dal levante verso scirocco; uniformandosi con ciò la corrente dello sbocco del fiume al moto radente, e all' andamento più confacente all' acqua del mare. È cosa degna da notarsi, che nemmeno le bocche dei porti delle lagune Venete si trovano rivolte a greco, od a levante. Li porti, scrive il Montanàri, di Lido maggior, e Cortellazzo riguardano in faccia di garbino; e quelli di Chiozza, Malamocco, e S. Niccolò guardano ai contorni di scirocco. Siccome i saggi che fecero costruire, o regolare, e stabilir quelle sboccature avevano sperienza della forza e dell' effetto de' venti sul mare contro que' lidi, così coll' aver essi conformate e disposte le bocche di que' porti in modo che declinassero l' incontro de' due venti di greco e di levante, e si affacciassero allo scirocco, od al garbino, ci somministrano come una nuova prova e conferma per credere, che meno sia da temersi per uno sbocco di affrontar il vento di scirocco, che quello di levante od anche di greco, e che allo sbocco d' un fiume in sito sottoposto al contrasto di questi tre venti convenga meglio riguardo ad essi venti la direzione verso scirocco, che altra verso il vento di levante, oppur anche verso quello di greco.

XLIII. Per altro alcune circostanze particolari e proprie della situazione, dove il fiume mette in mare, come la direzione dei lidi a destra ed a sinistra, il fondo più o meno elevato del mare da questa o da quell' altra parte, la vicinanza dello sbocco di altro fiume, potranno ancora servir di regola all' ingegnere per fare, che la direzione dello sbocco del fiume pieghi più o meno, od anche niente verso scirocco, ma si rivolga ad altra plaga, e secondi la via più breve e diretta dello scarico del fiume in mare. Se, per atto d' esempio, si dovesse portar un fiume a sboccar in sito, dove la spiaggia a sinistra a qualche intervallo si dirigesse in guisa non solo di difendere lo sbocco interamente dal vento di tramontana, ma di proteggerlo ancora in qualche parte dalle ingiurie di quello di greco, e dal lato destro si trovasse avere lo sbocco di altro grosso fiume in pochissima distanza, in simili circostanze potrebbe venir a ragione preferita per lo sbocco la direzione verso greco a quella verso scirocco. Anzi anche la sola vicinanza d' uno sbocco d' altro grosso fiume a destra potrebbe essere un motivo bastante per determinarci a

portar il fiume a sboccar a mano sinistra, e con ciò metterlo al coperto dal vento di scirocco invece di salvarlo dal greco; e molto più poi se il fondo del mare si trovasse meno ingombro ed elevato verso la sinistra, che più si discosta dalle aggestioni del vicino sbocco. Una maggior notabile profondità, che per avventura si trovi dove portasi a sboccar il fiume, è una delle migliori condizioni, che si desiderano per la felicità e preservazione dello sbocco.

E se la spiaggia, dove il fiume entra in mare fosse soggetta al contrasto e violenza d'altri venti in vece delli tre, che abbiamo considerati, reggerà sempre la stessa regola di portar il fiume a sboccar con direzione da declinare, per quanto le circostanze ed altri principj lo permettono, l'incontro del vento il più dannoso. L'esperienza, l'esame locale, come anche quello degli altri sbocchi di altri fiumi, se ce ne sieno in siti analoghi, farà conoscere quale sia questo tale vento. Potrebbe in un qualche sito succedere, che un vento, che soffia più gagliardamente d'un altro, vaglia meno a danneggiar coll' onde e colle sabbie marine lo sbocco d'un fiume; e ciò per certe particolari circostanze, come per la diversa profondità del mare, o per la sua poca estensione verso il lato da cui spira quel tal vento, o per altre cause locali da rilevarsi coll' osservazione.

Per que' tratti del lido d'Italia sull' Adriatico che soggiaciono anche al vento di tramontana, si troverà che questo pure è comunemente uno de' venti più danneggianti gli sbocchi de' fiumi, come quello, che col suo vigoroso soffio spinge, solleva, e porta avanti le sabbie, e ne carica gli sbocchi.

XLIV. Ho contemplato fin qui il caso più comune e frequente, qual è quello d'uno sbocco solo da darsi al fiume. Che se si trattasse d'un qualche fiume di più sbocchi, allora o il fiume si divide alquanto prima d'arrivar al mare in più rami, come in più sbocchi, o tutto unito giunge fino al mare, ed ivi nel suo primo entrar deve avere più strade o bocche. Dove avesse luogo la prima supposizione, varranno per la direzione da farsi prendere agli sbocchi gli stessi principj, e le stesse riflessioni, che regolano lo sbocco del fiume, che non ne ha più d'uno; quando però gli sbocchi non fossero troppo vicini. In questo caso, come anche nella seconda supposizione poch' anzi fatta, il miglior consiglio parmi che sia quello di fare, che uno sbocco sia rivolto ai contorni d'un vento, ed un altro a quei d'un altro vento per quei fini, che ho riferito trattando dei vantaggi della moltiplicità degli sbocchi; ed anche perchè uno sbocco meno pregiudichi all' altro vicino. Con quest' avvertenza però di preferire possibilmente il contorno dei venti meno gagliardi e burrascosi, come ordinariamente sono sulle nostre spiaggie dell' Adriatico il garbino, l'ostro, e lo scirocco in confronto, del levante, greco, e tramontana.

Sebbene il fiume Adige per essere cotanto sconcertato e vizioso colla colmatura del suo letto non meriti d' esser preso in esempio; e ci sia tutta la probabilità, che fosse per essere meno guasto e rovinoso, qualora con un taglio alla destra del suo tronco inferiore venisse portato per una linea più diretta e breve a scaricarsi in altro sito e sotto altra direzione in mare; ed anche con una bocca sola in vece di tre; tuttavia le attuali sue tre bocche, quali abbiamo altrove descritte (n. 6.), trattandosi che il fiume si porta al mare per la direzione, che guarda il levante, e vi sbocca su d' una spiaggia sottoposta ai tre venti di scirocco, levante, o greco, potrebbero servire di qualche norma per disporre e dirigere per entro il mare le molte bocche d' uno stesso fiume. Imperciocchè non è mai credibile, che li vizj presenti dell' Adige nascano e dipendano propriamente dalle direzioni tra loro tanto diverse delle sue tre bocche; che anzi per lo contrario si può giustamente credere, che l' apertura prodotta naturalmente di quelle tre bocche o foci diversamente rivolte, e specialmente delle due laterali, serva ad impedire maggiori sconcerti e danni; mentre per esperienza si sa, che il fiume ottiene per le due bocche laterali, e principalmente per quella a destra quello sfogo, che in darno si sforza di conseguire e mantener per l' antica bocca a dirittura del suo corso, ma che riceve come di fronte il levante, il quale la tiene ingombra a dispetto di tutta la forza del corso più diritto del fiume.

CAPITOLO IV.

Delle pratiche per istabilire la sussistenza degli sbocchi de' fiumi nel mare, massimamente per le acque scarse, e per l' opposizione de' venti.

XLV. Sebbene abbiasi scelta per lo sbocco d' un fiume e fissata la miglior direzione, non è tuttavia da promettersi, che ogni qualunque fiume da per se, e senza altri aiuti della mano nell' uomo si preservi a lungo la felicità procuratagli del suo sbocco, quando specialmente si tratti d' un fiume scarso d' acque. Imperciocchè di raro accade, e forse anche non mai, che il sito e la direzione dello sbocco riesca tale, che di per se vaglia a metter e tener lo sbocco stesso al sicuro dagl' insulti de' venti e delle burrasche, ed a fare che il fiume di poca forza, e senz' altri sussidj dell' arte se lo renda e preservi sgombro e netto non solo dalle aggestioni delle proprie torbide, ma dalle sabbie ancora, che l' acqua del mare agitata e spinta dai venti solleva e seco porta verso il lido, dove ne depone a carico e danno dello sbocco del fiume, col fare non solo spesso

mutar sito e direzione alla sua corrente per entro il mare, ma ciocchè è al sommo dannoso, coll' interrire ed alzar il fondo della sua foce. Per ciò la R. Accademia domanda anche che si assegnino le *pratiche per istabilire la sussistenza degli sbocchi* de' fiumi nel mare, *massimamente per le acque scarse*, e per *l' opposizione de' venti*: essendo che per queste due cause spezialmente abbisognano gli sbocchi dell' industria umana, onde non abbiano a rendersi difettosi ed infelici, mentre per la prima non può mancar la forza nel fiume da tenersi ben aperto e profondo lo sbocco nel mare; e per l' altra si accresce e diviene troppo valido e nocevole l' obice e contrasto, che si forma e si presenta all' ingresso dell' acque del fiume in mare.

XLVI. Fra gli altri mezzi, che con buon successo da più secoli mette in pratica il saggio e sperimentato governo dell' immortale Serenissima Repubblica di Venezia per impedir l' introduzione delle sabbie del mare nelle sue lagune, e per preservar liberi e profondi i porti e sbocchi delle medesime, uno si è quello delle *Palade* come volgarmente le chiamano. Una specie di queste sono i così detti guardiani eretti ad oggetto di fermar le sabbie marine, che il mare tenta d' introdurvi pei porti. Il Montanari che nel 1681. visitò cotali ripari racconta (1) che li guardiani, i quali si fanno fabbricare in varj siti dei lidi, consistono in palificate di roveri di lunghezza due o trecento passi l' una, indirizzate per lo più verso il mare alto, e ad angoli retti incirca col lido medesimo. E simili palificate a guisa di cassoni ripieni di grandissimi sassi formano antemurale al corso de' sabbioni, che lungo i lidi medesimi va portando il mare, e che sarebbero per l' esperienza pur troppo avutane, pregiudizialissimi a que' porti e lagune. Osservò lo stesso rinomato Autore che „ l' ammassamento de' sabbioni si fa copiosissimo nella man sinistra, de' „ guardiani medesimi, in modo che il guardiano più grande vicino „ al porto del Lido maggior in meno di due anni aveva di già ragunato si gran quantità di sabbioni nella sinistra che il mare ne restava allontanato dalle riviere, che precedentemente egli bagnava „ per più centinaia di passi, e la spiaggia contigua verso quella parte per più di due miglia in lungezza aveva disteso proporzionatamente i suoi acquisti facendosi terreno ove prima fu mare „. Nella raccolta fatta e recentemente pubblicata dall' ab. Tentori *della Legislazione Veneziana sulla preservazione della laguna* si hanno molti fatti di diversi tempi, che comprovano come li guardiani ed altre palafitte si prescrissero e si praticarono qual mezzo riconosciuto assai valido per difendere gli sbocchi e porti delle lagune, ed anche le

(1) Nel citato discorso del mare adriatico.

stesse lagune dalle sabbie del mare. Ne riporterò quì un solo tratto dall' articolo 18. della riferita raccolta.

Nel 1697 erano state per non so qual suggerimento de' periti di quel tempo levate la palate esistenti nella spiaggia del porto di Malamocco; e ben presto si rese per tal modo sensibile il danno dell' errore di quest' operazione, che il Senato comandò, che di nuovo fossero costruite le palate per frenar li disordini, che ne risentiva quel porto dalla continua introduzione delle sabbie marine; e nel 1704 prescrisse il riattamento degli speroni e guardiani, e la formazione di altri nuovi, onde escludessero dal porto, e dalla laguna le sabbie marine, che vi apportavano massimo pregiudizio.

XLVII. Se dunque dalla costante sperienza di più secoli si sono conosciute utili ed anche necessarie le palate per arrestar le sabbie marine, per impedirne l' ingresso ne' porti delle lagune, e per render e preservare quanto è possibile i porti stessi, come le lagune, immuni dalle deposizioni ed aggestioni del mare, avvi ragion di credere, che una simile pratica ben intesa ed eseguita si potesse usar ancora a difesa e preservazione dei porti o siano sbocchi de' fiumi nel mare. Imperciocchè se li guardiani ed altre forme di palafitte giovano mirabilmente per mettere al coperto dalle sabbie marine i porti delle lagune, dove soltanto il corso, che l' acqua acquista durante il riflusso del mare, si oppone al loro ingresso ed avanzamento; come non valerà una specie di tal industrioso lavoro anche per mantener i loro sbocchi ai fiumi, che in tutti i tempi colla forza del proprio corso, quando più quando meno, non che coll' impeto, che acquistano nel riflusso del mare, tendono a respingere le sabbie marine, ed a sgombrarle?

È ben vero, che non solamente le sabbie condotte dal mare, ma quelle ancora, che vi traduce il fiume sino alla propria foce tendono ad interrir e viziare il suo sbocco. Ma sarebbe forse poca cosa il tenere lo sbocco d' un fiume al coperto dalle sabbie, che vi portano le correnti del mare, ed i venti colle onde delle tempeste? Io credo di più, che l' industria dell' uomo possa riuscire molto utile allo sbocco d' un fiume anche per difenderlo e salvarlo dagl' interrimenti delle torbide e sabbie proprie del fiume stesso col rinvigorir e sostenere la forza delle sue acque alla foce, come diremo.

XLVIII. Qualora pertantò si trattasse di voler provvedere alla sussistenza dello sbocco d'un fiume, che entri nell' Adriatico col mettere semplicemente riparo alle sabbie del mare, onde non vadano ad imbonirlo, un utile artifizio sarebbe quello di munire lo sbocco a sinistra d' un buon guardiano, il quale partendo dalla spiaggia si prolungasse ben avanti dentro il mare, supponendosi già, che il mare sia poco profondo verso la spiaggia dello sbocco del fiume. La direzione

di questo tal riparo atte a resistere anche all' urto delle burrasche vorrebbe essere pressochè ad angolo retto con quella della spiaggia per arrestar di più e trattener le sabbie spinte verso la spiaggia medesima e lungo essa portate. Un simile lavoro non può non essere di grande giovamento per la assistenza dello sbocco del fiume; imperciocchè oltre il difenderlo dai danni delle burrasche da quel lato, lo ripara dalle aggestioni, che di continuo vi porta il moto radente del mare, le quali come si è veduto (n. 36. e 46.) sono considerabili.

Non è che alla sinistra soltanto e non alla destra ancora de' guardiani costruiti per difendere e salvare dai danni delle sabbie marine i porti delle lagune Venete, si ragunino sabbioni. Così per osservazione del Montanari, dopo che in tanta copia, e per sì grande estensione vennero ragunati li sabbioni a sinistra del guardiano vicino al porto del Lido maggiore (46), ne comparvero anche sulla destra del medesimo, i quali a poco a poco si accumularono in tanta quantità, che giunsero ad unirsi con quelli a sinistra, restando il guardiano verso terra totalmente sepolto. Ma è da riflettersi, che quest' effetto di radunarsi li sabbioni a destra de' guardiani, nasce quando da questo lato rimane acqua stagnante; il che non ha luogo similmente nel caso nostro. trovandosi a destra del guardiano la corrente dello sbocco del fiume.

XLIX. Taluno considerando come alla destra degli sbocchi de' fiumi si formano ammassamenti e banchi tali di sabbia, che d' ordinario li obbligano a piegar e volgersi a sinistra, potrebbe forse immaginarsi a prima vista, che convenisse meglio costruir il guardiano, o altra palizzata in difesa dello sbocco a destra del medesimo. Ma si consideri, che dal lato destro dello sbocco del fiume non si raccolgono altre sabbie del mare, ché quelle che vengono spinte e portate a quel sito dal mare in tempo di burrasca; e che per contrario dal lato sinistro concorrono di più a peso e danno dello sbocco le sabbie ancora di altri siti anche lontani, le quali di continuo vengono portate avanti dal moto radente. E qui osservo, che sebbene il fiume per quel tratto, che si estende colla sua corrente in mare, tagli ed interrompa a somiglianza d' un guardiano il moto radente del mare; passa ciò nonostante una grande differenza tra il modo, col quale esso moto è trattenuto dal guardiano, e quello con cui viene arrestato dal fiume. Il guardiano ferma interamente qualunque progresso di tale moto, e perciò obbliga le acque a deporre dal suo lato sinistro tutte le sabbie, che successivamente vi vanno portando col detto loro moto. Per l' opposto quando il moto radente del mare non trova altro ostacolo che lo sbocco del fiume, che lo attraversa, cammina avanti fino che incontra la corrente del fiume; e nè meno qui si ferma, ma insinuandosi nello sbocco, e con le acque di esso

confondendosi, piega e prende la direzione, che ha la corrente dello sbocco, e con essa cammina verso l'alto mare. Quindi le tante sabbie provenienti dal moto litorale sono portate avanti sino allo sbocco del fiume, e dentro il medesimo; e però vanno a carico e pregiudizio di esso, e ne lo interriscono e sconcertano; quando il fiume manchi di forza sufficiente per ispignerle sino verso il mare profondo, come fanno i fiumi reali, e per impedir, che si depongano e si fermino sul fondo della sua foce.

Quando dunque si cerchi di difendere o preservare lo sbocco d'un fiume in mare per mezzo d'un guardiano, questo deve situarsi alla sinistra dello sbocco. Nè è improbabile, che munito o difeso lo sbocco da questo lato, per dove riceve maggior danno, è sostenute costantemente e rattenute dal medesimo lato le acque del fiume sicchè non pieghino cedendo luogo alle sabbie, che si depongono a destra, e impedite pur anche di spandersi e dilatarsi, come suol fare ogni influente entrando nel suo recipiente, venga quindi ad avere il fiume stesso anche maggior forza, e facilità per tenersi aperta ed approfondata la strada avanti il suo corso in mare.

L. Ma lo sbocco d'un fiume potrebbe abbisognare di altri e maggiori presidj per ridursi e mantenersi felice; come appunto realmente ne abbisogna lo sbocco d'un fiume sempre scarso di acque, e che entri nel mare in sito dov'è poco fondo. Qui è chiaro, che fa d'uopo ricorrere a dei mezzi pratici, che mettano in vigore la forza del fiume debole, e gliela mantengano.

Uno sarebbe quello d'accrescere il corpo d'acqua nel fiume con nuovi influenti, se fosse possibile. Ma e se questo tal mezzo manchi, o non fosse bastante per l'oggetto contemplato? Vi potrebbe essere anche quello d'accrescere al fiume la caduta, procurandogli coll'escavazione fatta a mano una foce più profonda sotto il pelo del mare, e sulla base di questa regolando la pendenza dell'alveo col dargli una cadente proporzionata alla natura del fiume. Ma oltrecchè sarebbe un getto inutile l'approfondare la foce del fiume, quando l'escavazione non si portasse avanti dentro il mare fino a trovare una egual od anche maggiore bassezza di fondo del mare, è da credersi che un fiume scarso d'acque non vaglia da se o senza altri soccorsi dell'arte nè meno a mantenersi la profondità della foce procuratagli; ma che ben presto se la lasci interrare, o dilatandosi e perdendo della sua altezza allo sbocco sotto il pelo del mare; e ciò tanto è più facile ed anche necessario che succeda in un fiume debole di forze, quanto che si tratta d'una lunghezza considerabile di sbocco entro il mare, onde arrivar al sito d'una notabile profondità dello stesso mare.

LI. Non si può però dubitare, che col preparar ad un fiume uno

sbocco sufficientemente fondo sotto il pelo del mare, e che s'inoltri ben avanti sino al sito dove il mare incominci ad essere ancora più profondo, non sia un provvedere il fiume stesso d' un ottimo sbocco, purchè si combini anche la scelta d'una buona direzione. Non resta dunque che di pensar all'artifizio d' invigorir e sostenere la forza delle scarse acque del fiume, perchè si mantenga il già procuratogli suo felice sbocco.

Un lavoro analogo a quelli proposti ed anche praticati da Autori esperti nella materia delle acque, per approfondar gli sbocchi e porti de' fiumi, e per impedire che di nuovo non s' interriscano, lo reputo opportunissimo per l' oggetto che ora si contempla. Il chiarissimo ab. Frisi, il quale possedeva, come egli stesso asserisce, le scritture del Meyer, racconta che quel celebre architetto d'acque del secolo passato, aveva prescritto per regolazione dell' Arno di raddrizzar e restringere la sua foce, e *accompagnarla anche in mare con due palificate*; il qual progetto avrebbe voluto il Frisi che si eseguisse anche a' suoi tempi (1), come altrove si è detto parimenti il sig. di Tourò per correggere e mantenere ben profonda e sgombra la foce del fiume Doure propose di restringer e chiudere dai due lati quel gran fiume verso la sua estremità con due lunghe e forti dighe di sassi che l' accompagnassero sino a certa distanza dentro il mare. Sopra il qual progetto, che venne approvato ed anche eseguito, benchè per intervalli di tempo e imperfettamente da principio, come anche sopra altri simili si può vedere il Belidoro (2).

Io credo di non ingannarmi supponendo che il fiume che quest'Autore nomina *Doure* (4), e che mette nel mare presso Baionna sia quel medesimo, che il Bossut, ed altri chiamano *Adour*. Del modo, e dell' utilità, ed anche necessità d' accompagnare certi fiumi sino dentro il mare con palificate, perchè la loro foce non si dilati, non s' interrisca, e chiudasi, ne parla e ne tratta egregiamente l' abate Mari (4).

Ma se si deve notare a questo proposito, che se per li fiumi grandi ed anche mediocri basta il restringere ed incassare le loro acque sino dentro il mare, perchè da se si scavino ed approfondino lo sbocco, e se lo preservino, non è da presumersi un simile effetto anche dalle deboli forze d' un fiume scarso d' acque, e che metta in mare dove sia poco fondo. L' arte deve preparar a questo fiume

(1) Dei fiumi che portano arene e torbide cap. 5.
(2) Archit. Idr.
(3) L. 3. c. 7. sez. 2.
(4) Idr. pr. rag. vol 2. lez. 19. 23, e altrove.

lo sbocco conveniente; e poscia dalle forze delle sue acque unite sostenute e riparate attenderne il mantenimento.

LII. Nel caso dunque di dover provvedere alla sussistenza dello sbocco d' un fiume in riflesso massimamente alle sue acque scarse ed all' opposizione de' venti, la pratica da usarsi sarà quella di portare lo sbocco del fiume avanti in mare con buona direzione scavandolo a profondità conveniente finchè trovi mare vivo; e accompagnarlo con una forte palata per parte, ognuna delle quali con altra materia annessavi formi un consistente argine al fiume. Ma quando si credesse che non abbisognasse di munire questo nuovo sbocco anche d' un guardiano a sinistra, si dovrà prolungare la sua palificata a sinistra più avanti di quella a destra, come insegna e lo dimostra il sig. ab. Mari (1), il quale è da consultarsi anche per la costruzione degli argini da opporsi alla forza del mare (2).

Portate in simil guisa le acque scarse del fiume a sboccar fino dove il mare trovasi ad una sufficiente profondità, e obbligate a correre unite e alte sopra il fondo avranno forza da tenersi lo sbocco approfondato e sgombro anche contro l' opposizione de' venti; essendo spezialmente, che la loro foce per la direzione datale, od anche per l' aggiunta, occorrendo d' un guardiano, deve essere messa al coperto quanto è possibile dai venti più dannosi. E quel poco di prolungamento, che riceve la linea del fiume dalla proposta operazione, è abbondantemente compensato dalla felicità in tal modo procurata al suo sbocco.

LIII. Si potrebbe fare una ricerca sulla dimensione della larghezza da darsi al canale, che deve tenere incassate le acque del fiume allo sbocco. Il celebre sig. ab. Bossut (3) vorrebbe, che le dighe ovvero argini, che incassano il fiume fossero *un pò convergenti verso il mare*; perchè in tal modo nel tempo del flusso la velocità del mare per entro il canale si diminuirebbe all' aumentarsi della larghezza, e al contrario nel tempo del riflusso la velocità del fiume di mano in mano sempre più ristretto, si aumenterebbe: doppio effetto che tenderebbe a scemare gl' interrimenti. L' illustre sig. di Buat (4) riflettendo alla proprietà, che ha il fluido nell' imboccar un canale, d' agire contro i lati; e se questi cedano, di allargarsi l' imboccatura, rendendo il canale più largo e come divergente verso l' imboccatura stessa; e pensando inoltre, che quella molto maggiore larghezza, che alla loro foce sortiscono naturalmente i fiumi, che sboccano in mare,

(1) Idr. pr. rag. vol. 2. lez. 19.
(2) Vol. 2. lez. 18., e vol. 1. lez. 8.
(3) Hydrodin. t. 2. cap. 13. n. 822.
(4) Princip. d' Hydr. t. 1. p. 1. sez. 3. cap. 5. n. 175.

e specialmente nell' Oceano, nasca dal corso delle acque del mare, che in tempo di flusso elevandosi a molti piedi d'altezza entrano e s' insinuano scorrendo per l' alveo del fiume e specialmente a canto delle rive; in visita di tutto ciò avverte egli, che nello stringer e serrare che si fa dai lati gli sbocchi dei fiumi per obbligarli a scavarsi la foce, si deve avere riguardo di non limitare a piccola larghezza il canale o sia alveo del fiume; perchè se ciò giova al fiume coll' accrescergli la velocità nel riflusso, può divenir maggiore il danno, che la marea alta vi porta entrando nell' alveo dove è più ristretto e scorrendo per esso contro il corso del fiume.

Nel piano per l' incassamento dello sbocco del fiume *Adour* o sia *Doure* approvato da un consiglio composto di uffiziali della Marina, e dal corpo reale del Genio, sia che si abbia avuto in riflesso ciocchè poscia avvertì il sig. di Buat, sia che si abbia voluto imitare l' andamento naturale de' fiumi, sia finalmente che si temesse che il fiume si alzasse troppo verso il suo termine, si deliberò di tener largo il canale all' estremità pertiche 150, quando superiormente si riducesse alla larghezza di 100 pertiche (1).

LIV. Quand' anche non si avesse commesso errore col dare tanta divergenza allo sbocco dell' Adour, questa tal forma di operazione spettante ad un fiume, che abbonda di forze solo che non gli si permetta di soverchiamente dilatarsi, non potrebbe servire di regola per fiumi di acque scarse.

La riflessione poi del sig. di Buat, oltrecchè suppone ciocchè non è vero, se non forse in parte soltanto, vale a dire, che la maggior larghezza, che si osserva negli alvei dei fiumi verso il loro sbocco, nasca dall' azione delle acque del mare entranti e scorrenti pel fiume, piuttostochè da quella delle acque del fiume per la resistenza che queste incontrano, e che devono superare per entrar in mare; suppone anche che il fiume sbocchi in un mare dove i flussi ordinarj si alzino per molti piedi come nell' Oceano. Ciò non succede nel nostro Adriatico; e però cessanò nel caso nostro i motivi di temere gli sconcerti da esso sig. di Buat avvertiti, se il canale non si faccia divergente verso il suo termine inferiore, e più largo che superiormente.

Il sig. Temanza tenne registro giornaliero pel corso di cinque anni delle altezze dei flussi e riflussi dell' Adriatico, che si osservano a Venezia. Dal suo diario di un anno, cioè dell' anno 1755 pubblicato dal celebre p. p. di Padova sig. ab. Toaldo (2) si rileva, che assai

(1) Belid. archit. Hydr. l. 3. cap. 7. sez. 2.
(2) Saggio Meteorologico p. 2. art. 2.

poche volte in un anno l' altezza del flusso arriva a piedi 3 veneti, e pochissime volte sono quelle, che sensibilmente li superi, e che niun flusso arriva mai in tutto l' anno dell' altezza di piedi 4, contando quest' altezza dal pelo dell' acqua nel punto estremo del riflusso sino al punto estremo del flusso. E se si esamini la massima marea di ogni mese, e si prenda l' altezza media di tutte queste 12 massime maree, trova essere soltanto piedi 2. 10. 5. Che se si prenda una media delle altezze del pelo di tutti affatto i flussi massimi mediocri, e minimi d' un anno sopra il pelo dei riflussi, risulta quest' altezza media di piedi 1. 9. 11. $\frac{4}{12}$; cioè prossimamente piedi 1. 10. 0. sicchè l' altezza media o sia ragguagliata dal pelo dei flussi sopra il pelo dei riflussi di tutto un anno è piedi 1. 10. 0. che corrispondono a piedi parigini 1. 11. 6.

Conviene credere, che l' ab. Belloni ignorasse questi fatti allorchè scrisse, che li flussi maggiori (non gli straordinarj) dell' Adriatico ascendono all' altezza d' intorno a 5 piedi (1).

Il suggerimento dell' ab. Bossut contiene delle viste degne di quel grand' uomo tanto benemerito dell' idrodinamica per le sue sperienze; se non che quando si trattasse d' incassare lo sbocco d' un fiume reale si potrebbe forse temere, che quella forma di alveo riuscisse pericolosa, o almeno più difficile da mantenersi, come quella che tende a fare troppo contrasto alla natura vigorosa di quelle tante acque, diretta essendo a ridurre il fiume più stretto dove naturalmente è sempre più largo, ed anche a ribassar maggiormente il fondo, dove suol farsi acclive, quando però il fiume non giunga a stabilirsi la sua foce dentro il mare, molto tratto dopo che sia uscito dal suo incassamento, come già succederebbe. Dove la natura abbonda di forze non è cosa canta il metterla in grande violenza; e crederei, che non fosse nè meno necessario pel fine, che si contempla. Il fiume Adour benchè incassato con sponde cotanto divergenti e con un lavoro, che per diverse circostanze venne non senza pregiudizio eseguito lentamente e con interruzione, si ridusse la foce profonda piedi 7 in 8 sotto il pelo delle basse maree nel sito della maggior elevatezza del suo fondo. Si può dunque credere, che se anche fosse stato incassato senza niuna convergenza verso il suo termine, ma soltanto con poca o niuna divergenza, ciò avrebbe bastato, perchè si fosse formata una foce tanto profonda in mare da poter dare ingresso ai vascelli anche fuori dei punti delle alte maree, le quali montano colà a 11 in 12 piedi d' altezza sopra il pelo delle basse; nè avrebbe abbisognato di prolungar di nuovo in mare, come si fece, le dighe per mantenergli lo sbocco capace di grossi vascelli (2).

(1) Dell' Adige e suoi diversivi cap. 1. n. 9., e cap. 2. n. 29.
(2) Bossut. Hydrod. T. II. cap. 23. n. 822.

LV. Ma trattandosi d' un fiume di scarse acque portato a sboccare dentro il nostro Adriatico, sarei di parere, che oltre di formar il suo nuovo alveo al mare più ristretto dell' ordinario, giovasse anche il ridurre le sponde di quest' alveo un pò meno tra loro distanti verso il termine inferiore; abbisognando un simile fiume di tutto il soccorso dell' arte per mantenersi il suo sbocco a sufficiente profondità, nè avendo tale copia di acque e di forze da far temere sconcerti per una simile forma d' alveo del suo sbocco. Per non eccedere poi nel limitar la strettezza di quest' ultimo nuovo tratto d' alveo, ma dargli quella larghezza che basti a tenere unite quanto si richiede le deboli forze di esso fiume senza troppo violentarlo, può servire di lume la larghezza del suo alveo superiore, e il corpo medesimo delle sue acque; e se solo sboccava anche prima in mare, la larghezza del suo alveo presso lo sbocco darà più facilmente norma per fissarne una più ristretta per l' alveo e sbocco nuovo.

Merita, come in tant' altri punti d' idraulica, così anche in questo, di essere consultato il dottissimo ab. Mari (1). Dall' esatta descrizione, che egli diede dell' operazione da lui medesimo inventata e fatta eseguire per portare il fiume Bevano a sboccar ben avanti dentro il mare, si ponno trarre i lumi di pratica necessarj per simili difficili imprese; e l' ottimo successo che ebbe l' opera da lui effettuata, non solo dimostra la possibilità di eseguire simili lavori, ma conferma anche il contemplato buon effetto de' medesimi. E poichè il tentativo da altri fatto prima per migliorar la foce di quello stesso fiume riuscì inutile, si può quindi dedurre nuovo argomento di prova, che più volte resta delusa la fatica, e la spesa gettata nella regolazione degli sbocchi come anche di altre parti de' fiumi per mancanza di sapere in chi imprende ad effettuarnela, piuttostocchè per difetto e vizio inseparabile della natura del fiume.

LVI. Il puro e semplice pratico architetto d' acque si mette a pericolo d' ingannarsi ogniqualvolta intraprende una operazione dove variano le circostanze, alle quali d' uopo è avere riflesso; e come queste spesse volte si cangiano, così non è meraviglia se spesse volte riescono inutili se non anche dannose certe operazioni d' importanza affidate a puri pratici. *La pratica senza le teorie è cieca*, come riflette il Guglielmini.

Sarebbe pure da temersi dell' esito d' una grande regolazione da farsi ad un fiume qualora venisse appoggiata a taluno di coloro, che hanno bensì appresi i principj fondamentali che reggono nel corso delle acque; ma per difetto d' ulteriori cognizioni, per mancanza

(1) Idraul. part. rag. T. I. lez. 8.

d' ingegno e di sagacità, o di riflessione, non ne veggono tutta l'estensione, e l' uso, nè sanno modificarli, e farne l' applicazione secondo le circostanze. Un talento perspicace e comprensivo, a cui è familiare l' associazione di molte idee, che sa crear sul momento degli espedienti opportuni, che vede le cose più lontane non che tutte le vicine, che hanno rapporto coll' operazione da instituirsi, un simile felice ingegno, che possegga le cognizioni idrauliche, nè ignori i metodi di pratica da altri usati sui fiumi, e sia superiore a certi riguardi umani ed interessi, che attraversano le più belle imprese, questo sarà l' ingegnere, a cui si potrà senza tema affidare la regolazione sistematica d' un fiume.

Tutte anche le migliori e più eccellenti produzioni, che trattano della scienza de' fiumi, e del modo di regolarli, come sono quella *della natura de' fiumi e l' idraulica pratica ragionata*, a fronte che abbondino di ottime regole ed avvertenze per chi si assume l' incarico di sistemar, o di regolar in una qualche parte il corso delle acque, suppongono necessariamente molta intelligenza e sagacità nell' architetto per la scelta e per la pratica esecuzione delle operazioni, onde agire con sicurezza; spettando ad esso il rilevar le vere cause dei disordini, e vizj attuali del fiume; e al suo ingegno e sapere venendo rimessa la scelta e l' effettuazione di ciò, che al caso e nelle diverse particolari circostanze meglio convenga porre in opera.

Io mi chiamerei troppo fortunato se con questo mio scritto fossi giunto a raccogliere ed esporre alcuni pensieri utili sopra l' importante e difficile argomento degli sbocchi de' fiumi in mare. Il giudizio della Reale Accademia mi sarà di regola per conoscere il valore delle mie riflessioni. Intanto avrò la compiacenza d' avere cercato di secondare l' invito d' una dotta e celebre SOCIETA' letteraria per quanto ha permesso la strettezza delle mie cognizioni, e la debolezza del mio ingegno.

Est quodam prodire tenus si non datur ultra.

METODO

PER CORREGGERE LE ALTEZZE ECCESSIVE

DELLE PESCAIE

E PER MIGLIORARE

GLI IDRAULICI EDIFIZJ

PER MEZZO PRINCIPALMENTE

DI CATERATTE OSCILLANTI

DEL DOTT. FRANCESCO FOCACCI.

I. Se a riguardar ci facciamo i lenti, e sovente interrotti progressi della sociale civiltà, e ad esaminare quali oggetti l' umano spirito abbia successivamente presi di mira, onde esercitarvi sopra il proprio ingegno, facil cosa sarà l' accorgersi, anco senza il soccorso di ricerche sugli storici Monumenti, che gl' imponenti bisogni, i quali più strettamente alla sua conservazione e salute appartengono, furono i primi soddisfatti; talchè colla maggiore sicurezza stabilire si può, che le sue prime mire rivolte esser dovettero alla ricerca delle specie opportune all'alimento, ed alla maniera di far loro subire quei cangiamenti, che il gusto e gli organi dell' uomo esigevano.

II. Grande invero ed oltremodo luminosa, per ciascuna nazione, si fu la scoperta del principale degli alimenti, del quale l' uomo si serve, voglio dire del frumento. L' acquisto di questa preziosa biada dovette mirabilmente cangiar costumi e vita sociale in popolazioni, le quali, come le antiche Italiane, il loro alimento cercato fino allora avevano sulle montagne nella rozza quercia.

Contentique cibis nullo cogente creatis,
Arbuteos foetus, montanaque fraga legebant,
Cornaque, et in duris haerentia mora rubetis,
Et quae deciderant patula Iovis arbore glandes (1).

(1) Ovid. Met. lib. I. sect. II.

15

E se gli uomini negli antichi tempi conservarono lungamente riconoscenza alla pianta che gli aveva nutriti, consacrandola al primo degli Dei, coronandone i loro Eroi, e rispettandola come pianta sacra alla religione, ed al valore; di qual gratitudine mai non si mostrarono essi penetrati verso quei benefici esseri, che gli trassero da cibo sì rozzo, coll' offrirli il frumento, che loro insegnarono a seminarlo, a raccoglierlo, a macinarlo? E non poterono in fatti, dalla mente dei riconoscenti mortali insegnamenti di tal fatta riguardarsi che come dono di dei, o di uomini dagli dei istruiti: e nei secoli nei quali i sentimenti erano più puri, e il cuor dell' uomo non degenere dai suoi naturali principj, solo ai mortali che impiegavano i loro talenti e la loro forza al vantaggio dell' umana società si riservarono quei tributi di elogio, che in età men barbare sì, ma più depravate, sono stati il retaggio di coloro, i quali l' han devastata con la guerra e col terrore.

III. Era certamente un passo importante per la società degli uomini quello di aver trovata una pianta, la quale hanno essi potuta di poi seminare attorno alle loro capanne, di cui poterono far provvisione e conservarla per tutto l'anno, e che gli fissava, per così dire, al suolo sul quale erano nati.

Ma i primi mezzi conosciuti per rendere il grano atto a manipolarsi e convertirsi in pane, non furono nè i più brevi, nè i men laboriosi, nè quelli infine che meglio operassero su di esso.

IV. Divenuti gli uomini possessori delle granaglie, che costruir dovevano il nutritivo e sostanzioso loro alimento, e creata così l' agricoltura, o sia quella scienza per la quale, al dire di *Xenofonte* (1), forza ed ardire acquistata avendo, dominatori si fecero di ogn' altra cosa creata, non più dovettero tardare ad accorgersi, che il loro primo uso di gustarle secondo ciò che dicono *Ippocrate*, *Teofrasto*, e *Suida* tali quali erano state prodotte dal terreno, oppure arrostite e tostate, in ordine a ciò che scrivono *Apollonio*, *Virgilio*, *Ovidio*, *Plinio* ed altri ancora, non era assolutamente nè gustoso, nè conveniente.

V. L' antico ed accreditato filosofo *Posidonio* è di sentimento, che questa osservazione bastar potesse, perchè si consultasse la natura, e che si apprendesse il modo di convertire in farina ed in pane le biade.

---

(1) *Videbatur etiam* (Così si esprime al §. 10. del Cap. VI. dell' Opera intit: Οἰκονομικ.) *videbatur etiam agricoltura excitare animos ad fortitudinem, quod extra munitiones ad victum necessaria producat, iisque alat homines se exercentes.* E al Cap. V. §. 17. „ *Etiam recté dixit, qui agricolturam aliarum artium ma-* „ *trem, et nutricem esse perhibuit; nam quum agricoltura prospere succedit, e-* „ *tiam artes caeterae omnes vigent.*

Si è dovuto osservare, segue egli, che da principio i grani erano macinati dai denti, e che la sostanza stemprata colla saliva, agitata ed unita insieme, coll' aiuto della lingua, discendeva nello stomaco, ove ricevere quel grado conveniente di concozione, da renderla propria ad esser convertita in nutrimento (1).

VI. Le prime macchine, che s' inventarono per triturare e macinare i grani non furono che semplici pestelli, e mortai di legno, o di pietra, dentro i quali si pestavano i semi, nel modo affatto simile a quello, con cui al presente si schiacciano e polverizzano le droghe.

VII. Ma l' impossibilità di aversi con tali mezzi una buona farina, fu causa che gli uomini si occupassero nel fare il tentativo di scuoprirne altri più perfetti e migliori.

Quindi s' inventarono in Grecia, prima che altrove, i mulini a braccia, e *Milete* figlio di *Eurota*, primo Re di Laconia, al dire di *Esiodo*, ebbe l' onore di sì importante invenzione.

VIII. Queste macchine, le quali si diffusero poscia tra tutti i popoli inciviliti del globo, ed alle quali i Greci, secondo *Plinio*, non portavano a macinare i loro grani, se non dopo averli tenuti per qualche tempo nell' acqua, e poi fatti rasciugare e seccare per un mese, e quindi avergli arrostiti o tostati, muovevansi, nella Grecia ed in Egitto, dalle sole donne, che per costume assoggettar solevansi ai lavori più penosi, e difficili. Altrove costumavasi di far ravvolgere le macini dagli uomini, o dalle bestie, e particolarmente dagli asini, siccome, fra gli altri, ce lo assicurano, non tanto *Catullo* con quel verso (2).

Et non pistrino traditur atque Asino,

quanto *Apuleio*, mentre parlando di se, e degli asini suoi compagni così si esprime: *Ibi complurium Jumentorum multivii circuitus intorquebant Molas ambage varia. Nec die tantum, verum perpeti etiam nocte, prorsus instabili Machinarum vertigine lucubrabant pervigilem farinam .... Die sequenti, Molae, quae maxima videbatur, matutinus adstituor: et illico velata facie, propellor ad incurva spacia flexuosi canalis ec.* (3).

IX. Da' tempi di *Milete* sino a quelli di *Augusto*, il che è quanto dire pel corso di più di dieci secoli, non si conobber mai altri mulini che a braccia ed a bestia, e dal citato passo di Apuleio si rileva, che anche al tempo di *Comodo* erano nella Grecia in uso i mulini, ai quali si dava moto per mezzo di un giumento. Prima però di tal epoca, per quanto ne avverte il *Belidor*, e per quanto rilevasi da

(1) Vedi Senec. Ep. 90.
(2) Epigramma de Aemilio.
(3) Metamorph. lib. IX.

un Epigramma della Greca Antología, gli uomini mai non si avviddero, che sostituir potevasi con immenso vantaggio la forza del vento e dell' acqua a quella del corpo dell' uomo e degli animali.

Vitruvio contemporaneo d' *Augusto*, nel decimo libro fa la descrizione de' primi mulini ad acqua, che allora conoscevansi; e questa descrizione può altresì servire di commentario al Greco Epigramma avvertito.

X. Come la scoperta di profittare delle acque correnti per muovere i mulini, e le varie altre macchine utili all' uman genere deesi ai talenti Europei, così il trar lo stesso profitto dalle correnti atmosferiche, è tutto affatto gloria degli Asiatici ingegni.

XI La scarsità quasi generale delle acque correnti in tante parti dell' Asia fu senz' altro la causa, che quei popoli industriosissimi per natura pensassero fino da tempo immemorabile a profittare, per tali usi del movimento di un fluido, di cui niun' altra nazione del globo avea prima di essi osato profittare così, se non per la navigazione.

XII. Questa ingegnosa scoperta di prevalersi della forza del vento per porre in azione qualunque macchina utile alla vita civile, è a noi pervenuta dall' Oriente sino da 600 anni circa, o sia sino dal tempo in cui fece di colà ritorno la famosa Crociata, locchè ebbe effetto verso la fine del XII. secolo.

XIII. La novità della cosa, nonmenochè l' utilità rilevante per tutti quei posti ch' erano mancanti di acque correnti, furono le due cause, le quali determinarono non tanto gl' Italiani, quanto gli Spagnuoli, i Portoghesi e i Francesi a profittare sino da quell' epoca di una tale scoperta, ed in brevissimo tempo si vider così moltiplicare i mulini ed altri ordigni di simil genere, lungo le spiagge marittime, e per tutte quelle prominenze, in cui il movimento atmosferico si riscontrava più regolare e costante.

XIV. Accennata pertanto l' origine dei mulini, tanto ad acqua che a vento; senza trattenersi ora a parlare di quella di tutti gli altri ordigni ai mulini consimili (la scoperta, o invenzione de' quali non essendo in sostanza, siccome è noto ad ognuno, che una modificazione, o ampliazione dell' accennata non potea fare a meno di non succederle prontamente, come conseguenza immediata) passeremo senz' altra dilazione, che riguardar non potrebbesi se non come inutile affatto al fine propostomi, ad indicar brevemente il meccanismo di quelli, e in ispecial modo dei mulini ad acqua, sì perchè son questi i più utili, e comuni in Europa, sì perchè a riguardo loro, egualmente, che d' ogni altro Idraulico edifizio, come affatto simili fra loro, in ciò che riguarda il ricevere dall' acqua l' impulso per essere posti in azione, esporrò un mio *ritrovamento*,

l'oggetto del quale non è soltanto quello di renderli più utili in generale, ma di allontanare eziandio dai medesimi il pericolo, che restino soffogati o sommersi, per il dannosissimo e rilevantissimo riempimento dei letti dei fiumi, siccome bene spesso è avvenuto sin' ora in più paesi, e segnatamente in Toscana, con indicibile pregiudizio dei privati e del pubblico.

XV. Ed oltre a ciò, anche un' altra ragione a far questo m' induce, ed è, di dare le più essenziali idee su tal genere di macchine, in grazia di quelli, i quali più partitamente occuparsi volessero del loro perfezionamento, come l'Imperiale, e Reale Accademia delle belle arti di Firenze desidera, avendo a quest' oggetto uno de' suoi triennali premj destinato.

XVI. E per procedere nell' indicata esposizione col migliore ordine e chiarezza possibile, incomincieremo dal parlare delle macini, non solo perchè sono le prime che si affacciano agli occhi nel rimirare siffatti idraulici edifizzj, ma perchè sono altresì quelle, che la parte principale ne compongono.

XVII. Consistono le macini di un mulino in due gran pietre circolari di egual diametro, le quali adattate l' una sopra dell'altra, senza quasi toccarsi, o sia, come suol dirsi, *a tocco e non tocco* fra loro, servono a convertire le biade in farina, tostochè alla superiore venga comunicato il conveniente movimento di ruotazione.

XVIII. L'inferiore di tali macini, la quale appellasi *macine giacente*, è orizzontalmente fissata sopra uno stabile piano di muro. La superiore poi, ordinata a girare e scorrere intorno al proprio centro, per l'oggetto avvertito (§. XVII.), è quivi a tal fine equilibrata, e sorretta parallelamente alla giacente, sulla testata d'un albero verticale, il quale, per lo più, suole essere di ferro. Ne' mulini a acqua vien sempre tal albero o palo dal di sotto delle macini, ed in quelli a vento, dal di sopra delle medesime.

XIX. Le superficie delle due macini, che servono per ischiacciare e frangere il grano sono respettivamente *concave* e *convesse*, a similitudine di un cono, l'asse del quale è piccolissimo, in proporzione del raggio delle medesime.

La superficie convessa, la quale non eccede quasi mai la quarantasettesima parte del raggio, spetta alla macine inferiore: la concava, che non suol mai oltrepassare la trentesima parte del medesimo, appartiene alla superiore.

XX. Venendo per tali disposizioni le superficie delle due macini ad avvicinarsi di più in più l' una coll'altra, dal centro alla circonferenza, dassi luogo così al grano che scende dalla tramoggia, d'introdursi verso i due terzi del raggio delle medesime, che è il sito in cui incomincia a restare schiacciato, e dove oppone perciò la

maggior resistenza; mentre l'intervallo che lasciau quivi le macini non è che due terzi, o tre quarti della grossezza dei granelli del frumento, che debbono convertirsi in farina.

XXI. Si viene in cognizione dell'effetto di una macine, mercè della considerazione del di lei movimento, il quale risulta dalla velocità con cui gira, e da una parte del suo peso assoluto. Dico da una parte del suo peso assoluto, poichè, siccome nel girare vien la medesima retta e sostenuta a tocco e non tocco coll'inferiore dall'albero che la sorregge nel centro (§. XVII.); così è evidente, che la di lei gravità non può per l'intiero operare per la macinazione dei semi. Al che non si dee tralasciar di aggiungere, che l'azione di questa parte della di lei gravità non poco diminuir dee pel veloce moto di ruotazione che l'anima.

La teoria ci assicura di tali verità, ma non ci somministra i necessarj mezzi per conoscere con precisione qual parte del peso sia quella, che in ciò concorra. Sappiamo solo dall'esperienza, che se due macini hanno la medesima velocità e diseguali masse, i loro effetti, o le quantità di farina che producono, sono, presso a poco, in proporzione delle masse, o pesi delle medesime.

XXII. Ciò premesso, è inoltre osservazione affatto costante, e della quale i mugnaj tutti convengono, che a misura che scema la grossezza delle macini, e per necessaria conseguenza anche il loro peso assoluto, non tanto pel continuo lavorio, quanto per la necessità che si ha di batterle, o addentarle di tanto in tanto, diminuisce insensibilmente ancora il loro prodotto; e quando sieu giunte a non avere che i tre quarti, o la metà della grossezza che avevano, allorchè vennero poste in opera (alla qual epoca vengon rinnovate o cambiate) esse non producon più che i tre quarti, o la metà della farina, la quale producevano da nuove.

XXIII. Quindi se ne deduce, e l'esperienza appieno lo conferma, che gli effetti di due macini differenti in grossezza, sono come i prodotti delle loro masse per le rispettive loro celerità, o sia, lo che torna all'istesso, in ragion composta delle une e delle altre.

XXIV. La celerità che richiede una macine, affinchè faccia buona farina, conforme dall'oracolo infallibile dell'esperienza risulta, è compresa tra i limiti di quella, in virtù della quale può fare dalle 50 fino alle 100 girate per minuto primo. Uscendo qua questi limiti, o la farina resta snervata se la macine fa meno delle 50 girate, oppur divien trita, come suol dirsi comunemente, vale a dire non ben raffinata, qualora le girate che si fanno dalla medesima, durante l'istesso intervallo di tempo, sieno al di là delle 100. per minuto primo.

XXV. Le macini hanno ordinariamente dalle due braccia e tre

quarti, fino alle braccia tre ed un quarto di diametro, e dagli undici ai quattordici e diciassette soldi di grossezza.

XXVI. Con tali macini, il di cui peso suol essere di quattro in cinque mila libbre circa, può laverarsi comodamente per 25, o 30 anni. Dopo tal tempo, facendo il necessario cambiamento alle loro superficie, cioè di concave facendole divenir convesse (§. XIX.), sogliono convertirsi in macini giacenti o fisse (§. XVIII.), pel qual uso non duran mai meno di altrettanto tempo.

XXVII. Si profitta della forza dell' acqua per far muovere le macini, mediante un adattato meccanismo, pressochè simile a quello che forma il sostanziale di ogni altra macchina operante per l' urto dell' acqua, il quale è più o meno semplice, secondochè l' acqua è più o meno abbondante, e secondochè la medesima ha più o meno celerità, la quale può risultare tanto dalla pendenza naturale del suolo, per cui son distesi i canali, ne' quali fluisce mentre passa ai mulini, quanto per effetto di una caduta che le venga procurata, siccome suol farsi generalmente (ed il più delle volte con indicibile spesa) col mezzo di *turre*, *serre*, o *pescaie*, colle quali si attraversano gli alvei dei fiumi, rii, torrenti e riviere.

XXVIII. Tali opere, le quali necessarie pur sono a tutte le altre macchine che da siffatto elemento vengon poste in azione, come sono le filiere, le cartiere, le gualchiere, le seghe per i legnami, ed altre simili, soglion costruirsi per la generale, o con semplici ammassamenti di fascine di stipa, tenute ferme con pali, e assodate e strette fra loro con *schiacciuole*, *vimini* ed *oncinelli* di *carpine*, o *d' olmo*, oppurre con muro stabile a calcina per quei tronchi degli alvei, pe' quali l' acqua non può variare andamento; e con semplici sassi per coltello, ghiaie, terra e piote in ogni altro sito di essi, per cui la loro irregolarità, ampiezza e situazione rispetto ai terreni adiacenti, non permetta che si faccia altrimenti.

XXIX. Indicata così la comune, ovvero l' usual pratica di far ringolfare le acque, onde procurar loro, mediante il carico, quella velocità di cui abbisognano per muovere a dovere quelli edifizj che per loro mezzo operar debbono, passeremo ora ad accennare quali sono le maniere, le quali praticate vedonsi affine di ottener da queste un tal benefizio.

XXX. Ed all' effetto di procedere in ciò colla massima brevità, ci limiteremo soltanto a parlare dei mulini, giacchè, siccome altrove si disse (§. XIV.), e conforme ognuno conosce, niuna diversità v' ha tra questi e gli altri idraulici edifizj in quanto al modo con cui si profitta della forza dell' acqua, per far ravvolgere i loro rotami; mentre in tutti, qualunque esser possa l' oggetto della loro destinazione, il movimento non ha origine che da una prima ed unica ruota, a cui

dassi moto dalla corrente coll' investirne oppottunamente una porzione del suo perimetro, e di cui varia, come vedrassi in seguito, e la costruzione, e la situazione, a proporzione che diversificano la massa e la caduta delle acque ordinate a farla ravvolgere o girare.

XXXI. Quando l'acqua, o per una delle due cause sopra avvertite (§. XXVII.), oppure per ambedue insieme unite, ha molta caduta, ed è in quantità sufficiente per muovere una macine, allora il meccanismo è dei più semplici; imperciocchè non consiste, che in una sola ruota orizzontale di tre braccia e un terzo, o di tre braccia e due terzi di diametro, contornata da 18, o 20 pale conformate a guisa di ciotole o di cucchiaj, aporgenti per mezzo braccio o due terzi circa dalla circonferenza nel senso dei raggi, onde meglio ricevono l'urto dell'acqua, la quale esce da una doccia, tubo, o canale, di circa un quarto di braccio di apertura, diretta alla concavità delle pale.

L'asse di questa (sul alto del quale è altresì fissata la macine §. XVIII.), terminato inferiormente in un pernio o cuspide, ruota sopra un dado di bronzo, che appellasi *Bronzina*, situato e fermato sopra una pianetta o piccolo trave, costituente un *Vette di terzo genere*, una estremità del quale mentre reggesi da un appoggio stabile, sostiensi l'altra mediante un'asta pendente dal piano, ove trovansi le macini, pel cui mezzo il mugnaio può a talento avvicinare o scostare la macine superiore, o ruotante, dalla inferiore immobile e fissa. Questa sorta di mulini, è quella che chiamasi de' mulini a *ritrecine*.

XXXII. Se poi l'acqua destinata a far agire un mulino non è abbondante, ma sempre ragguardevole sia la caduta che essa può avere, due sono le maniere le quali praticate vedonsi per trar da questa il miglior vantaggio possibile. Consiste la prima nell' inviar l'acqua in un gran recipiente, che appellasi *Margone* o *Bottaccio*, il quale si costruisce di muro a tenuta, contiguamente alla fabbrica del mulino. Quando il margone è pieno, si apre la bocca cui corrisponde la doccia che accompagna l'acqua alle pale del ritrecine, ed il mulino può lavorare sino a tanto che nel bottaccio vi sia acqua a sufficienza. Vuotato che sia convien di nuovo aspettare che si riempia, per quindi tornare a macinare, e così sempre. Consiste poi l'altra nel condur l'acqua al di sopra di una ruota verticale, impiantata in un albero orizzontale, per mezzo di una doccia o canale di legno, di cui si serra la bocca, allorchè vuol fermarsi la macine.

XXXIII. La circonferenza di questa ruota, che ha per ordinario 8 ovvero 9 braccia di diametro, è rifasciata con un gran cerchio, il quale serve di fondo ad un conveniente numero di pale, o piuttosto scatole o cassette, composte di tavole laterali a guisa di armille,

e di pezzi traversali un poco inclinati verso la bocca, da cui cada l'acqua per farla ravvolgere o girare (§. XXXII.).

In tal guisa venendo l' acqua, per le accennate disposizioni (§. ivi), a cadere dall' alto nelle indicate cassette, a seconda della direzione di una corda obliqua all' orizzonte, per gradi 45 circa, l' urto che in esse esercita, ed il di lei peso assoluto valgono insieme a far girare a dovere la ruota, cui le pale sono apposte.

XXXIV. Oltre di ciò, all' asse di siffatta ruota, la quale dicesi comunemente *ruota idraulica*, evvi fermata una *ruota corona* di quattro braccia e mezzo di diametro, e con numero quarantasei, o quarantotto denti, i quali ingranando in quelli di una lanterna, o rocchetto, che ne sono per l' ordinario la quinta o sesta parte, impiantata nell' asse di ferro, il quale porta la macine superiore (§. XVIII.): vien la medesima macine a partecipare così del movimento della ruota idraulica, ed a girare perciò nel modo, che le conviene (§. XXIV.)

XXXV. Quando poi si ha maggior abbondanza di acqua, che di caduta (conforme succede per tutti quei mulini ed altri idraulici edifizj, i quali sono costruiti lungo i fiumi di corso regolare e stabilito, e che sono per conseguenza i più utili e necessarj, perchè di più facile accesso, e più vicini alle maggiori popolazioni) suole l' acqua destinata a porli in azione riunirsi in canali inclinati, di muro, larghi tra i dieci ed i dodici soldi di braccio, ne' quali si adattano le ruote idrauliche, che ne riempiono quasi affatto le loro larghezze, o sia in modo da restare a tocco e non tocco colle parti laterali dei medesimi, e co' loro fondi eziandio, affine di ottenere in queste ruote il di lei totale e massimo impulso possibile.

XXXVI. Tali ruote, che in Toscana sogliono avere sei braccia di diametro (il quale però potrebbe accrescersi sino alle braccia otto e nove, con sommo vantaggio degli edifizj de' quali si parla), hanno le loro pale composte di un solo pezzo di tavola, fissate perpendicolarmente alle loro superficie di testata, o perimetri delle loro circonferenze, a differenza di quelle che ricevono il moto dalla parte superiore, poc' anzi avvertite (§. XXXIII.), le quali, conforme ivi si disse, si rassembrano alle scatole, od alle cassette.

XXXVII. Il meccanismo dei mulini a vento non diversifica da quello accennato dei mulini ad acqua, se non se nella prima ruota motrice, che nei mulini ad acqua è armata, come si disse (§. XXXIII.), di pale, per l' oggetto di esser posta in movimento, mercè l' impulso da esercitarsi su di esso dalle acque correnti; mentre in quelli a vento è essa un composto di vele ingegnosamente disposte, affine di poter ricevere l' urto delle correnti atmosferiche, per girare a dovere. Chi desiderasse veder di questi mulini una più minuta e precisa descrizione, potrebbe appieno soddisfarsi osservando l' Enciclopedia

all' articolo *Moulin*, e l' architettura idraulica di *Belidor* al libro II. del volume I.

XXXVIII. Ciò premesso, avvertirò frattanto, che per quanta riflessione abbia fatta sopra i meccanismi dei mulini ad acqua, e su quelli di ogni altro idraulico edifizio, di cui ometto qui la minuta e particolar descrizione, per non rendermi troppo prolisso in cosa di che non v' ha necessità assoluta (§. XXX.), non mi è sembrato che veruna mutazione, o cambiamento dalla quale sperar se ne possa un vantaggio sensibile possa idearsi e proporsi per i medesimi, attesa l'estrema loro semplicità, la quale, per vero dire, quasi sorprende, anche per le operazioni più complicate.

XXXIX. L' unica correzione, che far si potrebbe a tali idraulici edifizj, con rilevante profitto, per quanto ho potuto conoscere, mercè le più minute e diligenti ricerche e osservazioni fatte ocularmente nei *Carceraj* dei medesimi; quella sarebbe di minorare in essi gli attriti, i quali al certo sono rilevantissimi, e di procurare di ottenere dall' acqua, ordinata a porli in azione, il massimo e totale urto, o impulsione, di cui questa esser possa capace.

A tal effetto perciò sarebbe necessario;

1.° L' accrescere, come altrove si disse (§. XXX.), il diametro delle ruote idrauliche.

2.° L' usare maggior diligenza e precisione nel costruirne i ruotami, e nel metterli bene in centro.

3.° L' eseguire con più diligenza la spartizione dei denti e delle pale.

4.° L' avere maggior attenzione nel collocare i pernj, e gli aguigli, e nel far riposare, e girar questi sopra piastre, o dadi di bronzo, che si denominano comunemente *bronzine*.

5.° E finalmente rendesi necessario avvertire, che i fondi o parti inferiori dei canali, mediante i quali l' acqua passa, o dirigesi alle pale delle ruote idrauliche, fossero terminati verso la fine (il che è quanto dire agli ultimi loro tronchi, ove trovansi le ruote in questione) in porzioni di cerchio concentriche, e anco quasi-tangenti ai perimetri delle medesime, e tanto più elevate de' fondi dei canali di rifiuto, o sia di quelli, i quali esportano l' acqua appena che ha investite le ruote, quanto può essere la di lei elevazione per essi, affinchè questa, esercitato sulle pale l' impulso, avesse nell' istante la comodità di scendere prontamente, per non ritardare l' impeto dell' altra successivamente veniente. Basta una semplice occhiata, che diasi alla Figura prima, per comprendere il tutto colla dovuta chiarezza e precisione.

Tutti gli edifizj di tal sorte, che ho avuto luogo di osservare sin ora, gli ho trovati in ciò moltissimo difettosi, con grave perdita, o

inutil consumo della potenza motrice, e con rilevante pregiudizio della giornaliera lavorazione dei medesimi.

XL. Rilevandosi quindi dal sin qui detto la necessità di avere per gl' idraulici ordigni una qualche caduta di acqua, onde renderli attivi, la quale (ammenochè non si abbiano de' fiumi, ne' quali la massa e la velocità ordinaria delle loro acque ci permetta di costruir questi sulle barche, come sono il Tevere, il Po, il Danubio, e varj altri, dopo un certo punto del loro cammino) convien procurarla coll' attraversare i loro alvei con serre, steccaie, o pescaie (§. XXVII.); e niuno esser vi può certamente, il quale non si avveda, come giornalmente si vada incontro ad un tempo (ed ahi con qual celerità per noi Toscani specialmente!), in cui si dovrà per necessità restar privi del maggior benefizio che ritrar sogliamo dalle acque correnti, e che tanto pensarono gli antichi per conoscerlo e profittarne.

Ed in fatti come non dovrà avvenir ciò, mentre col successivo, e sempre crescente riempimento degli alvei dei fiumi si scemano le loro pendenze, e vanno a perdersi ancora del tutto le più alte cadute di acque, perchè si sotterrano, ed affogano le pescaie che le producono? E quanti mai non sono i mulini (per tacere delle altre macchine idrauliche) che in più luoghi del Granducato si son persi per tali motivi, da varj secoli in qua, con indicibile pregiudizio dei privati, e del pubblico?

XLI. La necessità di conservar macinanti i mulini, e di mantenere attivo qualunque altro edifizio mosso dalle acque correnti, come pure il generale interesse di non rendere sterili e paludosi gli ubertosi terreni, che per la generale sono adiacenti al corso dei fiumi, onde si abbiano le sostanze macinabili ed alimentanti l' uomo, unitamente al riflesso delle numerosissime liti, che ovunque insorgono tra i proprietarj dei mulini e quelli dei terreni ai medesimi più o meno prossimi, attesochè son quasi sempre d' interessi totalmente opposti, mi facean da qualche tempo ravvolger nella mente il pensiere di fare il *tentativo*, per veder di trovare un qualche compenso, con cui si ponesser gli uomini al coperto di tali inquietudini, ed al sicuro di non perdere quell' immenso benefizio, che dagli idraulici edifizj presentemente ritraggono.

XLII. Fu finalmente nell' Ottobre del caduto anno 1814. che mi riescì di trovare quanto io desiderava, in occasione di essere stato consultato sulla *più celebre controversia*, che in genere di mulini siasi agitata sinora nel Foro Toscano, quale appunto si è quella dei *cinque-mulini*, che restano nell' ultimo tronco del fiume Elsa, o sia di quello, il quale da *Giovanni Boccaccio*, uno dei tre più gran luminari della Toscana Eloquenza, di maggior laude di ogni altro dell' Etruria, nella di lui Opera *De Fluminibus*, ricolmo si vede.

XLIII. Questi edifizj, conosciuti coi nomi di *Mulin-Nuovo*, del *Ponte-ad-Elsa*, di *Capo-Cavallo*, delle *Volpi*, e del *Comune*, o sia di *Bocca-d' Elsa*, quattro dei quali, cioè il *Mulin-Nuovo*, del *Ponte-a-Elsa*, delle *Volpi* e del *Comune*, spettano ciascuno respettivamente alle nobilissime Fiorentine famiglie de' Conti Bardi, degli Orlandini, dei Rondinelli e dei Pazzi: e l' altro di Capo-Cavallo alla famiglia Bucalossi, di quei dintorni, stata per il passato assai comoda, e dimorante al presente in una abitazione annessa all' istesso mulino; per essere sopra un fiume abbondantissimo di acque perenni, e quasi situato nel centro del Valdarno di sotto, e precisamente all' incrociatura delle due Regie strade Livornese, e Traversa-Romana, che passa pel Castel-Fiorentino e per Certaldo, o sia per la già patria del gran Luminare sopra avvertito (§. XL.), celebri oramai son divenuti fra noi tanto per la loro antichità, mentre rammentati vedonsi in varie carte notarili dei bassi tempi, e nella storia della lunga guerra di Semifonte, Fortilizio ora diruto nelle adiacenze di Petrognano; quanto ancora, per la cospicuità della loro rendita (1), e per avere dato luogo a contese e letigi dispendiosissimi, da due secoli a questa parte, preceduti sempre da accessi giudiciali, assistiti da valentissimi Idraulici e Matematici insigni, e da livellazioni e mappe di quel tronco dell' Elsa di 7 in 8 miglia circa, per la lunghezza di cui son posti (2), atteso l' essere i medesimi della massima

---

(1) Il canone del mulin nuovo, che ha sei palmenti, ó macini da farina, una da colori, e tre gualchiere, è di scudi 1200.

Quello del mulino del Ponte-ad-Elsa, di cinque palmenti soltanto, è d' annui scudi 950.

Il canone del mulino di Capo Cavallo, che ha tre palmenti, sebbene non calcolato a rigore per la specialità di esser tenuto in affitto da uno de' fratelli, che ne sono i padroni, ascendo, ciò non ostante, all' annua somma di scudi 550.

L' altro annuo del Mulino delle Volpi, di due palmenti, è di scudi 200.

E finalmente del Mulino di Bocca-d' Elsa di quattro palmenti ammonta agli annui scudi 788.

(2) Di strepito, e sommo dispendio fu in vero la discussione, che ebbe luogo davanti ai capitani di Parte, ed uffiziali dei fiumi, poco prima della metà del secolo decimo settimo (unico Tribunale cui anticamente era riserbata la cognizione di tali cause) e rinomata oltremodo è la Sentenza proferita dai medesimi sotto il dì 24 Luglio 1648, essendo Giudice Relatore l' Auditore Valentino Farinola, sì perchè preceduta venne da un Giudiciale Accesso, dalle livellazioni, e mappa del corso dell' Elsa da Granaiolo sino alla confluenza coll' Arno, il che è quanto dire pel tratto di circa 7 in 8 miglia, eseguite dall' ingegnere Baccio del Bianco, e dalle lunghe visite degli ingegneri Alfonso Parigi, Pier Francesco Salvini, e dal sempre celebre Vincenzio Viviani; e sì perchè in adempimento di tal Sentenza vennero regolate, e fissate con segni permanenti, incisi in liste o cartelli di marmo bianco, incassati nei muri contigui alle testate di ogni pescaia, le

utilità, tanto pubblica, che privata: perchè son dessi, i quali provvedono di farina la suddetta popolosa provincia non solo, ma Pisa e Livorno pur anche, e che ai bisogni della capitale ancora, nelle estive stagioni, bene spesso suppliscono.

XLIV. Rinata anche nel 1807 tale acerrima questione, a motivo di nuovi rialzamenti illegali, e dannosi oltremodo ai possessori adiacenti al fiume, perchè a varie riprese ne diminuivano, con grave loro pregiudizio la pendenza per braccia 5 e soldi 4 (1), nel solo tratto in lunghezza di 7 in 8 miglia; rialzamenti collocati dai mugnai sulle cime, o capezzate delle pescaie, a fine di riacquistare le necessarie cadute dell' acqua per i mulini, le quali perdute aveano per il riempimento avvenuto nell' alveo nel tempo successivo che da pochi anni a questa parte, sì nell' Elsa, come in ogni altro fiume della Toscana, è stato oltremodo rilevantissimo, in contravvenzione alle sentenze indicate nella nota dell' antecedente paragrafo, e di altre disposizioni Sovrane ancor più recenti, colle quali le loro elevazioni restaron tassativamente (per sentimento d' uomini al sommo celebri che a tal effetto furono consultati) fissate allora a quei più alti punti possibili, a' quali portar si potessero, senza nocumento degli ubertosi terreni contigui. Ricusarono in questa occasione gl' interessati di uniformarsi, siccome avean fatto qualche altra volta per il passato (atteso il peggioramento assai più rilevante delle loro condizioni) a delle *misure* o *temperamenti medj*, che loro venner proposti dal chiar. regio matematico sig. dottor Pietro Ferroni, per ultimar le nuovamente insorte vertenze.

XLV. Ma decisi, come erano in tal circostanza, i collitiganti di non volere cioè, nè dovere abbracciare l' accennato progetto, tanto in vista del pubblico, che del bene loro privato, il governo si risolvè di far riesaminare l' affare ad altra persona, onde vedere se vi

---

altezze legali delle loro cime o capezzate, colla comminazione di una penale per chiunque si fosse ardito di rimuoverle, od alterarle.

Pari a questa nell' imponenza (emetendone altra di minor conto) fu pur la lite, che suscitossi, per gli stessi motivi, nel 1773, la quale diede luogo ancor essa ad altre livellazioni, e piante dell' indicato tratto dell' Elsa, cui assistè, come matematico Regio, il chiarissimo sig. Dott. Pietro Ferroni, a relazione del quale ne nacque altra Sentenza del dì 24 Maggio 1774, confermatoria in tutto e per tutto dell' altra dell' Auditor Farinola, proferita un secolo e un quarto prima.

(1) La pescaia del mulino del comune (§. XLIII.) ha di altezza illegale, risultante tanto in questa, che in tutte le altre da tavoloni di quercia, e di pino fermati stabilmente per ritto sulla di lei sommità brac. 1, e 2 soldi. — Quella del mulino delle Volpi soldi 11. — La steccaia del muline di Capo Cavallo braccia 1 e soldi 10. — L' altra dal muline del ponte, braccia 1, e soldi 7. — E finalmente la pescaia del Mulin-nuovo soldi 14. In tutto bracc. 5. e soldi 4.

fosse stato un compenso, che bastar potesse a renderli appieno contenti, o sia valevole a salvare gl' interessi di ognuno.

XLVI. Incaricato io di tale onorifica commissione nell' Ottobre dello scorso anno 1814, spero mi sia riescito di corrispondere all' espettativa della suprema autorità, mercè l' invenzione di certe *cateratte oscillanti* (una delle quali, sotto varie posizioni, è mostrata dalle figure I., III., e IV., per meglio intenderne o concepirne la costruzione, la collocazione e l' azione) da apporsi verticalmente sopra ciascuna pescaia, le quali cateratte col ravvolgersi all' opportunità sopra stabili pernj, si aprissero e serrassero per sola operazione delle acque, e della loro gravitazione.

XLVII. Tali cateratte oscillanti (di cui in generale non posson fissarsi le altezze, dovendo desumersi le medesime, dopo aver fatte le opportune osservazioni locali, onde i ringolfi, che con esse possono, o vogliono ottenersi non nocciano, nei tempi delle acque basse dei fiumi, nè agli scoli delle campagne adiacenti, nè all' attività degli edifizj superiori (1)) non hanno che sole tre braccia di lunghezza, affine di prevenire il caso che si pieghino, o storcano.

XLVIII. I pernj delle medesime, su' quali oscillar debbono per l' effetto dell' acqua, e della loro gravità, siccome sopra accennammo (§. XLVI.) sono a tal' uopo opposti immediatamente sotto al terzo delle loro altezze, considerate dalla parte inferiore, ovvero sotto appunto al luogo in cui trovasi, come è noto per l' idrostatica (2), il centro di pressione dell' acqua, che può e dee coprirne le facce, o piani loro anteriori verticali, onde questa riesca maggiore al di sopra, che al disotto della linea marcata dai pernj avvertiti.

---

(1) Avute tali riflessioni per i cinque mulini in questione, le altezze delle cateratte da apporsi sopra le pescaie dei medesimi restaron comprese tra i limiti espressi da braccia *uno*, e *un soldo*; a braccia *due*, *soldi dodici*, e *sei danari*.

(2) Chiamando h l' altezza dell' acqua, e di una superficie rettangolare verticale S, esposta alla di lei pressione, a la larghezza di tal superficie; l' ampiezza della medesima sarà manifestamente $= a \times h$. Ora se indichiamo per p la gravità specifica dell' acqua, e se riflettiamo, che il centro di gravità di tal superficie dee trovarsi nel mezzo di essa, o sia alla metà di quella linea, la quale mostrandone l' altezza $= h$, ne divida altresì per mezzo la larghezza, la pressione normale, che soffrirà la medesima, ognun vede non poter essere che eguale a

$$p \times a \times h \times \frac{h}{2} = \frac{p \times a \times h^2}{2}.$$

Per trovare adesso nel altezza $= h$ il punto di pressione P, o sia il punto per cui passa la risultante di tutte le pressioni contro tutti i punti della faccia del piano espressa da $h \times a$, che suppongo sotto la superficie dell' acqua, e perciò dell' orlo supremo della superficie S per una distanza $= x$, immaginiamo la faccia del piano divisa in una infinità di elementi orizzontali, uno de' quali sia espresso da e, e situato

XLIX. Tali pernj appoggiano sopra grossi anelli, o meglio, staffoni di ferro, o di bronzo (vedansi le figure I, III, e IV, avvertite §. XLVI.) fermati stabilmente, quasi nella sommità di adattate colonnette di quercia purgata, di pino, o di pietra ancora, fissate in perfetta linea retta, di tre in tre braccia, sulle creste o capezzate delle pescaie.

L. Queste colonnette, così disposte, hanno tre facce regolari e spianate, e le medie, ordinate a servir di battente alle cateratte mentre son chiuse, non più larghe sono di sei soldi di braccio, nè minori di soldi cinque; e le due laterali dai sei soldi in là, a piacimento di chi fa eseguire il lavoro.

LI. I piani delle facce medie avvertite, cominciano dai tre, o quattro soldi . . . . ec. sopra le cime delle pescaie, secondochè sono più o meno grosse le ghiaie che conduce il fiume, in cui vogliono o debbono fissarsi.

Sino a tali punti debbono essere conformate a *canto*, o sia a *squarcia-acqua*, come suol dirsi, in conformità delle pile dei ponti, per evitare il caso che in tempo di piene vi si arrestino davanti le ghiaie,

---

sotto la superficie dell' acqua per la distanza t. Ciò posto, se riflettiamo, che il momento della pressione totale

$$\frac{p \times a \times h^2}{2}$$

deve necessariamente, per la statica, essere eguale alla somma dei momenti di tutte le pressioni infinitesime esercitate dal fluido su ciascun elemento del piano indicato da $e = a \times dt$, si avrà come è chiaro l' equazione

$$\frac{p \times a \times h^2 \times x}{2} = \int p \times a \times t^2 dt,$$

ovvero, togliendo ciò che vi è di comune nei due membri,

$$\frac{x \times h^2}{2} = \int t^2 dt.$$

Ora siccome la somma delle quantità $\int t^2 dt$ presa per tutta l'altezza del piano $= h$, compone evidentemente una piramide, la cui base è $= h^2$, e l' altezza $= h$, così è evidente, che l'indicata equazione si cambierà nella seguente

$$\frac{x \times h^2}{2} = \frac{h^3}{3};$$

e perciò

$$x = \frac{2}{3} h$$

Il centro di pressione dell' acqua sopra una superficie verticale è adunque collocato a' due terzi della di lei altezza, contando dalla superficie del fluido, o ad un terzo, come sopra si è detto, a contare dal di lei fondo.

le quali impedirebbero alle cateratte di chiudersi a dovere al calare delle medesime.

LII. E oltre a ciò, sono altresì le indicate piccole colonnette corredate di puntelli a contrasto colla corrente dell'acqua, e collegate fra loro con regoli spianati sulle creste delle pescaie, per maggiormente renderle stabili e ferme.

LIII. Le cateratte oscillanti sono fornite di un'armatura grossa dai tre ai quattro soldi di braccio, e rinforzata con traversa al posto ove debbono apporsi i pernj (§. XLVIII.), onde riescano più stabili.

Su tale armatura (la quale forma la vera altezza del rialzamento che può accordarsi a ciascun mulino, senza nocumento del superiore prossimo, e del naturale scolo dei terreni adiacenti) sonovi conficcate verticalmente, o sia nel senso di quei lati delle armature che restar debbono normali alla superficie dell'acqua, Tavole di quercia purgata, grosse dai quattro ai cinque quattrini di braccio, e sopravanzanti, o sporgenti l'armatura medesima, dalla parte superiore alla linea de' pernj, per un sesto della sua altezza. Lo che porta in sostanza ad essere la superficie, o piani delle cateratte al di sopra dei bilichi, ⅚ di quelle che ne sono al di sotto: o in altri termini, stanno quelle a queste come 5 a 2.

LIV. Nè ciò è tutto. Bisogna di più avvertire, che queste cateratte riescano nella costruzione un poco più pesanti al disotto dell'imperniatura, che al di sopra, affinchè per propria propensione tendano a restar chiuse, o sia verticali siccome lo mostrano le figure I. e III.

LV. Può con somma agevolezza ottenersi tale intento, o impiegando nel formarle legname più grosso, sotto la linea de' pernj, oppur convenientemente apponendovi pietre, ferro, o piombo.

LVI. Preparate in tal guisa, e collocate ai loro posti le oscillanti cateratte, ognun vede, che crescendo l'acqua del fiume, oltre i *due terzi*, sopra le imperniature, dovrà colla sua pressione, farle aprire, o affatto, o in parte, secondochè le piene saranno più o meno rilevanti: e così l'acqua avendo luogo di passare sopra e sotto alle medesime (vedasi la figura IV.) scorrerà colla libertà che richiedesi, o sia senza quasi accorgersi del piccolo ostacolo, che le presentano colle loro grossezze, attesa la smussatura delle medesime per la parte anteriore (lo che giova pur anche non poco a farle richiudere, o sia ritornar verticali per azione delle acque, mentre scemano di altezza, siccome l'accennata figura lo mostra) e attesa la depressione delle falde sul punto della discesa, e l'acceleramento maggiore perciò del di lei movimento in tal sito.

Calando poi l'acqua al di sotto delle altezze, per le quali le cateratte

si apersero, torneran queste nuovamente a serrarsi, e così sempre, senza alcun bisogno dell' opera dell' uomo.

LVII. Nè è da temersi, che tal meccanismo possa restar mai danneggiato in verun conto dalle materie che conducon le torbide si natanti, che scorrenti o striscianti sul fondo dell' alveo. Imperciocchè quando il fiume è in piena, che è l' unico caso in cui posson succedere simili trasporti, le cateratte dovendo per necessità stare aperte (§. LVI.), e restar sepolte nell' acqua assai più di quello, che possa esser sommerso di volume un corpo, che galleggi alla superficie, e più elevate dalle creste, o capezzate delle pescaie della grossezza delle pietre, che possa condurre il fiume nel sito in cui son poste (almeno che non sia un pecipitoso torrente, del qual caso non intendo parlare) ed impossibilitate a fermarsi tanto sulle creste delle pescaie, quanto davanti alle colonnette ove debbon battere le cateratte, mentre per le disposizioni altrove accennate (§. LI.), non havvi inciampo che sia capace ad arrestarli; così è evidente, che tanto quelli, quanto queste passeran sempre liberissimamente, senza aver luogo di poter fare alle cateratte oscillanti alcuno benchè minimo danno.

LVIII. Così da non temersi è puranche qualunque perturbamento del loro moto oscillatorio, sì perchè dovendo elleno aprirsi interpolatamente o molto o poco o affatto, ancora perfino ad acque chiare del fiume, tostochè queste sopravanzino al bisogno dei mulini o di altri idraulici edifizj, vien totalmente rimosso il timore, che si formino lungo di esse quei depositi terrosi o sabbiosi, i quali soli ne potrebbero essere le cause; e sì perchè quand' anche ciò accadesse (lo che non è, nè può esser mai possibile) basterebbe a distruggerne appieno l' effetto, come pure a vincere e superar quel piccolo disequilibrio, originato dalla preponderanza delle parti delle cateratte inferiori alle imperniature, la maggior pressione della corrente, che si eserciterebbe in tali casi, sulle parti delle cateratte, che rimangono al di sopra dei pernj, le quali convenientemente si accrebbero, oltre il dovere, per un sesto dell' intiera o totale altezza loro, cogli sporgimenti delle tavole, di cui sono formate, a questo effetto (§. LIII.).

LIX. Che tali sporgimenti di tavole, con cui le parti delle cateratte al di sopra de' pernj si riducono *cinque mezzi* di quelle che ne sono al di sotto, possono esser valevoli a procurarne il pronto rovesciamento, a fronte delle contrarie due riflessioni accennate, ancorchè per qualche accidentalità unitamente vi si opponessero, sembra affatto manifesto, qualora si rifletta, siccome far deesi, alla notabil differenza che passa tralle pressioni, che dall' acqua esercitar si possono sulle parti delle loro facce superiori, e delle inferiori alle

imperniature, l'ampiezza delle quali, come altrove si disse (§. LIII.), stanno respettivamente fra loro, come 5 : 2.

LX. La pressione, che l'acqua esercita sopra un piano finito, e dato di posizione, non è, come è noto, se non il complesso di tutte le pressioni parziali, che esercitar può sopra ciascuno elemento del medesimo. Ora ognuno sa, che la pressione dell'acqua, in generale, contro un elemento ydx di un piano qualunque O, e comunque situato sotto il fluido premente, circoscritto da due rette orizzontali inferiore e superiore, le quali riescano con due estremità normali ad una terza, e per ultimo da una quarta linea, e retta o curva, che ne congiunga i loro termini opposti, ognun sa, dissi essere data tal pressione dalla seguente formula.

$$(c+x) \times ydx \times \text{sen.}\ \varphi = (cydx + xydx)\ \text{sen.}\ \varphi,$$

qualora venga indicato per c la distanza del pelo superiore dell'acqua dall'orlo supremo del piano O, considerata a seconda della posizione del piano medesimo, per φ l'angolo d'incidenza di tal piano all'orizzonte, per x l'ascissa al di cui termine trovasi l'elemento ydx in questione, e per y l'ordinata, all'indicata ascissa corrispondente.

Ciò posto se denotiamo per h il lato verticale di questo piano, per a la lunghezza del di lui lato inferiore orizzontale; e se cerchiamo quindi l'integrale di siffatta espressione, in modo, che divenga $=0$, all'annullarsi della x, si otterrà manifestamente la pressione sopra la parte indeterminata del piano, compresa al di sopra dell'ordinata y; e se sostituiremo, nel detto integrale, h in vece di x, ed a in vece di y, nell'ipotesi, che il piano sia rettangolare, si conoscerà, come è chiaro, l'intera pressione dell'acqua, contro il piano di cui si parla.

LXI. Ora se facciamo dell'accennata formula l'applicazione alle nostre cateratte oscillanti, si perverrà quasichè a toccar con mano la immancabilità del loro roveściamento, o cadere, prima che l'acqua, coll'alzarsi di pelo, pervenga a pareggiarne le altezze.

E vaglia il vero, sia a tale effetto una di esse, mostrata in profilo dal vette, o leva ABC (*tav.* 4. *fig.* 2.) ruotante intorno al punto B: sarà pertanto (§. LIX.)

$$AB : BC :: 5 : 2.$$

Se denotiamo adesso per P, e P′ le pressioni orizzontali, che l'acqua separatamente esercita sulle due braccia del vette AB e BC, superiore ed inferiore, si troverà facilmente:

I.° Pel braccio AB

$$P = \tfrac{1}{2} ah^2,$$

perchè le cateratte essendo rettangolari, e normali alla superficie dell' acqua, e rovesciar dovendosi prima che questa giunga a sormontarle, e l' ordinata $y = a$, il seno $\Phi = 1$, e $c = 0$;

II.° E pel braccio BC

$$P' = ach' + \tfrac{1}{2} ah'^2,$$

Sostituendo adesso invece delle lettere i loro valori, cioè $h = 5$, $h' = 2$, $c = h = 5$ per la sola pressione inferiore, giacchè per la superiore abbiam detto essere $c = 0$, e trascurando a come comune in tutte e due le pressioni, si avrà, confrontandole insieme

$$P : P' :: (\tfrac{1}{2}h^2) : (ch' + \tfrac{1}{2}h'^2) :: 25 : 24.$$

Per trovare ora i momenti M, ed M' di tali pressioni, per la differenza de' quali dee accadere il rovesciamento delle cateratte, convien moltiplicar le medesime per le distanze de' loro punti di applicazione dall' asse del moto, che passa per il punto B. Ora è pur noto (vedi la nota del §. XLVIII.) che la distanza spettante alla pressione P, è $= \tfrac{1}{3} \times BA = \tfrac{1}{3} \times 5$; e quella della pressione P', è $= \tfrac{2}{3} \times BC = \tfrac{2}{3} \times 2$. Perciò è manifesto che, fatte le debite sostituzioni e moltiplicazioni insieme, il rapporto de' momenti sarà come segue:

$$M : M' :: 125 : 96.$$

Adunque il momento con cui l' acqua tende a far rovesciare le cateratte è tanto maggiore di quello, col quale terrebbe chiuse, o sia verticali, quando il 125 è maggiore del 96.

LXII. Di più. Le mie cateratte oscillanti non sono ordinate a tenere in collo, o a far ringolfare acque stagnanti, ma bensì a fare argine, e a star di fronte a quelle, che sono in movimento. Quindi ognun vede, che non la sola pressione, ma l' urto ancora, dee per necessità unirsi a procurarne il rovesciamento.

Ciò premesso, se riflettasi ora. 1.° che il massimo urto, o percossa di un' acqua corrente, a riguardo di un piano dalla medesima normalmente investito, forza è che si effettui in quel sito del piano, in cui trovasi corrispondere la massima velocità della intiera massa fluente; 2.° e che questa massima velocità vien data dall' oracolo infallibile dell' esperienza,

Ch' esser suol Fonte a' rivi di nostre Arti (1)

presso il mezzo della di lei altezza viva (2), e perciò sempre al di

(1) Dante nel Parad. Cant. II.

(2) Vedi l' Appendice alla Seconda Parte del mio Libro, il quale ha per Titolo

sopra della linea orizzontale, denotante la posizione dei pernj delle cateratte, la quale resta a un terzo di distanza dalle loro estremità inferiori (§. XLVIII.): facil cosa sarà l'accorgersi di quanto mai non verrà ad accrescersi, in ordine al presente riflesso, il momento della forza rovesciante; mentrechè questo, il quale, quantunque di piccolo rilievo possa riescire nel tempo di acque basse del fiume, pure assai rilevante ha da essere in occasione delle piene, allorquando unicamente le cateratte debbono orizzontarsi, o cadere, e che tutto all' indicato fine concorre.

LXIII. È poi da riflettersi, che siccome le cateratte profilate dalla leva ABC, sono ordinate a non restar, per loro stesse, altro che in situazione verticale; perciò è necessario che il momento d' inerzia di uno de' suoi bracci, che nel caso nostro è BC, riesca un poco maggiore del momento dell' altro AB, onde la medesima ancora dalla situazione orizzontale, possa tornar verticale.

LXIV. Quando un vette è bene equilibrato sul suo punto d' appoggio, siccome lo è allorchè le masse costituenti le sue braccia sono reciproche delle loro lunghezze supposte uniformi, o delle distanze dei loro centri di percossa dal fulcro (conforme io suppongo che esser debbano le cateratte delle quali è questione), ognun sa, che qualunque piccolo aumento di peso si procuri in un braccio, e non nell' altro, serve a romperne l' equilibrio, e fargli cambiare la situazione primiera.

Così se diconsi μ, e μ' le masse costituenti respettivamente le due braccia AB $= 5$, e BC $= a$ della leva ABC (fig. II.) si ha la condizione necessaria dell' equilibrio

$$AB : BC :: \mu' : \mu :: 5 : a;$$

supponendo la massa costituente il braccio AB $= \mu = 1$, quella costituente il braccio BC $= \mu'$ si troverà eguale a $\frac{5}{a}$.

LXV. Ora per produrre in questo vette, e perciò nelle cateratte da esso rappresentate, il necessario sbilancio nel momento d' inerzia dell' inferior braccio BC, col minor peso possibile, onde più agevolmente accada l' oscillamento, fà d' uopo, oltre l' avvertenza di costruir le cateratte in modo che le parti superiori ai pernj scemino in grossezza all' allontanarsi dei medesimi, siccome ottiensi mediante gli sporgimenti delle tavole al di sopra delle armature altrove avvertite (§. LIII.), e viceversa per le inferiori, bisogna inoltre disporre questo peso più verso l' estremità C che sia possibile, ovvero al

---

= *Del Modo di dirigere e regolare il corso dei Fiumi, e dei Torrenti*, venuto alla luce ultimamente dai Torchi di Niccolò Carli in Firenze.

di là del centro di percossa, il quale trovasi ai due terzi di distanza dal centro del moto B delle rispettive braccia del vette BA, BC, supposte omogenee, e regolarsi conforme agevolissimamente può altresì dimostrare nel modo seguente.

Si suppongano tali braccia BA, BC divise in una infinità di piccolissimi elementi Rr . . . . . ., Ss . . . . . . ec.; i momenti di queste infinitesime parti, rispetto al centro del moto B, è evidente che si troveranno nel medesimo rapporto tra loro di quello delle varie pressioni dell'acqua esercitate orizzontalmente sopra tutti gli elementi assegnabili dall'alto al basso in un piano verticale, per tutto quel tratto del medesimo, per cui resta esposto al di lei contatto. Ora, siccome il centro di pressione in questo trovasi ai due terzi di distanza dell'altezza, a contare dal pelo, o piano superficiale dell'acqua (vedi la nota del §. XLVIII.); così è chiaro, che ripetendo nel caso attuale un simil ragionamento, si troverebbe pure il centro di percossa pel braccio AB essere al punto H lontano da B per due terzi di BA $= \frac{2}{3} \times 5$, e pel braccio BC al punto h distante dal punto B per due terzi di BC $= \frac{2}{3} \times 2$.

LXVI. Ciò posto, siccome il peso assoluto del vette è sempre distrutto dal fulcro, qualunque sia la situazione del medesimo; così è evidente, che i momenti d'inerzia delle di lui braccia, i quali non si manifestano se non nel caso in cui venga tentato di rimuoverlo dallo stato di quiete, si conserveranno sempre gli stessi, sia che al vette si tenti d'imprimere il movimento di ruotazione, quando è orizzontale, o sia, allorchè è verticale; mentre le due pressioni agiscon sempre su di esso parallelamente fra loro, e normalmente alle di lui braccia, sul primo istante della loro azione, siccome appunto succede nelle bilance, o stadere, alle quali si assomigliano, nell'atto che si esplorano i pesi di quelle sostanze, che si appendono ai loro bracci.

LXVII. Quindi risultando dal sin qui detto, che il momento dell'acqua tendente a far rovesciare le cateratte, eccede quello con cui tende a farle star chiuse, o sia verticali, di quanto il 125 supera il 96; e che al loro rovesciamento, o in altri termini, all'effetto di tale sbilancio di pressioni niun'altra cosa si oppone fuorichè l'eccesso del momento d'inerzia delle parti inferiori sopra le superiori, il quale non avendo altro oggetto che di ricondurre alla situazione verticale le cateratte, che cadono e si orizzontano in tempo di piena, non è nè può essere se non se di piccol rilievo (§. LXIV.): Perciò sembra evidente,

I.° Che le cateratte delle quali si tratta, bilicate nel modo avvertito, non potran fare a meno di non rovesciarsi per la spinta naturale dell'acqua; poichè venendo le medesime premute al di sopra

de' pernj da una forza espressa da 125, e al di sotto da una espressa da 96, se non succedesse l'accennato rovesciamento, bisognerebbe che la differenza delle due pressioni, ordinata a produrlo, la quale è quasi l'undecima parte del totale sforzo dell'acqua sopra tutta la cateratta, e perciò infinitamente superiore all'eccesso del momento d'inerzia, se la di lei altezza è alquanto rilevante, come io la suppongo, e che è di fatto (vedi la nota del §. XLVII.), bisognerebbe, dissi, che tale eccesso di pressione restasse senza effetto; lo che non può darsi.

II.° E che una volta che le cateratte sieno state rovesciate dall'acqua, non potran tornar queste a riprender la posizione verticale, se non dopo che la medesima sarà calata sino al di sotto dell'altezza, per cui le cateratte si apersero. Nè è possibile che accader possa altrimenti; imperciocchè continuando l'acqua a scorrere, o con la medesima altezza di pelo, mediante la quale produsse il rovesciamento delle cateratte, o con altra altezza, comunque dell'accennata maggiore, è affatto evidente, che nel primo caso esisterebbe sempre l'istessa causa, la quale fu valevole a farle aprire; e che nel secondo, qualor si ammettesse per un momento, che potesser richiudersi durante le torbide, si troverebbe questa causa medesima non solo costante nella di lei intensità, ma anzi vistosissimamente accresciuta, per l'urto o percossa, conforme altrove si disse (§. LXII.), e tanto più, siccome ognun facilmente comprende, quanto maggiore fosse l'escrescenza del fiume, attesa la proporzionatamente crescente impetuosità, con cui l'acqua ne striscierebbe le estremità superiori. Adunque perchè le cateratte una volta rovesciatesi tornar dovessero a riserrarsi, o porsi verticalmente, durante l'escrescenza del fiume in cui fosser situate, bisognerebbe che a una causa valevole a farle aprire, sempre esistente e crescente ancora notabilmente, mancasse l'usato effetto: ma questo è impossibile ad aver luogo.

Dunque è altresì impossibile, che le oscillanti cateratte, le quali da me si propongono costruite e disposte ai loro siti, nel modo altrove avvertito, è altresì, dissi, impossibile, che non si rovescino al crescer delle acque, e che non risentino in tale stato, sino a tanto che le acque medesime non siensi ribbassate a dovere.

LXVIII. Accennato per tanto ai suoi luoghi, e segnatamente dal paragrafo primo al paragrafo XXXVIII. ciò che dai primi tempi sino al presente è stato fatto dagli uomini, per convertire in farina le biade, operazione, la quale può riguardarsi come la più utile, o per meglio dire necessaria per la esistenza delle civili società.

Osservati i meccanismi a tale oggetto immaginati (§§. XXXI, XXXII . . . . XXXVII.), e la maniera di rimuover da questi egualmentechè da quelli di ogni altro ordegno consimile (§. XXXVIII, e

XXXIX.); i difetti di costruzione che in loro si ravvisano, onde eliminarne gli attriti, per quanto è possibile, ed apportare in essi quel grado di perfezione, di cui abbisognano, o sono mancanti.

Visto come col solo ingrandire le ruote idrauliche, e col correggere i canali, pe' quali l' acqua passa ad investirne le pale (§. XXXIX.), si potrebbe ottener da questa un maggiore impulso, con aumento rilevante perciò della giornaliera lavorazione degli edifizj tutti in generale, ed in ispecial modo dei mulini, che sono i più interessanti, per essere gli unici mezzi, con cui gli uomini potran continuare sempre mai a convertire le loro biade in farina, colla perfezione che richiedesi; perchè son desse le sole macchine, mediante le quali, con indicibil economia di tempo, e di spesa ottener si possa quella uniformità di movimento, la quale per simile operazione essenzialmente richiedesi.

Conosciuta la necessità delle pescaie, per procurare all' acqua quel carico, o caduta valevole a farle acquistare un grado di celerità sufficiente a porre e mantenere utilmente gl' idraulici edifizj in azione (§. XL.).

Avvertito come le pescaie sieno pregiudicevoli alle campagne adiacenti al corso de' fiumi, nei quali son costruite, e come semprepiù lo diverrebbero pel continuo bisogno che si ha di dover rialzarle in proporzione che si rialzano gli alvei loro, affine di serbare o mantenere agli edifizj quei ringolfi o carichi di acque, da cui l' util conservazione loro dipende (§. XL. XLI.).

Ed esposto finalmente il mio ritrovato delle cateratte oscillanti per poter rialzare le pescaie, ed ancor costruirle di nuovo senza nocumento dei terreni contigui al corso dei fiumi, onde preservare o mantenere, ed aumentare ancora, a dispetto del riempimento de' loro letti, le cadute delle acque, ordinate a fare agire le macchine di cui è questione, unico mezzo sostanziale, al parer mio, non solo per accrescere la loro attività con vantaggio rilevantissimo ancora dei terreni contigui, ma per rimuovere affatto puranche il timore del loro affogamento, o deperizione, tanto pregiudicevole al genere umano (§. XIV.); mi affretto a pubblicare tutto ciò, affine di agevolare la strada a coloro, i quali o spontaneamente, oppure, perchè invitati dal programma emanato pel concorso del corrente anno dall' Imperiale, e Reale Accademia delle belle arti di Firenze occupar si volessero in simil tentativo, per vedere se altro vi fosse da aggiungere a quanto da me vien proposto di fare, sicuri che l' importanza della ricerca, per chi avrà la sorte di pervenire alla meta, apporterà loro la riconoscenza dei Sovrani e dei popoli.

LXIX. Terminata così l' esposizione del risultato delle mie studiose e lunghe ricerche su tal proposito, che per genio, e per dovere

dirigo mai sempre al solo fine di cooperare al pubblico bene, unico, e principale scopo de' miei desiderj, null'altro mi resta ora a bramare se non se di vedere il tutto portato al suo effetto. E ciò pure al presente si va preparando, per quel che riguarda quei mulini che restano nell'ultimo tronco dell'Elsa, lo che per proprio moto, e con Sovrano permesso è stato fatto dagli illustri proprietarj dei medesimi, i quali per riprova maggiore di loro contento, e piena soddisfazione in ciò fare, animato mi hanno a render noto colla stampa questo mio ritrovato. Quanto mai sarebbe desiderabile pel bene universale degli uomini, che tutti quelli i quali provveduti sono di cospicue e ragguardevoli entrate, secondando l'esempio che loro vien dato attualmente dai signori *Pazzi*, *Rondinelli*, *Orlandini*, e *Bardi Serzelli*, in protettori si erigessero delle vantaggiose scoperte...! Eglino come intelligenti e geniali per incoraggiare i tentativi di utili ritrovamenti, non tardarono a dichiararsi esser pronti a fare qualunque spesa, la quale stasse a comprovare il buon esito di quanto ho esposto sin ora, e che proposi loro per portarsi ad effetto, massimamente nei mulini, i quali hanno essi sull'Elsa: imperocchè conobber tosto, nelle attuali lagrimevoli circostanze dell'essersi cotanto ripieni gli alvei dei fiumi in generale, ed in ispecial modo quello dell'Elsa, conforme di ciò fa ampla fede, ommettendo ogni altra osservazione, l'affogamento avvenuto nei tempi addietro dell'ultimo mulino di essa, il qual dicevasi di Bocca-d'Elsa, e di cui non esiste al presente che il semidiruto casolare, conosciuto sotto la denominazione volgare del Mulinaccio; conobber tosto, dissi, esser questo l'unico mezzo per cui pervenir potessero a provvedere, non tanto alla conservazione sempre più utile dei prenominati mulini, quanto a rimuovere ed allontanare per l'affatto i pericoli e flagelli di quelle inondazioni, delle quali per l'addietro, sono stati preda più volte i loro latifondi contigui.

LXX. Ciò avvertito, conchiuderò col far riflettere (del che niuno esser vi può, che a pieno convenir non possa), che estendendosi l'uso delle mie cateratte oscillanti a tutti i fiumi, nei quali esiston pescaie, siccome è stato proposto farsi per i 5. mulini inferiori dell'Elsa, o sia dei più prossimi alla sua foce, o confluenza coll'Arno, per rimuovere primieramente dal di sopra delle medesime gli alzamenti illegali, producenti una diminuzione di pendenza di braccia 5, e soldi 4 nel di lei alveo, in una linea di 7. miglia circa di lunghezza (§. XLIV.), onde il fondo di questa tornar possa a ristabilirsi su quella cadente che avea quasi due secoli addietro, o sia nel 1648, alla quall'epoca essendo restati apposti i segni per le altezze legali delle pescaie, a relazione del celebre nostro Viviani, come si è già detto, non pare al certo, che le torbe danneggiar possano i

terreni adiacenti; e secondariamente per conservar non solo, ma per accrescere ancora notabilissimamente le cadute, o carichi di acqua per i mulini (1), allorchè il fiume non è in escrescenza, lo che ottiensi coll' opportuno loro cadere e rialzarsi (§. LVI.), il benefizio che gli uomini ritrar potrebbero da tale scoperta sarebbe al certo rilevantissimo, e quasi starei per dire infinito.

Ed in fatti potendosi, mediante questa, rimuovere le pescaie sino ad una certa altezza da tutti i fiumi non solo senza nuocere, ma anzi col giovare all' attività degl' idraulici edifizj, se ne otterrebbe per conseguenza certa ed immediata:

I.° Che le acque al rovesciarsi delle cateratte scorrerebbero più celeri non solo per l' accresciuta pendenza degli alvei, quanto per la diminuzione dei salti, o delle cadute che al presente ne interrompono di troppo il naturale andamento sul punto di ciascuna pescaia.

II.° Che i letti o canali si rivunterebbero assai, e più capaci così si renderebbero di ricevere e contenere quelle moli o volumi di acqua, che in certi casi sogliono e possono riunirvisi.

III.° Che le torbide, in parità di circostanze, riescirebber più basse, e passerebbero più presto.

IV.° Che le ripe, e gli argini sarebbero meno esposti alle frane e corrosioni, e più remoto si renderebbe il caso dei froldi, e dei traboccamenti.

V.° Che il pericolo di questi durerebbe per tempo più breve, e più facile al certo riescirebbe di prevenirli, o rimuoverli.

VI.° E che finalmente, con sommo vantaggio dell' industria georgica, le pianeggianti campagne aggiacenti o contigue ai fiumi, e prossime ancora, mentre con maggiore agevolezza potrebbero scolare nei medesimi, verrebbero viepiù assicurate dai timori delle rotte e delle inondazioni, le quali bene spesso sono la desolazione, ovvero l' esterminio di numerose popolazioni, e d' intiere provincie.

LXXI. Spero che questo mio ritrovamento potrà trovare grazia

---

(1) Tali aumenti di cadute, o carichi d' acqua calcolati colle avvertenze accennate al paragrafo XLVII, e per cui i proprietarj dei mulini ricrebbero d' assai i fitti, o canoni dei medesimi, sono come segue (§. XLIII.).

Pel mulino del comune, o sia di Bocca-d' Elsa, spettante a S. E. il sig. Consigliere Commendatore Alamanno de' Pazzi, *braccia* 2, *e due soldi*.

Per quello delle Volpi, attenente al sig. Commendatore Luigi Rondinelli, *braccia* 1, *ed un soldo*.

Pel mulino di Capo-Cavallo dei signori fratelli Bucalossi, *braccia* 2 *e soldi* 9.

Per l' altro del Ponte-ad-Elsa, dal sig. Cavaliere Priore Giulio Orlandini, *braccia* 2 *soldi* 16, e *denari* 6.

E finalmente pel Mulin-Nuovo, di proprietà del sig. Conte Vincenzo Bardi Serzelli, *braccia uno* e *soldi otto*.

presso i governi ed i facoltosi e gran proprietarj, e che bene accolto eziandio da tutti quelli, i quali posseggono, professano, e coltivano la scienza delle acque, perchè diretto come è, ad assicurare e promuovere il privato e pubblico bene, non lascia al tempo stesso, per quel che credo, di servire d' incremento alla scienza medesima.

DEL MOVIMENTO E DELLA MISURA

DELLE

ACQUE CORRENTI

DI

ANTONIO TADINI

INVIATA GIÀ ALLA SOCIETÀ DEI QUARANTA FONDATA DAL CAV. LORGNA VERONESE IN RISPOSTA A SUO QUESITO.

Si produce al pubblico la Memoria Idraulica che alcuni cercarono di far perdere nell' eterna obblivione. La dignità dell' argomento, che in essa si tratta, non permette qui di favellare di tale avvenimento; qualche cosa ne ho detto nel mio Ragguaglio matematico; *basti per ora che il contenuto della Memoria torni di quello in conferma. Io ho dovuto in gran parte compilare di nuovo il suo disteso, non avendo presso di me nè originale, nè copia, ma soltanto alcune carte imperfette. In questa occasione mirando al vantaggio della scienza ho illustrato alcuni punti, mostrando ancora in un luogo qualche equivoco preso del signor* Lagrange; *ed ho diverse cose aggiunte per saggio di applicazione della nostra geometria al corso de' fiumi, non che per altri minuti oggetti di pratica; ma il calcolo e le sperienze, che formano la soluzione dell' accademico quesito, nessun cangiamento hanno sofferto. Questo scritto, qualunque e' sia, è il primo che addita l' unica e sicura via, che direttamente guida alla cognizione del movimento, e de' fenomeni delle acque correnti, e de' fiumi; quella che d' ora innanzi avrà ad essere seguita da tutti coloro i quali aspireranno alla medesima meta; io però mi lusingo che gli uomini intelligenti e discreti gli vorranno essere dell' indulgente loro accoglimento cortesi.*

QUESITO PROPOSTO DALLA SOCIETÀ.

Quale tra le pratiche usate in Italia per la dispensa delle acque è la più convenevole, e quali precauzioni ed artifizj dovrebbero aggiungersi per intieramente perfezionarla, riducendo le antiche alle nuove misure (metriche).

Il vostro problema, Signori Accademici, sembra fatto per eccitare coloro, che diconsi periti delle acque, a trattarlo; e forse parecchi di questi si saranno all' impresa accinti. Nulladimeno esso risguarda un fluido in movimento; questo basta perchè il quesito appartenga alla più alta geometria, nobilitata dagli sforzi de' grandi matematici, che appena giunsero sul suo limitare. Alla vostra questione adunque, benchè in apparenza facile, nè di molta rilevanza, non può essere soddisfatto senza la profonda cognizione delle leggi che presiedono al moto de' fluidi. Io colgo questa occasione per offrire all' Accademia nella prima parte della Memoria, che le presento, un' esatta geometria del movimento de' fluidi e delle acque. Io holla trattata a modo mio più che all' altrui, nè ho voluto da essa stralciare alcune verità, che ne sono il frutto, avvegnachè al vostro quesito indifferenti. Essa non sarà inutile per coloro della Società vostra, i quali amano di ragionare al pubblico intorno agli effetti ed ai fenomeni delle acque correnti; ed innanzi di essa potrete chiamare la poca discretezza di quello straniero, già da voi in altro tema additato, il quale per quelle imperfezioni che sono famigliari compagne de' nuovi ritrovamenti volle screditare l' Idraulica degl' Italiani senza darne una migliore. Nella seconda parte della Memoria discendo, come vuole il problema, a parlare delle

pratiche usate in Italia per la dispensa delle acque correnti, facendo conoscere i principali loro difetti: niuna può dirsi all' uopo convenevole, niuna può essere all' intera perfezione recata, senza che venga del tutto cangiata. Io soggiungo la maniera semplice e spedita, suggerita dal premesso calcolo, per dispensare e misurare le acque corrrenti con tutta certezza e puntualità. Il calcolo esatto non ha bisogno di prove sperimentali che lo confermino; nulladimeno la dispensa da me additata venne posta al confronto di numerose sperienze: il calcolo è il giudice della poca o molta loro giustezza. E perchè non sembrassi parzialeggiare nella mia proposta, ho fatto ogni sforzo per avvicinare quanto si potesse il più alla convenevolezza anche il metodo che non è il mio, e che io lascio ad altri. La geometria è per sè stessa chiara; le sperienze si possono agevolmente ripetere ed anche migliorare, il che dipende dalla maggior perfezione delle macchine, e dall' addestrarsi più e più a maneggiarle.

PARTE PRIMA

MATEMATICA.

CAPITOLO PRIMO.

Nozione generale delle equazioni di condizione, alle quali deve soddisfare il movimento di qualsivoglia corpo.

1. Si noti M una massa qualunque di materia, ed x, y, z additino le tre ordinate di qualsivoglia suo punto, prese sopra tre assi di determinata origine, e posti a squadra l'uno dell'altro. Si contrassegni col simbolo D la *differenziale* della massa e delle quantità che in essa si contemplano variabili dall' uno all' altro de' suoi punti: colla δ sia indicata quella variazione *differenziale* delle quantità, la quale dipende da un movimento qualunque arbitrario, di cui sia suscettiva la massa in qualsivoglia delle sue parti o de' suoi punti. Quando faremo uso della d, verrà con essa contrassegnata la *differenziale* delle medesime quantità, che dipende dal determinato movimento cui è necessariamente soggetto il corpo in qualsivoglia suo punto a cagione delle determinate forze, dalle quali è animato.

2. Qualunque sia il movimento del corpo M e delle sue parti, dovrà eseguirsi senza alterazione della sua massa e della massa di qualsivoglia particella che in essa piaccia di assegnare, e che chiameremo col nome di elemento. La massa adunque invariabile di ciaschedun elemento si può considerare come una condizione del moto cui è forza sia in ogni punto del corpo mobile soddisfatto. Conseguentemente il movimento della massa e di ogni sua parte dovrà farsi in guisa che soddisfaccia a qualsisia matematica espressione da tal considerazione legittimamente dedotta.

3. Stante che la massa invariabile di ogni elemento è indipendente dalla sua e dall' altrui posizione, la condizione del moto posta in questa inalterabilità sarà indipendente dalle ordinate x, y, z di qualsivoglia elemento.

Ma il mobile corpo M può soggiacere ad una o più altre condizioni del moto, le quali dipendano dal sito dei suoi elementi determinato dalle rispettive ordinate x, y, z di ciascheduno.

4. E poichè ogni condizione del moto viene matematicamente espressa per un'equazione, la massa invariabile del corpo M sarà

rappresentata dalla equazione $DM - cost. = o$. Qualunque altra condizione, comunque dipendente dalla posizione degli elementi del mobile corpo, avrà per sua *analitica* espressione l'equazione di questa forma: $N = o$, additandosi colla N una funzione delle ordinate x, y, z, x', y', z', ec. de' diversi elementi.

5. Quando un corpo è sospinto da qualche forza al moto, provar deve un ostacolo insormontabile a violare la condizione cui il movimento è subordinato; ed è conseguentemente costretto a seguire quella via ch'è dalla equazione di condizione additata, vale a dire a secondare l'andamento di quella superficie che può considerarsi rappresentata da qualsivoglia particolare equazione di condizione. L'ostacolo che rattiene il corpo mobile dall' infrangere questa condizione, è quello che gli opporrebbe appunto tal superficie per obbligarlo ad andarle a seconda. E poichè la resistenza o contrammomento che una superficie impenetrabile esercita contro la forza di un corpo che tende ad invaderla, ha una direzione alla superficie medesima perpendicolare, ogni resistenza che proverà un corpo in virtù di quella condizione del moto alla quale è costretto di obbedire, verrà esercitata su quella direzione che riesce perpendicolare alla superficie dall' equazione di condizione rappresentata.

6. Egli è perciò qui da notarsi, come supponendo essere $N = o$, ovvero $\delta N = o$ l'equazione di una superficie, facendo uso de' consueti segni delle differenze parziali, e contrassegnando per brevità K la quantità $\sqrt{\left[\left(\frac{\delta N}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta N}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta N}{\delta z}\right)^2\right]}$, la linea perpendicolare alla superficie in qualsivoglia punto che abbia le x, y, z per ordinate farà, com'è noto, coll' asse della x un angolo, il cui *coseno* sia

$$\left(\frac{\delta N}{\delta x}\right) : K,$$

coll' asse della y l'angolo che abbia per *coseno*

$$\left(\frac{\delta N}{\delta y}\right) : K,$$

e finalmente coll' asse della z l'angolo corrispondente al *coseno* espresso per

$$\left(\frac{\delta N}{\delta z}\right) : K,$$

Laonde se indicheremo per Q il contrammomento dovuto alla condizione del moto, ed esercitato secondo la direzione della linea perpendicolare alla superficie rappresentata dalla equazione $N = o$,

ovvero $\delta N = 0$, sarà, come è chiaro, il contrammomento risultante nella direzione della x

$$\varsigma\left(\frac{\delta N}{\delta x}\right) : K,$$

quello ch'è esercitato nella direzione della y

$$\varsigma\left(\frac{\delta N}{\delta y}\right) : K,$$

e parimente

$$\varsigma\left(\frac{\delta N}{\delta z}\right) : K$$

il contrammomento diretto secondo la z.

7. Essendo pertanto DM $-$ *cost.* $= 0$ l'equazione di condizione cui deve soddisfare il movimento della massa M, e di qualsivoglia suo elemento DM per l'inalterabilità della sua mole, si dovrà avere $\delta DM = 0$, e si avrà parimente $\delta N = 0$ se intervenga inoltre la condizione del moto espressa per l'equazione $N = 0$; e similmente si dica di qualunque altra cotal equazione che con esse si accoppiasse. Ciascheduna dovrà ridursi alla forma *analitica* consentanea alla particolare sua nozione, e ad ognuna si avrà da adattare la precedente dottrina per conoscere gli accidenti del moto che succede nella massa M. Ma consideriamo particolarmente quanto appartiene alla prima equazione, ch'è la più importante.

CAPITOLO II.

Nozione particolare della equazione di condizione relativa all'inalterabilità della massa, e sua analitica *espressione.*

8. Se nel corpo mobile M si disegni un elemento o particella qualunque *differenziale* di forma parallelepipeda coi lati che segneremo $D\dot{x}$, $D\dot{y}$, $D\dot{z}$ disposti secondo la direzione dei rispettivi assi x, y, z, e perciò rettangola, sarà $DM = \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}$, significando Δ la densità della DM, che riguarderemo qual funzione delle sue ordinate x, y, z. La DM a cagione del movimento additato per la variazione δ dovrà soffrire cangiamento nella positura e grandezza de' suoi lati; ma se dopo questo mutamento conservasse i lati paralleli, come prima, agli assi delle x, y, z, il solido rimarrebbe ancora parallelepipedo rettangolo; e quindi la variazione δ. DM sarebbe rappresentata per la δ. $\Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}$. Ora questo è appunto ciò che succede; imperocchè mostreremo che, fatta la variazione, il

nuovo solido ha ancora tutti i lati paralleli ai correlativi assi delle x, y, z.

A tal fine si considerino i quattro punti del solido posti agli apici degli angoli che hanno per comune ordinata la x, e si cerchi qual sarà per ciaschedun punto la variazione δx di questa ordinata dipendentemente dal movimento espresso per la δ. La δx considerata nella sua più grande generalità uon potrà che essere funzione delle tre ordinate di ciasehedun punto. Ora le ordinate di uno dei quattro punti sono x, y, z, dell'altro $x, y + \mathrm{D}\dot{y}, z$, del terzo $x, y, z + \mathrm{D}\dot{z}$, e finalmente le ordinate del quarto saranno $x, y + \mathrm{D}\dot{y}, z + \mathrm{D}\dot{z}$. Dunque pel primo punto avremo $\delta x = f(x, y, z)$, pel secondo $\delta x = f(x, y + \mathrm{D}\dot{y}, z)$, pel terzo $\delta x = f(x, y, z + \mathrm{D}\dot{z})$, ed in fine pel quarto $\delta x = f(x, y + \mathrm{D}\dot{y}, z + \mathrm{D}\dot{z})$, dove la f è nsata per cifera di funzione.

Ma $f(x, y + \mathrm{D}\dot{y}, z) = f(x, y, z) + \mathrm{D}\dot{y} f'(y)$; $f(x, y, z + \mathrm{D}\dot{z}) = f(x, y, z) + \mathrm{D}\dot{z} f'(z)$; ed $f(x, y + \mathrm{D}\dot{y}, z + \mathrm{D}\dot{z}) = f(x, y, z) + \mathrm{D}\dot{y} f'(y) + \mathrm{D}\dot{z} f'(z)$, nsandosi le $f'(y)$, $f'(z)$ per simboli di funzioni prime derivate dalla funzione primitiva f secondo le rispettive variabili y, z. Ora le $\mathrm{D}\dot{y} f'(y)$, $\mathrm{D}\dot{z} f'(z)$ sono quantità *differenziali* di secondo ordine rispetto alla $f(x, y, z) = \delta x$, ch'è del primo; onde quelle non possono entrare nel calcolo di questa. Sono dunque tutte e quattro le $\delta x = f(x, y, z)$, ed eguali fra loro. Perciò il piano che unisce i quattro punti, dopo il comun loro movimento δx, resta parallelo alla primitiva faccia del solido situata verso l'origine della x. In egual modo si mostrerà che anche i quattro punti situati alla sommità dei quattro opposti angoli del solido, che hanno la $x + \mathrm{D}\dot{x}$, cioè un'altra x' per comune ordinata, e che perciò faranno un medesimo movimento $\delta x'$, si conserveranno dopo la variazione in un piano parallelo alla primiera faccia del solido giacente nella parte opposta all'origine della x.

Con simile discorso si proverà che eziandio le due facce del solido che hanno per ordinate la y l'una, e l'altra $y + \mathrm{D}\dot{y}$, si mantengono nella variazione parallele alle primitive loro positure; e similmente si conchiuderà contenersi nel movimento parallele ai primitivi piani le due faccette del solido che hanno rispettivamente la z e la $z + \mathrm{D}\dot{z}$ per ordinate.

In conseguenza il nuovo solido dopo la sofferta variazione resta compreso da piani paralleli alle primitive facce, ed ha perciò i lati paralleli ai rispettivi assi delle x, y, z; onde ritorna $\delta \mathrm{DM} = \delta . \Delta \mathrm{D}\dot{x} \mathrm{D}\dot{y} \mathrm{D}\dot{z}$.

9. Di più essendo le quattro variazioni δx di una faccia del solido eguali fra loro; e fra loro parimente eguali le quattro $\delta x'$ della faccia opposta; la variazione di ciascheduno dei quattro lati $\mathrm{D}\dot{x}$ sarà $\delta x' - \delta x$. E poichè nel movimento del solido si sono fatte variare

tutte e tre le variabili x, y, z, sarà $\delta x' - \delta x$ la variazione totale di ciascheduna $D\dot{x}$, vale a dire $\delta x' - \delta x = \delta D\dot{x}$; ma $\delta x' - \delta x$ è parimente la variazione che si otterrebbe nel movimento del solido facendo variare la sola x, e conservando costanti le y, z: dunque $\delta D\dot{x} = \left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta x}\right)\delta x$. In simil maniera si dimostrerà essere $\delta D\dot{y} = \left(\frac{\delta D\dot{y}}{\delta y}\right)\delta y$, e $\delta D\dot{z} = \left(\frac{\delta D\dot{z}}{\delta z}\right)\delta z$.

Di qua si conclude

$$\left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta y}\right) = 0;\ \left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta z}\right) = 0;\ \left(\frac{\delta D\dot{y}}{\delta x}\right) = 0;$$
$$\left(\frac{\delta D\dot{y}}{\delta z}\right) = 0;\ \left(\frac{\delta D\dot{z}}{\delta x}\right) = 0;\ \left(\frac{\delta D\dot{z}}{\delta y}\right) = 0.$$

10. Convien qui notare che nel movimento del solido i lati $D\dot{x}$, $D\dot{y}$, $D\dot{z}$ fanno pure una variazione dovuta alla $\delta\Delta$; ma siccome la Δ è funzione delle ordinate x, y, z, quella è compresa nelle variazioni dipendenti dal variare di queste. Anzi se la funzione Δ oltre le ordinate x, y, z contenesse eziandio il tempo t, o altra qualunque variabile h, dovendo queste essere le medesime a tutti gli angoli del parallelepipedo $D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z}$, non potrebbero ancora far variare le grandezze dei lati, nè le rispettive loro situazioni.

11. L'equazione pertanto di condizione $\delta DM = 0$ si trasformerà (n.° 8) nella seguente:

$$\delta.\,\Delta D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z} = 0,$$

cioè nella

$$\delta\Delta.\,D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z} + \Delta\delta.\,D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z} = 0,$$

alla quale pel n.° 9 si potrà dare questa forma: $\delta\Delta.\,D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z} +$
$$\Delta\left[\left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta x}\right)\delta x D\dot{y}D\dot{z} + \left(\frac{\delta D\dot{y}}{\delta y}\right)\delta y D\dot{x}D\dot{z} + \left(\frac{\delta D\dot{z}}{\delta z}\right)\delta z D\dot{x}D\dot{y}\right] = 0.$$

Ma, come è noto

$\left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta x}\right)\delta x = \left(\frac{D\delta\dot{x}}{Dx}\right)D\dot{x}$, $\left(\frac{\delta D\dot{y}}{\delta y}\right)\delta y = \left(\frac{D\delta\dot{y}}{Dy}\right)D\dot{y}$, e

$\left(\frac{\delta D\dot{z}}{\delta z}\right)\delta z = \left(\frac{D\delta\dot{z}}{Dz}\right)D\dot{z}$; onde l'equazione di condizione potrà finalmente porsi sotto questo generale aspetto:

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta} + \left(\frac{D\delta x}{Dx}\right) + \left(\frac{D\delta y}{Dy}\right) + \left(\frac{D\delta z}{Dz}\right) = 0 \ldots (a).$$

Tale è l'*analitica* espressione alla quale suole ridursi l'equazione dell'inalterabilità della massa che altri men propriamente chiamano equazione della continuità del corpo mobile.

CAPITOLO III.

Si esamina la natura della forza di resistenza dipendente dall'inalterabilità della massa.

12. In virtù dell'equazione di condizione $\delta DM = 0$ dipendente dall'inalterabilità della massa mobile dovendosi in ogni punto di questa, che abbia le x, y, z per ordinate, soffrire un contrammomento (n.° 5), che segneremo π, in direzione perpendicolare alla superficie che si considera rappresentata dalla medesima equazione $\delta DM = 0$, sarà per le cose dimostrate (n.° 6) il contrammomento che ne risulta in direzione

$$\text{della } x = \frac{\pi\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta DM}{\delta z}\right)^2\right]}},$$

$$\text{della } y = \frac{\pi\left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta DM}{\delta z}\right)^2\right]}},$$

$$\text{della } z = \frac{\pi\left(\frac{\delta DM}{\delta z}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta DM}{\delta z}\right)^2\right]}},$$

13. Esaminiamo alquanto queste tre espressioni. Essendo $\delta DM = \delta . \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}$, dovrà aversi per le premesse (n.° 9)

$$\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right) = \left(\frac{\delta . \Delta D\dot{x}}{\delta x}\right) D\dot{y} D\dot{z},$$

cioè

$$\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right) = \left(\frac{\delta . \Delta}{\delta x}\right) D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z} + \left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta x}\right) \Delta D\dot{y} D\dot{z}.$$

La variazione della $D\dot{x}$ secondo la x alla estremità, che ha le x, y, z per ordinate, sarà una funzione f arbitraria di queste, cioè, come

già vedemmo, $\delta x = f(x, y, z)$; alla estremità opposta corrispondente alle ordinate $x + D\dot{x}$, y, z sarà la variazione della $D\dot{x}$, cioè $\delta x' = f(x + D\dot{x}, y, z) = f(x, y, z) + D\dot{x} f'(x)$, denotando per $f'(x)$ la funzione prima derivata dalla $f(x, y, z)$ secondo la variabile x. Dunque

$$\left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta x}\right)\delta x = f(x, y, z) + D\dot{x} f'(x) - f(x, y, z) = D\dot{x} f'(x):$$

conseguentemente

$$\left(\frac{\delta D\dot{x}}{\delta x}\right) = \frac{f'(x)}{f(x, y, z)} D\dot{x}.$$

Perciò si troverà

$$\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right) = \left[\left(\frac{\delta \Delta}{\Delta \delta x}\right) + \frac{f'(x)}{f(x, y, z)}\right] \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}.$$

Indicando similmente per ff, fff due altre funzioni arbitrarie congeneri della f, ma relative l'una alla variazione della y, e l'altra alla variazione della z, e per $ff'(y)$, $fff'(z)$ le loro prime derivate secondo la rispettiva variabile, si otterrà in simil modo

$$\left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right) = \left[\left(\frac{\delta \Delta}{\Delta \delta y}\right) + \frac{ff'(y)}{ff(x, y, z)}\right] \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z},$$

$$\left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right) = \left[\left(\frac{\delta \Delta}{\Delta \delta z}\right) + \frac{fff'(z)}{fff(x, y, z)}\right] \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}.$$

14. Segnando per brevità a, b, c i *coefficienti* della $\Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}$ nei secondi membri delle tre precedenti equazioni, coll'uso di questi le tre formole del n.° 12 si cangeranno nelle seguenti:

$$\frac{\pi a}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

$$\frac{\pi b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

$$\frac{\pi c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}};$$

le quali saranno per ordine le espressioni delle forze risultanti dal contrammomento π, ed operanti secondo le direzioni delle rispettive ordinate x, y, z.

Ma essendo le funzioni additate per f, ff, fff, e non meno le loro derivate f', ff', fff' arbitrarie, salva la sola condizione dipendente dalla $\delta DM = 0$, egli è chiaro che ciascuna delle quantità a,

b, c potrà ricevere qualunque valore U da U = o fino ad U = ∞ sì positivo, che negativo. Di qua viene che ciascheduna delle tre frazioni moltiplicate per la π può avere qualunque valore V da V = o fino a V = 1; e pel doppio segno inseparabile dal *radicale* √ da V = 1 fino a V = — 1.

La forza π è del tutto indipendente dal valore arbitrario della V; nulladimeno dovendo essere in tutta la sua estensione soddisfatta l'equazione di condizione dalla quale sono legittimamente dedotte le tre precedenti espressioni, essa non potrà di sua natura non esser tale che soddisfaccia a tutti i valori V in quelle contenuti. Ora le tre frazioni, delle quali parliamo, non sono che espressioni de' coseni degli angoli, che la direzione della forza π fa cogli assi rispettivi delle x, y, z: e giacchè i valori de' coseni possono variare da V = 1 fino a V = — 1, gli angoli potranno in conseguenza avere qualunque misura gr. o fino a gr. 360 (gr. 400. Nuov. divis. del Cerch.) Dunque la direzione del contrammomento π sarà tale di sua natura, che farà con qualunque degli assi dello x, y, z qualsivoglia angolo da gr. o fino a gr. 360, vale a dire che la forza o contrammomento π dovrà operare indifferentemente ed egualmente su tutti i versi (*).

15. Dalle cose dette si conosce che le espressioni dei *coseni*, i quali entrano nelle tre formole del precedente articolo, sono del tutto indeterminate a cagione delle funzioni arbitrarie indicate per f, ff, fff: noi vedremo tosto, che assoggettando ad una legittima condizione le grandezze arbitrarie dei tre lati D$\dot{x}$, D$\dot{y}$, D$\dot{z}$ dell'elemento DM, acciocchè questa quantità parimente arbitraria esca dal calcolo, le tre funzioni prendono una forma determinata, atta a rappresentare un rispettivo valore o forza determinata.

A tal fine riassumiamo le tre espressioni del n.° 12: e poichè i coefficienti delle differenze parziali sono i medesimi, qualunque sia il genere della differenza cui appartengono, si potrà in esse sostituire la D alla δ, scrivendo $\left(\frac{D.DM}{Dx}\right)$, $\left(\frac{D.DM}{Dy}\right)$, $\left(\frac{D.DM}{Dz}\right)$ in cambio di $\left(\frac{\delta DM}{\delta x}\right)$, $\left(\frac{\delta DM}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta DM}{\delta z}\right)$.

Inoltre essendo ciascheduna formola l'espressione di una forza

(*) Basta che due de' nominati angoli possano avere i coseni di qualunque valore da V = 1 fino a V = — 1, perchè anche il terzo debba necessariamente in ciò convenire, onde essendo tre le funzioni arbitrarie f, ff, fff, soddisfanno a queste due condizioni degli angoli ed insieme alla condizione dell'equazione fondamentale δDM = o.

acceleratrice, positiva o negativa ch'essa sia, se verrà moltiplicata per un elemento qualunque delle dimensioni di M, cioè per Dx, Dy, Dz, essa rappresenterà un elemento o *differenziale* di peso, o vogliam dire di pressione: e dovendo la pressione esercitata in qualsivoglia punto della massa essere indipendente da qualunque arbitraria quantità, e perciò indipendente dalla grandezza arbitraria dei lati Dx, Dy, Dz dell'elemento DM, si potrà questa prendere comunque piaccia, salvo il valore di quella. Essendo pertanto secondo le cose dimostrate $\left(\frac{D\,.\,DM}{Dx}\right)$, $\left(\frac{D\,.\,DM}{Dy}\right)$, ec. $=\left(\frac{D\,.\,\Delta Dx}{Dx}\right)DyDz$, $\left(\frac{D\,.\,\Delta Dy}{Dy}\right)DxDz$, ec., si piglino le Dx, Dy, Dz in guisa che soddisfacciano all'equazione

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left[\left(\frac{D\,.\,DM}{Dx}\right)^2+\left(\frac{D\,.\,DM}{Dy}\right)^2+\left(\frac{D\,.\,DM}{Dz}\right)^2\right]}}=K,$$

indicandosi per K una quantità costante.

Allora le tre espressioni del n.° 12 moltiplicate per le rispettive *differenziali* Dx, Dy, Dz si trasformeranno nelle seguenti:

$$K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dx}\right)Dx,\ K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dy}\right)Dy,\ K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dz}\right)Dz;$$

ciascheduna delle quali, e la loro somma parimente esprimerà, secondo le premesse, una *differenziale* di pressione. Ma

$$K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dx}\right)Dx+K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dy}\right)Dy+K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dz}\right)Dz$$

è evidentemente un *differenziale* esatto, che noteremo $D\Pi$, Π indicando una pressione, e $D\Pi$ la sua *differenziale* che corrisponde ad una *differenziale* D delle dimensioni della massa M. Onde sarà

$$\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right)Dx=K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dx}\right)Dx,$$

$$\left(\frac{D\Pi}{Dy}\right)Dy=K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dy}\right)Dy,$$

$$\left(\frac{D\Pi}{Dz}\right)Dz=K\left(\frac{D\,.\,DM}{Dz}\right)Dz,$$

16. In tal maniera, mercè dell'introdotta condizione relativa alle grandezze arbitrarie Dx, Dy, Dz, colla quale sono state pure avvincolate le funzioni d'arbitrio segnate colle f, ff, fff; e mercè della

conseguente espulsione della DM, le tre espressioni indeterminate dell'art. 12. si trasformano nelle tre determinate

$$\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right), \left(\frac{D\Pi}{Dy}\right), \left(\frac{D\Pi}{Dz}\right).$$

La forza π che entra nelle prime espressioni dell'art. 12, opera effettualmente col medesimo vigore su tutte le direzioni, e perciò esercita la medesima azione su qualunque dei tre assi delle x, y, z, ma essendo tal forza variabile dall'un punto all'altro della massa, secondo la legge delle forze delle quali il corpo è animato, può crescere ed accumularsi su d'una direzione, e diminuire e sottrarsi su l'altra: quindi la pressione che nasce dal suo accumulamento, può crescere procedendo per un verso, e diminuire per l'altro; e perciò il mobile deve soffrire contrasto a muoversi per una direzione, e tutto l'opposito gli può avvenire camminando per l'altra. Il momento di questa resistenza accumulata su tutta la lunghezza Dx nella direzione della x è rappresentato dalla $\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right)$ Dx, e quello che corrisponde a ciascun punto della Dx, sarà in conseguenza espresso per $\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right)$. Similmente $\left(\frac{D\Pi}{Dy}\right)$, $\left(\frac{D\Pi}{Dz}\right)$ rappresenteranno i momenti delle resistenze in direzione delle respettive y, z corrispondenti a ciascun punto della massa M.

17. Di qua si conoscerà che questo genere di pressione Π operar deve egualmente su tutti i versi come il primitivo contrammomento π, di cui non è che l'accumulamento; ma deve eziandio produrre una resistenza positiva o negativa nel mobile, secondo che questo colla sua direzione passa da una pressione minore ad una maggiore, o dalla maggiore alla minore. Il calcolo legittimo ha potuto seguire le fedeli tracce del vero, finchè è giunto a svelare il meccanico mistero di tal sorta.

CAPITOLO IV.

Equazione generale del moto di qualsivoglia corpo. Distintivo matematico ch' essa offre de' corpi fluidi, semifluidi e solidi.

18. Ora che abbiamo ritrovato l'espressione determinata di quella forza che dipende dalla impermutabilità della massa di un corpo mobile, potremo dare l'equazione generale del suo movimento. Sia dunque il corpo M in qualsivoglia suo punto, che abbia le x, y, z

per ordinate, animato dalle forze X, Y, Z dirette parallelamente agli assi delle rispettive ordinate, e tendenti ad aumentarle; ma s'intenda insieme soggiacere in ogni suo punto alla condizione del moto espressa per $\delta DM = o$ dipendente dall'inalterabilità della massa; e sia inoltre subordinato ad una o più altre condizioni dipendenti dalle coordinate x, y, z, di ciascheduna punto, le quali non comprenderemo sotto una generale espressione di $N = o$, potendo in essa contenersi ancora qualche equazione di condizione particolare ad uno o più punti della massa medesima: pongasi pure nelle formole dell'articolo 6. σ in luogo di $\rho : K$, e si cangi in esse la δ in D.

Secondo le premesse, in qualsivoglia punto cui corrispondano le ordinate x, y, z, la forza acceleratrice che anima il mobile

Secondo la direzione della

$$\begin{cases} x \text{ sarà} : \Delta X - \left(\frac{D\Pi}{Dx}\right) - \sigma\left(\frac{DN}{Dx}\right) = \Delta \frac{dp}{dt}, \\ y \ldots\ldots \Delta Y - \left(\frac{D\Pi}{Dy}\right) - \sigma\left(\frac{DN}{Dy}\right) = \Delta \frac{dq}{dt}, \\ z \ldots\ldots \Delta Z - \left(\frac{D\Pi}{Dz}\right) - \sigma\left(\frac{DN}{Dz}\right) = \Delta \frac{dr}{dt}, \end{cases}$$

denotandosi con p, q, r le tre velocità secondo i tre assi delle x, y, z, e con t il tempo.

19. Esaminiamo i caratteri matematici del corpo mobile, che si celano sotto il velame di queste cifre. E giacchè la natura del corpo mobile è la medesima si nel moto, che nella quiete, consideriamola nello stato di equilibrio sempre possibile in qualsivoglia natura di corpi, nel quale i secondi membri delle tre equazioni spariranno divenuti $= o$. Si moltiplichi adunque la prima di queste per Dx, la seconda per Dy, e la terza per Dz; poi sommandole in una sola, si otterrà

$$D\Pi = \Delta(XDx + YDy + ZDz) - \sigma DN.$$

Essendo il primo membro di questa equazione un *differenziale* esatto per riguardo alle differenze D della massa, tale sarà ancora il secondo, che scriveremo DK; onde integrando si otterrà $\Pi = K + cost.$; e supponendo, come è permesso per maggiore semplicità, che al principio dell'integrale sia $\Pi = o$, e $K = o$, sarà pur $cost. = o$. Supponiamo inoltre che le forze acceleratrici X, Y, Z risultino da qualunque attrazione; ne verrà, com'è noto, $\Delta(XDx + YDy + ZDz) =$ *differenziale* esatto. Sia pertanto F il valore di K, quando nella precedente equazione non interviene il termine $-\sigma DN$ dipendente dall'equazione di condizione $N = o$; sarà $K - F$ l'effetto della resistenza nata da tale condizione, che noteremo $-R$ col segno negativo,

per essere sempre negativa e contraria al risultamento F delle forze acceleratrici ΔX, ΔY, ΔZ. Sarà dunque

$$\Pi = F - R,$$

F essendo il risultamento delle forze acceleratrici, e $-R$ il prodotto delle resistenze che tendono a diminuirlo.

20. Ora, secondo le cose dimostrate, la Π rappresenta una pressione che opera egualmente per ogni verso; in conseguenza se essa non è per ogni verso rintuzzata da una contraria pressione, vale a dire da un ostacolo che le si opponga, farà che la particella del corpo M, che la soffre, scorra per quella parte ch'è libera d'intoppo; ed altre particelle sciolte dal contrasto di questa saranno parimente spinte l'una dopo l'altra a seguirla, cangiando tutte la loro posizione relativa rispetto alle rimanenti. Questa proprietà, per la quale le parti di un corpo animato da qualsivoglia forza scorrono per qualunque verso che sia libero d'ostacolo, e cangiano fra loro di rispettiva positura, è quella che si chiama col nome di fluidità. Dunque la pressione Π egualmente per ogni verso esercitata è l'essenziale distintivo de' corpi fluidi.

Quando $R = o$ sarà $\Pi = F$, vale a dire Π avrà il massimo valore, allora la fluidità sarà la massima, cioè il corpo sarà perfettamente fluido. Dunque $\Pi = F$ esprime la condizione della perfetta fluidità; ed allora un corpo sarà perfettamente fluido, quando le sue parti non sono soggettate ad altra condizione del moto che a quella della massa invariabile. Di qua si conosce che nello stato di equilibrio, che qui si contempla, il momento F è una forza, la quale tende a dislocare le parti del corpo ed a far loro cambiare la rispettiva situazione.

Se all'opposito sarà $R = F$, vale a dire se la legge del moto espressa per l'equazione $N = o$, la quale regna fra le ordinate delle parti del corpo, è tale, per cui alla forza F tendente a far mutare il sito relativo delle parti medesime si opponga una resistenza R, che la uguagli e ne annulli l'effetto, sarà $\Pi = o$; cioè il corpo M non avrà punto di fluidità; esso sarà solido.

Se finalmente sia $R > o$, e $< F$; conseguentemente $\Pi < F$, e $> o$, il corpo avrà una fluidità imperfetta, vale a dire apparterrà al genere che suol dirsi de' *semifluidi*. Questo stato d'imperfetta fluidità dipenderà da una condizione del moto che regna fra le diverse parti del corpo, e regola le reciproche loro distanze, senza però renderle invariabili.

Si conosce pertanto che la pressione Π è il carattere distintivo della qualità de' corpi relativa al loro movimento; se $\Pi = F$, il corpo è perfettamente fluido; se $\Pi = o$, il corpo è solido; se $\Pi > o$,

e $<$ F, il corpo è *semifluido*. E queste tre diverse qualità dipendono dall'essere o non essere il corpo soggettato nel suo movimento ad una condizione di N$=$o fra le ordinate delle sue parti, e dall'essere questa condizione tale, che renda o no invariabile la posizione relativa delle parti medesime.

Egli è però da avvertire, come dipendendo in generale la forza R, che modifica la Π, dal sistema delle ordinate del corpo, e perciò ancora dai limiti che lo circoscrivono, non si potrà istituire confronto fra corpo e corpo rispetto alle forze di ciascheduno, se non se a parità di sistema di ordinate e di limiti della massa.

21. Le forze attrattive e repulsive che le parti del corpo esercitano le une sopra le altre, ovvero che soffrono per l'azione de' corpi stranieri, non alterano punto la perfetta fluidità; perchè queste accrescono bensì, o scemano il momento F, ma sempre la Π rimane ad esso eguale, nel che è riposta la perfetta fluidità.

22. Non è qui da passarsi sotto silenzio una importante verità risguardante i corpi *semifluidi*, che si ricava da queste osservazioni, vale a dire che in essi regna una pressione Π, la quale opera egualmente su tutte le direzioni, non altrimenti che ne' fluidi, col solo divario che essa è maggiore in questi, e minore in quelli. Da tal pressione dipende ancora la spinta delle terre, ed il loro scoscendimento, due articoli rilevantissimi per la scienza dell'ingenere tanto civile, che militare; nulladimeno questo principio è stato fino ad ora dimenticato. Veggansi le *ricerche intorno le spinte delle terre* del celebre sig. Prony, date alla luce in Parigi nell'anno 1802.

CAPITOLO V.

L'equazione generale del movimento de' corpi si contrae al particolare del movimento dell'acqua, e si maneggia.

23. Premessa nelle equazioni dell'art. 18. la generale espressione del movimento di un corpo di qualsivoglia natura, dovendo noi quindi trattare soltanto dell'acqua, avremo a render quella assai più semplice. Primieramente la densità dell'acqua è costante, onde potremo assumere $\Delta=1$; in secondo luogo l'acqua nell'affar nostro non può considerarsi animata che dalla gravità, la quale all'uopo presente è da ritenersi costante di forza e di direzione; perciò preso l'asse delle y in direzione verticale; e segnata g la gravità de' corpi alla superficie della terra, e sotto il nostro cerchio parallelo, sarà $\Delta X=0$, $\Delta Y=g$, $\Delta Z=0$. Inoltre le sperienze che si fanno intorno all'acqua, l'uso squisito delle bilance *idrostatiche*, il livello

costante al quale si conforma la superficie tranquilla de' grandi laghi e del mare, obbligano a dover considerare l'acqua come dotata di gelosissima e perfetta fluidità, ed a trattare il calcolo che la risguarda non altrimenti che presa $\Pi = F$, $R = o$; vale a dire che nel suo movimento non abbia luogo l'equazione di condizione $N = o$ relativa alle ordinate delle fluide particelle. Fatte pertanto queste riduzioni nelle tre equazioni dell'art. 18, e moltiplicando la prima per Dx, la seconda per Dy, e la terza per Dz, noi le trasformeremo nelle seguenti:

$$\left.\begin{array}{r} -\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right)Dx = \frac{dp}{dt}Dx, \\ gDy - \left(\frac{D\Pi}{Dy}\right)Dy = \frac{dq}{dt}Dy, \\ -\left(\frac{D\Pi}{Dz}\right)Dz = \frac{dr}{dt}Dz \end{array}\right\} \ldots\ldots (b).$$

24. L'equazione di condizione (a) dell'art. 11. dovendo essere soddisfatta in qualsivoglia movimento dell'acqua, e perciò anche in quello ch'essa fa in virtù della gravità g che l'anima, si potrà prendere $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, stante che dx, dy, dz sono le *differenziali* delle ordinate x, y, z dovute ai movimenti determinati prodotti dalla forza determinata g, che opera sopra ciascun punto della massa M. Di più essendo $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$, $r = \frac{dz}{dt}$, e dovendosi avere $D.\frac{1}{dt} = o$, perchè il tempo t non varia per la variazione dei punti della massa espressa colla D, poichè il tempo è il medesimo per tutte le parti del mobile; avvertendo inoltre che $d\Delta = o$, si potrà porre l'equazione (a) di condizione sotto questa forma:

$$\left(\frac{Ddp}{Dx}\right) + \left(\frac{Ddq}{Dy}\right) + \left(\frac{Ddr}{Dz}\right) = o \ldots\ldots (c).$$

25. Le quattro equazioni (b), (c) a differenze parziali integrate che fossero, servirebbero a determinare in funzioni finite delle ordinate x, y, z di ciascun punto della massa, e del tempo t le quattro incognite p, q, r, Π relative a qualsivoglia elemento della massa; onde per ogni istante di tempo sarebbero rappresentati tutti gli accidenti del movimento in qualsivoglia parte dell'acquea mole. Questa cognizione adunque dipende assolutamente dal saper integrare tali equazioni.

Sommando insieme le tre equazioni (b), si ritrae

$$g\mathrm{D}y - \mathrm{D}\Pi = \frac{dp}{dt}\mathrm{D}x + \frac{dq}{dt}\mathrm{D}y + \frac{dr}{dt}\mathrm{D}z \;\ldots\ldots\; (d).$$

Il primo membro di questa equazione è visibilmente un *differenziale* esatto secondo le variabili x, y, z, e perciò tale dovrà essere eziandio il secondo; l' *integrabilità* di questo è agli occhi nostri velata. Per renderla almeno in qualche caso visibile, convien dare altra forma all' espressione, onde avvincolare le *differenziali* del moto dp, dq, dr colle *differenziali* della massa $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$. Dovendo pertanto essere ciascheduna velocità p, q, r funzione delle tre ordinate x, y, z e del tempo t, sarà

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz + \left(\frac{dp}{dt}\right)dt,$$

$$dq = \left(\frac{dq}{dx}\right)dx + \left(\frac{dq}{dy}\right)dy + \left(\frac{dq}{dz}\right)dz + \left(\frac{dq}{dt}\right)dt,$$

$$dr = \left(\frac{dr}{dx}\right)dx + \left(\frac{dr}{dy}\right)dy + \left(\frac{dr}{dz}\right)dz + \left(\frac{dr}{dt}\right)dt;$$

onde sostituendo questi nuovi valori alle dp, dq, dr nel secondo membro dell' equazione, e cangiando, come è permesso, ne' *coefficienti* delle differenze parziali chiusi fra parentesi la d nella D, eccettuati i termini che si riferiscono alla dt, l' equazione (d) si trasformerà nella seguente:

$$\begin{aligned} g\mathrm{D}y - \mathrm{D}\Pi = {} & p\left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}x}\right)\mathrm{D}x + q\left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}y}\right)\mathrm{D}x + r\left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}z}\right)\mathrm{D}x + \left(\frac{dp}{dt}\right)\mathrm{D}x \\ & + p\left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}x}\right)\mathrm{D}y + q\left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}y}\right)\mathrm{D}y + r\left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}z}\right)\mathrm{D}y + \left(\frac{dq}{dt}\right)\mathrm{D}y \\ & + p\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}x}\right)\mathrm{D}z + q\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}y}\right)\mathrm{D}z + r\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}z}\right)\mathrm{D}z + \left(\frac{dr}{dt}\right)\mathrm{D}z \ldots (e). \end{aligned}$$

Considerando i tre termini di ciascheduna delle prime tre colonne di questa espressione, facilmente si ravviserà che facendo

$$\left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}x}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}y}\right),$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}x}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}z}\right),$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}z}\right),$$

ciascheduna colonna rappresenterà un *differenziale* esatto per riguardo alle differenze Dx, Dy, Dz, che sarà

per la 1.ª colonna $= pDp$,
per la 2.ª colonna $= qDq$, e
per la 3.ª colonna $= rDr$;

ma questa condizione si ottiene quando la quantità $pDx + qDy + rDz$ è parimente un *differenziale* esatto per rispetto alle medesime differenze Dx, Dy, Dz della massa; imperocchè allora, com'è noto, si ha appunto

$$\left(\frac{Dq}{Dx}\right)=\left(\frac{Dp}{Dy}\right),\ \left(\frac{Dr}{Dx}\right)=\left(\frac{Dp}{Dz}\right),\ \left(\frac{Dr}{Dy}\right)=\left(\frac{Dq}{Dz}\right).$$

Dunque le tre prime colonne dell'espressione, di cui parliamo, rappresenteranno un *differenziale* esatto secondo le differenze Dx, Dy, Dz delle dimensioni della massa, ogni volta che secondo le medesime variabili x, y, z considerate nella massa sarà un *differenziale* esatto la quantità espressa per $pDx + qDy + rDz$.

Facciasi pertanto $pDx + qDy + rDz = D\phi$, ϕ indicando una funzione delle x, y, z, e del tempo t; ma D non riferendo che la *differenziale* presa per riguardo alle sole differenze Dx, Dy, Dz delle ordinate corrispondenti a diversi punti della massa, sarà

$$p=\left(\frac{D\phi}{Dx}\right),\ q=\left(\frac{D\phi}{Dy}\right),\ r=\left(\frac{D\phi}{Dz}\right);$$

quindi

$$pDp=\left(\frac{D\phi}{Dx}\right)D\left(\frac{D\phi}{Dx}\right),$$

$$qDq=\left(\frac{D\phi}{Dy}\right)D\left(\frac{D\phi}{Dy}\right),$$

$$rDr=\left(\frac{D\phi}{Dz}\right)D\left(\frac{D\phi}{Dz}\right).$$

Si troverà parimente

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)Dx=\left(\frac{d.D\phi}{dt\,Dx}\right)Dx;\ \text{cioè}$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)Dx=\left(\frac{D.d\phi}{Dx\,dt}\right)Dx;$$

e similmente

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)Dy=\left(\frac{D.d\phi}{Dy\,dt}\right)Dy,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)Dz=\left(\frac{D.d\phi}{Dz\,dt}\right)Dz.$$

Dal che si vede che anche i tre termini della quarta colonna dell' espressione precedente formano un *differenziale* esatto, poichè la somma dei secondi membri di queste tre ultime equazioni è evidentemente

$$= D\left(\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Sostituendosi adunque nel secondo membro dell' equazione (e) gl' indagati valori, riusciranno *integrabili* secondo le variabili ordinate x, y, z tutti i termini dell' equazione medesima; onde eseguita l' *integrazione*, sortirà

$$gy - \Pi = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{D\varphi}{Dx}\right)^2 + \left(\frac{D\varphi}{Dy}\right)^2 + \left(\frac{D\varphi}{Dz}\right)^2\right] + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + K \ldots\ldots (f),$$

K indicando una costante, che fa mestieri aggiungere all' integrale per compierlo, e per rendere in ogni caso

$$\Pi + \left[\left(\frac{D\varphi}{Dx}\right)^2 + \left(\frac{D\varphi}{Dy}\right)^2 + \left(\frac{D\varphi}{Dz}\right)^2\right] + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

quando $gy = 0$.

Se nell' equazione (d) si fossero prese le Dx, Dy, Dz sulla direzione del moto, facendo cioè $Dx = dx$, $Dy = dy$, ec., il secondo membro sarebbe divenuto evidentemente *integrabile*; ma tal integrale non sarebbe che particolare alla linea del moto di ciaschedun fluido elemento.

Essendosi eseguita l' *integrazione* soltanto secondo le variabili x, y, z, si dovrebbe secondo le regole del calcolo fare all' integrale l' aggiunta di una funzione arbitraria del tempo t; ma questa può considerarsi compresa nella φ. Tale adunque sarà l' equazione integrale delle forze sollecitatrici del fluido.

26. Esprimendo le velocità p, q, r coi *coefficienti* delle differenze parziali della φ nel precedente articolo dichiarati, l' equazione di condizione (c) dell' art. 24 si cangerà nella seguente:

$$\left(\frac{DD\varphi}{Dx\,Dx}\right) + \left(\frac{DD\varphi}{Dy\,Dy}\right) + \left(\frac{DD\varphi}{Dz\,Dz}\right) = 0 \ldots (g).$$

Egli è sotto tal forma che questa equazione suole comunemente chiamarsi dai Matematici col nome di equazione de' fluidi.

27. Integrata che fosse questa equazione (g), e conosciuta quindi la funzione φ, per mezzo de' *coefficienti* $\left(\frac{D\varphi}{Dx}\right)$, $\left(\frac{D\varphi}{Dy}\right)$, $\left(\frac{D\varphi}{Dz}\right)$ delle sue differenze parziali si otterrebbero le tre velocità p, q, r; quindi l' equazione (f) ci fornirebbe il valore della Π: onde per

qualunque valore delle ordinate x, y, z e del tempo t, vale a dire per qualunque punto della fluida massa e per qualunque istante di tempo resterebbero determinate le velocità parallele ai rispettivi assi delle x, y, z, e la pressione che regna in tal punto del fluido. Nel supposto adunque che $pDx + qDy + rDz$ rappresenti un *differenziale* esatto, la scienza fondamentale del movimento dell' acqua o di qualsivoglia fluido di uniforme densità si riduce tutta ad investigare la natura della funzione espressa per la φ, vale a dire ad integrare l'equazione (g): giova pertanto, prima di proceder oltre, il soggiugnere in questo luogo, quando sia che l'espressione $pDx + qDy + rDz$ possa considerarsi qual *differenziale* esatto.

28. Se per un momento qualunque di tempo la $pDx + qDy + rDz$ fosse *differenziale* compiuto, che segnammo $D\varphi$, sarebbe per tal momento verificata l' equazione (f) dell' art. 25; nel momento seguente la $pDx + qDy + rDz$ diverrà

$$D\varphi + dt\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)Dx + \left(\frac{dq}{dt}\right)Dy + \left(\frac{dr}{dt}\right)Dz\right],$$

e sarà ancora *differenziale* esatto secondo le Dx, Dy, Dz, se la quantità $\left(\frac{dp}{dt}\right)Dx + \left(\frac{dq}{dt}\right)Dy + \left(\frac{dr}{dt}\right)Dz$ è *differenziale* esatto nel primo istante del moto. Ma dall' equazione (f) si ricava essere in questo primo momento

$$gDy - D\Pi - \tfrac{1}{2}D\left[\left(\frac{D\varphi}{Dx}\right)^2 + \left(\frac{D\varphi}{Dy}\right)^2 + \left(\frac{D\varphi}{Dz}\right)^2\right] = D\left(\frac{d\varphi}{dt}\right);$$

secondo poi le premesse si ha

$$D\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \left(\frac{dp}{dt}\right)Dx + \left(\frac{dq}{dt}\right)Dy + \left(\frac{dr}{dt}\right)Dz.$$

Essendo dunque *differenziale* compiuto il primo membro di questa equazione, lo sarà ancora il secondo; e perciò la $pDx + qDy + rDz$, ch'è *differenziale* esatto nel primo momento, lo è pure nel susseguente. Dal che si conchiude che lo sarà sempre. In fatti essendo le p, q, r funzioni delle x, y, z e del tempo t, se la forma di queste funzioni per un valore qualunque della t è tale da rendere la $pDx + qDy + rDz$ *differenziale* esatto, dovrà questo essere *differenziale* esatto per qualunque altro valore della t; poichè il diverso valore delle variabili non cangia la forma delle funzioni, dalla quale sola dipende la condizione del *differenziale* esatto.

Allorchè il movimento del fluido è prodotto dalla gravità, secondo

l'equazione (*d*) sarà

$$\frac{dp}{dt}\mathrm{D}x + \frac{dq}{dt}\mathrm{D}y + \frac{dr}{dt}\mathrm{D}z$$

differenziale compiuto: avremo dunque per la nota proprietà de' *differenziali* esatti

$$\left[\frac{\mathrm{D}\frac{dp}{dt}}{\mathrm{D}y}\right] = \left[\frac{\mathrm{D}\frac{dq}{dt}}{\mathrm{D}x}\right],$$

$$\left[\frac{\mathrm{D}\frac{dp}{dt}}{\mathrm{D}z}\right] = \left[\frac{\mathrm{D}\frac{dr}{dt}}{\mathrm{D}x}\right],$$

$$\left[\frac{\mathrm{D}\frac{dq}{dt}}{\mathrm{D}z}\right] = \left[\frac{\mathrm{D}\frac{dr}{dt}}{\mathrm{D}y}\right];$$

ma per essere $\left[\frac{\mathrm{D}\frac{1}{dt}}{\mathrm{D}x}\right] = 0$, $\left[\frac{\mathrm{D}\frac{1}{dt}}{\mathrm{D}y}\right] = 0$, ec. perchè non varia il tempo allo scambiarsi l'uno nell'altro gli elementi della massa, al che si riferisce la *differenziale* indicata per la D, avremo semplicemente

$$\left(\frac{\mathrm{D}dp}{\mathrm{D}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}dq}{\mathrm{D}x}\right),$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}dp}{\mathrm{D}z}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}dr}{\mathrm{D}x}\right),$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}dq}{\mathrm{D}z}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}dr}{\mathrm{D}y}\right);$$

conseguentemente sarà anche

$$dp\,\mathrm{D}x + dq\,\mathrm{D}y + dr\,\mathrm{D}z$$

differenziale esatto. Ma allorchè il movimento parte dalla quiete, si ha nel primo stante di tempo $p = dp$, $q = dq$, $r = dr$; dunque al cominciamento del moto generato dalla forza di gravità la $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$ è un *differenziale* esatto; e perciò secondo le cose dimostrate si manterrà mai sempre tale. Avvertirò per altro, che questo caso rammentato dai matematici appartiene al fluido, il cui moto sia affatto libero secondo la direzione della gravità, o di qualsivoglia forza risultante da una o più attrazioni.

29. Quando le velocità p, q, r sono quantità assai piccole, in guisa che i loro prodotti coi *coefficienti* delle loro differenze parziali si possono nel calcolo trasonrare, l'equazione (e) sarà ridotta alla seguente formola:

$$g\mathrm{D}y - \mathrm{D}\Pi = \left(\frac{dp}{dt}\right)\mathrm{D}x + \left(\frac{dq}{dt}\right)\mathrm{D}y + \left(\frac{dr}{dt}\right)\mathrm{D}z\,;$$

il cui primo membro essendo un *differenziale* esatto, tale dovrà pur essere il secondo: facciamo dunque

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)\mathrm{D}x + \left(\frac{dq}{dt}\right)\mathrm{D}y + \left(\frac{dr}{dt}\right)\mathrm{D}z = \mathrm{D}\psi,$$

ψ indicando una funzione qualunque delle x, y, z e del tempo t; ma D non riferendosi che alle ordinate x, y, z de' diversi punti o elementi della massa. Moltiplicando l'equazione per dt, ed integrandola secondo la variabile t, si ottiene

$$p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z = \mathrm{D}(\psi),$$

(ψ) denotando l'integrale della ψdt, la costante che si dovrebbe aggiugnere per l'integrazione, la quale sarebbe il valore della $\mathrm{D}(\psi)$ al cominciamento del tempo t, si può reputare compresa sotto l'espressione generale della $\mathrm{D}(\psi)$. Ma $\mathrm{D}(\psi)$ è evidentemente un *differenziale* compiuto secondo le variabili x, y, z, alle quali si riferisce la D, dunque sarà differenziale compiuto secondo le medesime variabili anche la quantità

$$p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z.$$

Quindi nel movimento dell'acqua derivato dalla sua gravità si potrà considerare avverata questa condizione, sempre che le velocità p, q, r siano assai piccole.

Quando nella funzione φ non si contenesse il tempo, e fosse perciò $\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0$, $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$ ec., tornerebbe nel presente assunto ciascheduna delle quantità p, q, r eguale allo zero o ad una costante, al che appunto collima la principale supposizione, onde rimarrebbe ancora $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$ differenziale esatto.

30. Per la medesima ragione, se una delle velocità qual sarebbe la p, si trovi di qualsivoglia notabile grandezza, ma costante, o presso che costante, onde abbiasi in questo ultimo $p = c + p'$, c denotando una quantità costante di qualunque grandezza, e p' una variabile assai piccola, sarà per le cose dimostrate $p'\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$ *differenziale* esatto; ed essendo tale anche $c\mathrm{D}x$, sarà parimente esatta la differenziale $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$.

Quanto si dice di una velocità p, può accomunarsi anche altre q, r; onde due qualunque delle tre, ed anche tutte e tre possono essere di qualunque grandezza, purchè costante o presso che costante, senza togliere alla espressione $pDx + qDy + rDz$ la qualità che fa considerarla *differenziale* esatto. Se mentre una velocità principale, qual sarebbe la p, è pressochè costante, ed una delle due q, r assai piccola, l'altra sia nulla, come succederebbe quando il fluido fosse costretto a secondare l'andamento di due piani paralleli al piano degli assi delle x, y, ovvero delle x, z, ognun vede che questa quantità dovrà per simile ragione trattarsi qual differenziale compiuto; e diverrà perfettamente tale quando, annullandosi anche la seconda velocità, riesca la $p =$ costante.

Quanto è detto della $p =$ costante, vale parimente per la p eguale ad una funzione della sola x, come ognun può facilmente comprendere.

Noi daremo a conoscere altrove, come in tutti i fiumi ed in tutte le acque correnti la quantità, di cui ragioniamo, debba considerarsi qual *differenziale* esatto (*). Quindi è che l'equazione (g) dell'art. 26. da questo principio derivata può in natura reputarsi qual fedele espressione dei più comuni e famigliari movimenti delle acque correnti. La difficoltà sta nel differenziale per mezzo della *integrazione* e nell'esprimere in quantità finite e determinate il valore della φ.

CAPITOLO VI.

Della integrazione dell' equazione de' fluidi.

31. L'equazione (g) del movimento de' fluidi è, come si vede, a differenze parziali del secondo ordine; essa è a tre variabili, se nella φ si considerano variare tutte e tre le ordinate x, y, z, come qui primieramente supporremo. Il signor Parseval è giunto con ingegnosa ricerca a convertirla in una equazione a differenze ordinarie, alla quale trasformazione suole darsi il nome d'*integrazione*; egli perciò ha ottenuto l'espressione della φ ne' seguenti termini:

$$\Phi = \int\int \frac{1}{v} \int (RR' - SS')\, dv \,.\, \psi(\vartheta, \sigma)\, d\vartheta\, d\sigma$$

$$+ \frac{d\left(\int\int \frac{1}{v}(RR' - SS')\, F(\vartheta, \sigma)\, d\vartheta\, d\sigma\right)}{dz},$$

(*) Vedi in fine l'annotazione quarta, dov'è rischiarata la presente materia, e dove si dà pure a conoscere qualche equivoco preso dal signor Lagrange.

Indicandosi per ϖ un arco di cerchio, che dopo l'integrazione si fa eguale al semicerchio, per ϑ un'espressione di $x+y\sqrt{-1}$, per σ altra di $x-y\sqrt{-1}$, per ψ e F due funzioni arbitrarie della ϑ e della σ, per R e S due determinate funzioni di ϑ, σ, e di archi di cerchio; e finalmente per R′ e S′ due altre determinate funzioni della z, e di archi di cerchio. *Vedi la meccanica filosofica di Prony, fac.* 344. *e seg.*

Ma siccome non si può svolgere il secondo membro di questa equazione dai segni *sommatorj* $\int\int$, se prima non sia nota la qualità delle due funzioni $\psi(\zeta, \sigma)$, $F(\zeta, \sigma)$; e queste dal loro canto, finattantochè rimangono sotto i medesimi segni $\int\int$, non ci lasciano adito a poterle coi noti metodi determinare: nessun profitto si è potuto da tal equazione ritrarre; ed è anzi più maneggevole la primiera e ben semplice espressione (*g*)

$$\left(\frac{DD\varphi}{DxDx}\right)+\left(\frac{DD\varphi}{DyDy}\right)+\left(\frac{DD\varphi}{DzDz}\right)=o$$

come che sia a differenze parziali.

32. Poichè la φ è funzione delle x, y, z, usando del metodo comune per lo sviluppamento delle funzioni in serie praticato dal signor Lagrange (*meccan. analit. f.* 474), potremo rappresentare il suo valore in una serie disposta secondo le potenze di una delle variabili, qual sarebbe per esempio la z nel seguente modo:

$$\varphi=F(x,y)+zf(x,y)+z^2f1(x,y)+z^3f2(x,y)+\ldots.,$$

prese le $F, f, f1, f2\ldots.$ per note di funzioni delle x, y senza la z. Sostituendo quindi nella proposta equazione (*g*) le differenze parziali prese da questa serie, ed uguagliando secondo il noto metodo allo zero i termini moltiplicati per una medesima potenza della z, si faranno sortire dal calcolo tutte le funzioni $f1$, $f2$ ec., e rimarrà l'equazione (*g*) espressa soltanto nelle due funzioni F, f, e nelle loro derivate. Sviluppando inoltre ciascheduna di queste secondo altra delle due variabili che contiene, per esempio secondo la y, si otterrà finalmente il valore della φ rappresentato colla seguente serie:

$$\begin{aligned}\varphi=&Fx+yF'x+\tfrac{1}{2}y^2F''x+\ldots.\\&+zfx+yzf'x+\ldots.\\&-\tfrac{1}{2}z^2F''x-\ldots.\\&-\tfrac{1}{2}z^2F''x-\ldots.\end{aligned}$$

Le funzioni Fx, fx sono due funzioni arbitrarie della sola x; la $F'x$ è la funzione prima derivata dalla $F(x, y)$ per lo sviluppamento

della y; la F'' denota la funzione seconda provegnente dal medesimo sviluppamento; e così dicasi di altre nate da tale origine. Similmente la $f'x$ indica la funzione prima derivata dalla $f(x, y)$ secondo la variabile y trasportata fuori della funzione; e così si dirà del resto. Onde tutte le funzioni sono ridotte a non contenere che la sola variabile x; ed in tal maniera l'espressione della φ è recata alla semplicità che si può maggiore.

53. Nulladimeno trattandosi di una equazione a tre variabili, riesce assai malagevole e prolissa faccenda il determinare in via di approssimazione le due funzioni arbitrarie segnate colle F, f. Mostreremo in altra occasione come ci siamo inoltrati in questo ginepraio, e non senza qualche riuscita. Ora all'uopo nostro potendo nel movimento dell'acqua rendersi costante una delle tre ordinate x, y, z di ciascun fluido elemento, come vedremo, e potendo anzi considerarsi questa come costante in natura anche pei grandi fenomeni de' fiumi, noi intraprenderemo d'investigare in tale assunto le due funzioni arbitrarie, delle quali parliamo. E poichè il supposto che la φ sia funzione di due sole variabili, che diremo x, y, apre la via ad una integrazione dell'equazione (g) in termini finiti, benchè necessariamente involti sotto il velo di due funzioni arbitrarie, noi non mancheremo di additarla.

54. Considerandosi la z come costante nell'espressione della φ, l'equazione (g) de' fluidi a due variabili diviene

$$\left(\frac{DD\varphi}{Dx\,Dx}\right) + \left(\frac{DD\varphi}{Dy\,Dy}\right) = 0,$$

ovvero, ponendo qui per maggior chiarezza $F(x, y)$ in vece di φ, ed usando i soliti segni delle funzioni derivate, essa prende questa forma:

$$F''(x, y) = -F'''(x, y) \ldots\ldots (h),$$

$F''(x, y)$ indicando la funzione seconda di $F(x, y)$ presa secondo la variabile x; e $F'''(x, y)$ denotando parimente la seconda funzione derivata dalla variabile y.

L'equazione è simile a quella delle corde vibranti, che D'Alembert, benemerito inventore del calcolo a differenze parziali (il solo che dominar possa su tutta la vastità delle fisiche scienze), ha integrata con ingegnoso metodo, qual si può vedere presso il Cousin, *Lezioni di calcolo differenziale f.* 307, e nella Metodica *Enciclopedia*, artic. *Parziali*. Parlando però in particolare della nostra equazione (h), si può a prima vista rinvenire il suo integrale o funzione primitiva $F(x, y)$.

55. In fatti prescindiamo un momento dalla diversità dei segni, dei quali sono affetti i due membri dell'equazione (h), ed egli sarà

ben chiaro che la funzione seconda, o qualunque derivata dalla variabile x, non può essere eguale alla seconda o a qualsivoglia altra derivata nel medesimo ordine dalla variabile y, se x o y non siano allo stesso modo contenute nella funzione primitiva, ed in guisa che la differenza di questa sia la medesima, tanto se si apponga un' aggiunta alla x, come se in vece si attacchi alla y; il che non può avverarsi se non se allora quando la funzione primitiva $F(x, y)$ è di questa forma:

$$F(x+y).$$

Questo vale nell' assunto che sia $F''(x, y) = F''(x, y)$; ma dovendo il secondo membro avere per *coefficiente* il -1, egli è evidente che, trattandosi di una funzione seconda, questo dovrà provenire da un *coefficiente* $= \sqrt{-1}$, del quale sia affetta la variabile y. Abbiamo dunque in termini finiti un integrale dell'equazione (h), cioè della equazinne (g) de' fluidi a due variabili sotto questa forma:

$$\varphi = F(x+y\sqrt{-1}),$$

F denotando una funzione arbitraria. Ma poichè $\sqrt{-1}$ ha necessariamente due segni $+$, $-$, soddisfarà all' equazione (g) anche l'integrale

$$\varphi = FF(x-y\sqrt{-1}),$$

indicando colla FF un' altra funzione arbitraria. Per la qual cosa l'integrale φ non potrà essere compito senza comprendere ambidue questi valori: dunque

$$\varphi = F(x+y\sqrt{-1}) + FF(x-y\sqrt{-1})$$

sarà un' espressione della φ più compinta della precedente.

Sotto tal forma è stato fino ad ora, per quanto io sappia, prodotto l' integrale dell' equazione de' fluidi a due variabili (vedi Cousin, *Lezioni di calcolo differenziale*, *f.* 311, nel che collima ancora il Coccoli, *Dissertazione ec.*, *f.* 19.); esso sembra compiuto, perchè comprende due funzioni arbitrarie segnate per F, FF, come richiede l' *integrazione* compiuta delle differenze parziali del secondo ordine; nulladimeno egli è difettoso, come tosto vedremo.

Giacchè le due funzioni possono essere accoppiate fra loro tanto col segno $+$, quanto col segno $-$, atteso che in ambedue queste maniere resta appagata l'equazione; il valore della φ potrà rappresentarsi ancora sotto questa forma:

$$\varphi = f(x+y\sqrt{-1}) - ff(x-y\sqrt{-1}),$$

indicate per f, ff due nuove funzioni arbitrarie. Unendo adunque

questi due valori della φ, avremo l'integrale compiuto e generale della φ sotto questa espressione:

$$\varphi = F(x + y\sqrt{-1}) + FF(x - y\sqrt{-1})$$
$$- f(x + y\sqrt{-1}) - ff(x - y\sqrt{-1}) \ldots\ (i).$$

Sembrano in vero quattro funzioni arbitrarie, e perciò eccedenti il bisogno, come pare eziandio chiaro che le due funzioni della $x + y\sqrt{-1}$ potrebbero, generalmente parlando, comprendersi sotto una sola, e parimente sotto una sola le due funzioni della $x - y\sqrt{-1}$; ma noi vedremo che le quattro arbitrarie si ridurranno a due sole non già in questo manchevole modo, ma in altro prescritto dalla natura della funzione φ; per lo che ci è qui uopo fare una digressione.

CAPITOLO VII.

Digressione sopra una proprietà delle funzioni immaginarie, e conclusione della forma alla quale si riduce in termini finiti l'integrale della funzione φ a due variabili.

36. Nell' equazione (i) il valore φ del primo membro è reale, non immaginario, perciò anche l'espressione del secondo membro dev'essere tale; conseguentemente le quantità immaginarie che contengono la $\sqrt{-1}$, avranno a distruggersi da loro medesime, e ad uscire dal calcolo. Questa manifesta condizione fa che le due funzioni denotate per F, FF debbano trovarsi d'una stessa forma F, e le due parimente espresse per f, ff d'una medesima forma f; onde sia

$$FF(x - y\sqrt{-1}) = F(y - y\sqrt{-1}),$$
$$ff(y - y\sqrt{-1}) = f(y - y\sqrt{-1}).$$

Per dimostrare questa verità conviene svolgere una funzione qualunque di questa forma $F(x + y\sqrt{-1})$.

Sviluppando colle note regole la funzione in una serie esatta e disposta secondo le potenze della $y\sqrt{-1}$, si ricaverà

$$F(x + y\sqrt{-1}) = Fx + y\sqrt{-1}\,F'x - \frac{y^2}{2}F''x - \frac{y^3\sqrt{-1}}{2.3}F'''x$$
$$+ \frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}x + \frac{y^5\sqrt{-1}}{2.3\ldots5}F^{V}x - \ldots + \frac{y^n}{1.3\ldots n}F^{n}(x + \lambda y\sqrt{-1}),$$

n indicando un numero qualunque arbitrario, ma che per maggior chiarezza di calcolo si prenderà pari e moltiplice del 4, affinchè il *coefficiente* dell'ultimo termine sia sgombero della $\sqrt{-1}$, ed abbia

affisso il segno positivo, il chè si intenderà osservato anche in ciò che segue, e λ dinotando un *coefficiente* numerico, che secondo la dottrina delle funzioni in serie sviluppate dovrà essere > 0, e < 1.

Ricominciando di nuovo a dispiegare l' ultimo termine in serie, arrestandola ad un numero arbitrario n' di nuovi termini, otterremo l' ultimo

$$= \frac{\lambda^{n'} y^{n+n'}}{2.3\ldots n.2.3\ldots n'} F^{n+n'}(x+\lambda'\lambda y\sqrt{-1}),$$

λ' denotando un nuovo *coefficiente* > 0, e < 1. E ritornando similmente a sviluppare questo medesimo, poi il nuovo che emerge, poi altro ed altro, segnitando via via a fare la stessa operazione per un numero arbitrario m di volte, si troverà finalmente che l' estremo termine, al quale piace di troncare il processo, sarà

$$A y^{n+n'\ldots+n^m} F^{n+n'\ldots+n^m}(x+\lambda^m\ldots\lambda'\lambda y\sqrt{-1}),$$

A indicando il *coefficiente* della funzione composto di quantità costanti.

In tal modo la premessa serie, in cui è spiegata la funzione $F(x+y\sqrt{-1})$, si troverà continuata fino a quest' ultimo termine della n^m, crescendo in essa senza interrompimento gli esponenti della y secondo l' ordine naturale de' numeri 1, 2, 3..., e dandosi fra loro costantemente il cambio i segni $+$, $-$ di due in due termini, come sopra si osserva.

Considerando l' espressione $\lambda^m\ldots\lambda'\lambda y\sqrt{-1}$ compresa sotto la funzione dell' ultimo termine, atteso che ogni moltiplicatore λ, $\lambda'\ldots\lambda^m$ ha un valore minore dell' unità, e dipendente dal numero arbitrario $n, n', \ldots n^m$ de' termini di ciascheduna correlativa serie, e potendosi inoltre prendere la m, e perciò la moltitudine di tali moltiplicatori maggiore di qualunque numero dato, s' intenderà facilmente che il valore dell' espressione $\lambda^m\ldots\lambda'\lambda y$ potrà rendersi minore di qualsivoglia quantità che si assegni. Rimane adunque dimostrato, secondo il metodo accuratissimo degli antichi, che mercè della continuazione indefinita del processo, col quale si sviluppa nel premesso modo la funzione $F(x+y\sqrt{-1})$, l' espressione $\lambda^m\ldots\lambda'\lambda y$, e quindi la quantità immaginaria $\lambda^m\ldots\lambda'\lambda y\sqrt{-1}$ compresa sotto la funzione indicata per la $F^{n+n'\ldots+n^m}$ dell' ultimo termine diviene $= 0$, e sparisce dal calcolo.

In tal guisa tutte le funzioni della serie indicate per la cifra F comprenderanno la sola quantità reale x, rimanendo fuori del segno F le quantità immaginarie avvolte colla $\sqrt{-1}$.

Avvertiremo in questo luogo, che mercè della continuazione del

processo col quale si va sviluppando la primitiva funzione, divenendo $\lambda^{m} \ldots \lambda' \lambda y \sqrt{-1} = 0$, rendesi necessariamente anche $A = 0$, giacchè contiene un moltiplicatore $(\lambda^{m-1} \ldots \lambda' \lambda)^{m} = 0$; ma di qua non conseguita che sia $= 0$ l' ultimo termine della serie generale, poichè la fuzione $F^{n+n' \ldots + n^{m}} x$ di qnesto può, a misura che si sviluppa, diventare maggiore di qualunque quantità che piaccia di assegnare, ed avere per limite di suo crescimento la quantità $\frac{1}{0}$; il che farà che l' ultimo termine della serie

$$A y^{n+n' \ldots n^{m}} F^{n+n' \ldots + n^{m}} x$$

abbia per limite del suo valore l' espressione $\frac{0}{0}$, alla quale, come ognun sa, può corrispondere qualsivoglia valore, ed anche maggiore di ogni quantità finita che si assegni.

Ritornando adunque alla serie generale, poichè tutte le funzioni che comprende sono sceverate dalla quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, e questa non rimane che fuori di esse ne' termini che contengono le potenze della y di esponente dispari, potremo rappresentare per B tutti i termini della serie corrispondenti agli esponenti pari della y, e per $C\sqrt{-1}$ tutti que' che hanno l' esponente dispari affisso alla y, B e C denotando due quantità reali. Dal che viene

$$F(x + y\sqrt{-1}) = B + C\sqrt{-1},$$

colla qual sequela conviene il noto teorema di D' Alembert risguardante le qnantità immaginarie.

37. Se ora s' intenderà che venga sviluppata un' altra funzione qualunque della $x - y\sqrt{-1}$, che segneremo $FF(x - y\sqrt{-1})$, e che si proceda puntualmente allo stesso modo col quale abbiamo dispiegato la funzione $F(x + y\sqrt{-1})$, la serie de' termini che si otterrà, sarà affatto simile alla precedente, eccetto i segni corrispondenti alle potenze dispari della y, i quali saranno contrarj. Avremo dunque

$$FF(x - y\sqrt{-1}) = B' - C'\sqrt{-1},$$

B' e C' indicando parimente due quantità reali.

Egli è chiaro che ciascheduna quantità $B + C\sqrt{-1}$, e $B' + C'\sqrt{-1}$ non può rappresentare un valore reale, essendo dall' una e dall' altra inseparabile la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, quindi nè $F(x + y\sqrt{-1})$, nè $FF(x - y\sqrt{-1})$ solitariamente presa può esprimere una quantità reale: unendo ambedue insieme, otterremo

$$F(x + y\sqrt{-1}) + FF(x - y\sqrt{-1}) = B + C\sqrt{-1} + B' - C'\sqrt{-1}.$$

Nel secondo membro di questa equazione le quantità immaginarie $C\sqrt{-1}$, $-C'\sqrt{-1}$ non possono distruggersi da loro medesime ed uscire dal calcolo, quando non sia $C'=C$, il che non può succedere, se non se a condizione che la funzione indicata per la FF sia della medesima forma che quella denotata per la F, onde si abbia

$$FF'x = F'x,\ FF''x = F''x,\ \text{ec.}$$

Quindi si conosce la ragione per la quale l'integrale dall' equazione de' fluidi.

$$\varphi = F(x+y\sqrt{-1}) + FF(x-y\sqrt{-1}),$$

qual si trova presso i matematici, dicasi non compinto; poichè la condizione della φ quantità reale fa che sia FF della medesima costruzione di F; onde l' integrale diventa

$$\varphi = F(x+y\sqrt{-1}) + F(x-y\sqrt{-1}),$$

il quale è un integrale particolare e non generale, come esser deve.

Diversa è la cosa nell' equazione delle corde vibranti, dove $\varphi = F(x+cy) + FF(x-cy)$ è integrale compiuto; perchè ciascheduna funzione separatamente presa è quantità reale; quindi sussistono le due diverse funzioni arbitrarie che formano l' integrale compiuto.

38. Se ora prenderemo due altre funzioni arbitrarie qualunque $f(x+y\sqrt{-1})$, $ff(x-y\sqrt{-1})$, egli è chiaro che coll' antecedente processo la prima si ridurrà all' espressione di $D+E\sqrt{-1}$, e la seconda all' espressione di $D'-E'\sqrt{-1}$; e sottraendo una funzione dall' altra si otterrà

$$f(x+y\sqrt{-1}) - ff(x-y\sqrt{-1}) = D + E\sqrt{-} \\ - D' + E'\sqrt{-1}.$$

Il secondo membro di quest' equazione non potrà essere liberato dalla $\sqrt{-1}$, nè rappresentare un valore reale se non a due condizioni, cioè: 1.° che D, E, D', E' contengano per comun divisore la $\sqrt{-1}$, vale a dire che le funzioni indicate per f, ff, e le loro derivate siano affette di un divisore costante $=\sqrt{-1}$, in virtù del quale il secondo membro, di cui si ragiona, si trasformerà nel seguente:

$$-(D)\sqrt{-1} + (E) \\ + (D')\sqrt{-1} + (E'),$$

(D), (E), (D'), (E') essendo quantità reali; 2.° che sia $(D')=(D)$, cioè $D'=D$. E poichè questa seconda condizione non può avverarsi se non quando la f, ff esprimano una medesima funzione, i due

termini $f(x+y\sqrt{-1}) - ff(x-y\sqrt{-1})$ non rappresenteranno un valore reale, se non se sotto questa particolar forma:

$$\frac{f(x+y\sqrt{-1})-f(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$

39. E qui noteremo di passaggio una verità generale che facilmente si ritrae dalla precedente dimostrazione, vale a dire che qualunque espressione di una quantità reale, la quale contenga l' immaginaria $\sqrt{-1}$, deve avere la forma, o deve poter essere ridotta alla forma di

$$F(a+b\sqrt{-1})+F(a-b\sqrt{-1}),$$

ovvero di

$$\frac{F(a+b\sqrt{-1})-F(a-b\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

dove a, b indicano quantità reali. Per esempio la radice cuba d' una quantità reale nel caso che si chiama *irreduttibile*, la quale si trova $=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})^3}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})^3}$, appartiene alla prima forma; ed il valore del seno nella seguente espressione

$$Sen.\, x = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^{x\sqrt{-1}}-a^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

si riferisce alla seconda forma. Il Nicole avea notato che risolvendo in serie i precedenti due termini della radice cuba, le quantità che contengono l' immaginaria $\sqrt{-1}$ si distruggevano, ma siccome qui non si trattava che di tal funzione particolare, e la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ rimaneva sempre nell' ultimo termine della serie che si trascurava, la dimostrazione non potè essere nè generale, nè esatta, qual è la nostra; e non sappiamo se altri abbia trattato in tutta la sua estensione simile argomento.

40. Ripigliando ora l' equazione (i) dell' art. 35., colla premessa dottrina facilmente ci convinceremo che non potendo veruna delle quattro funzioni espresse per F, FF, f, ff, presa separatamente dalle altre, rappresentare una quantità reale, non vi ha nessun' altra combinazione dei quattro termini del secondo membro dell' equazione, la quale fornisca due funzioni reali necessarie per l' integrale compiuto, se non se quella di due coppie, quali noi abbiamo già formate. Laonde il vero integrale compiuto della equazione de' fluidi sarà

$$\phi = F(x+y\sqrt{-1})+F(x-y\sqrt{-1}) + \frac{f(x+y\sqrt{-1})-f(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} \ldots\ldots (k).$$

In questa guisa la condizione, per la quale il valore della φ dev'essere in effetto reale, avvegnachè espresso per funzioni immaginarie della $\sqrt{-1}$, ha ridotto le quattro funzioni arbitrarie segnate colle F, FF, f, ff a due sole F, f, come esige l'*integrazione* compiuta dell'equazione a differenze parziali del secondo ordine, di cui trattiamo.

CAPITOLO VIII.

S'intraprende la determinazione delle funzioni arbitrarie contenute nella φ.

41. Indagata la forma generale dell'integrale compinto φ, rimangono parimente determinate le forme delle espressioni che rappresentano le due velocità p, q parallele agli assi delle x e delle y; imperocchè ritenuti i segni praticati nel maneggio delle funzioni, sarà

$$p=\left(\frac{D\varphi}{Dx}\right)=F'(x+y\sqrt{-1})+F'(x-y\sqrt{-1})$$
$$+\frac{f'(x+y\sqrt{-1})-f'(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}};$$

$$q=\left(\frac{D\varphi}{Dy}\right)=\sqrt{-1}\,[F'(x+y\sqrt{-1})-F'(x-y\sqrt{-1})]$$
$$+f'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1}).$$

Egli è chiaro che se in qualche punto della fluida massa M si conoscesse la forma delle due funzioni arbitrarie F', f', e quindi delle loro primitive F, f, essa sarebbe nota per tutta la massa, poichè la forma delle funzioni è invariabile per tutte le parti del fluido. E poichè questo ai limiti della massa deve col suo moto secondare l'andamento delle sponde, o di quelle qualunque superficie, entro le quali il liquore è contenuto, e che noi per maggior chiarezza chiameremo per lo più col nome di sponde; le due funzioni arbitrarie dovranno esser tali che soddisfacciano alla forma di queste. Dalla figura pertanto delle sponde, entro le quali il fluido corre rinchiuso, si potrà determinare la forma delle due funzioni immaginarie che debbono rappresentare il suo movimento.

42. Ritenendo l'assunto che il movimento del fluido sia indipendente dalla variabile z, sarà $\left(\frac{D\varphi}{Dz}\right)=0$, quindi la velocità $v=0$, e ciascuna stilla del liquore non si moverà che sopra un piano parallelo a quello degli assi delle x, y. Sia dunque ogni elemento ad una estremità della massa fluida costretto a descrivere su tal piano

la curva della rispettiva sponda rappresentata dall' equazione $Dy = mDx$, ed all'altra estremità secondi col movimento la curva dell' opposta sponda rappresentata per l'equazione $Dy = nDx$, m e n essendo funzioni della x. Queste due curve, da noi risguardate come due sponde contenenti il fluido in moto, si considerano come invariabili rispetto al tempo.

Dovendo il fluido secondare col suo movimento la curva delle sponde, le dx, dy avranno fra loro il medesimo rapporto che le Dx, Dy; onde alle precedenti equazioni delle due sponde si potranno sostituire le seguenti: $dy = mdx$, $dy = ndx$; quindi ancora

$$\frac{dy}{dt} = m\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} = n\frac{dx}{dt},\ \text{cioè}$$

$$q = mp,\ q = np,$$

p e q essendo le due velocità dirette parallelamente agli assi delle rispettive x, y.

43. Sostituendo in queste due equazioni i valori delle p, q già ritrovati all'art. 41, e notando y_1 le ordinate y che si riferiscono alla prima sponda, e y_2 quelle che terminano alla seconda, le due equazioni di condizione relative alle sponde si trasformeranno nelle seguenti:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-1}\,[F'(x+y_1\sqrt{-1})-F'(x-y_1\sqrt{-1})]\\
&\quad+f'(x+y_1\sqrt{-1})+f'(x-y_1\sqrt{-1})\\
&=mF'(x+y_1\sqrt{-1})+mF'(x-y_1\sqrt{-1})\\
&\quad+m\frac{f'(x+y_1\sqrt{-1})-f'(x-y_1\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},\\
&\sqrt{-1}\,[F'(x+y_2\sqrt{-1})-F'(x-y_2\sqrt{-1})]\\
&\quad+f'(x+y_2\sqrt{-1})+f'(x-y_2\sqrt{-1})\\
&=nF'(x+y_2\sqrt{-1})+nF'(x-y_2\sqrt{-1})\\
&\quad+n\frac{f'(x+y_2\sqrt{-1})-f'(x-y_2\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}.
\end{aligned}$$

Mercè di queste due equazioni sono da determinarsi le due funzioni arbitrarie F' e f'; ma il calcolo delle funzioni non è ancor giunto a quel grado di perfezione da poter di netto disbrigare queste due incognite dal viluppo di simili equazioni. Quindi è che conviene risolvere le funzioni in serie, ed attenersi ad un metodo penoso e di approssimazione, il quale però fortunatamente potrà soddisfare non solo all' intento nostro, ma ancora alla cognizione delle grandi vicende del corso de' fiumi.

44. Sviluppando pertanto in serie coi conosciuti metodi le funzioni primitive segnate F, f dell' equazione (k), e disponendo i termini in una serie sola secondo le potenze della y, si ottiene.

$$\varphi = Fx + yf'x - \frac{1}{2}y^2F''x - \frac{1}{2.3}y^3f'''x + \frac{1}{2.3.4}y^4F^{IV}x$$

$$+ \frac{1}{2.3...5}y^5f^{V}x - \frac{1}{2.3...6}y^6F^{VI}x + \rho;$$

quindi

$$p = \left(\frac{D\varphi}{Dx}\right) = F'x = yf''x - \frac{1}{2}y^2F'''x - \frac{1}{2.3}y^3f^{IV}x$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}y^4F^{V}x + \frac{1}{2.3...5}y^5f^{VI}x + \rho,$$

$$q = \left(\frac{D\varphi}{Dy}\right) = f'x - yF''x - \frac{1}{2}y^2f'''x + \frac{1}{2.3}y^3F^{IV}x$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}y^4f^{V}x - \frac{1}{2.3...5}y^5F^{VI}x + \rho.$$

Usiamo indifferentemente la ρ per indicare il residuo di qualsivoglia serie; essa ha perciò diverso valore nelle serie diverse. Per maggior comodo da qui innanzi scriveremo le sole F, f, ec. in vece delle Fx, fx, ec.

45. Se la y sia minore della x, come generalmente in natura si verifica per tutte le correnti di acqua, sarà lecito considerare la x come quantità di primo ordine, la y di secondo ordine; potremo inoltre risguardare le m, n come di second' ordine rispetto alla unità, la q rispetto alla p, ed anche la f' e le sue derivate a fronte della F' e delle sue dipendenti; onde si comprenderà quando le potenze di queste quantità, o i loro prodotti saranno del terzo, del quarto o del quinto ordine, ec. Ciò per altro non serve che per comoda denominazione, la quale non ristrigne punto la generalità del calcolo.

46. Sostituendo adunque nelle due equazioni relative alle sponde $q - mp = 0$, $q - np = 0$ i valori delle p, q tratti dalle premesse due serie, non oltrepassando i termini di sesto ordine, noi le trasformeremo nelle seguenti:

$$-mF' - my_1f'' + \frac{1}{2}my_1^2F''' + \frac{1}{2.3}my_1^3f^{IV} - \frac{1}{2.3.4}my_1^4F^{V}$$

$$+ f' - y_1F'' - \frac{1}{2}y_1^2f''' + \frac{1}{2.3}y_1^3F^{IV}$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}y_1^4f^{V} - \frac{1}{2.3...5}y_1^5F^{VI} + \rho = 0;$$

$$-nF - ny_2 f'' + \frac{1}{2} ny_2^2 F''' + \frac{1}{2.3} ny_2^3 f^{IV} - \frac{1}{2.3.4} ny_2^4 F^{V}$$

$$+f' - y_2 F'' - \frac{1}{2} y_2^2 f''' + \frac{1}{2.3} y_2^3 F^{IV}$$

$$+\frac{1}{2.3.4} y_2^4 f^{V} - \frac{1}{2.3\ldots5} y_2^5 F^{VI} + \rho = 0.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, facendo $y_2 - y_1 = \lambda$, e disponendo acconciamente i termini, si avrà

$$(n-m)F' + \lambda F'' = \frac{ny_2^2 - my_1^2}{2} F''' + \frac{y_2^3 - y_1^3}{2.3} F^{IV}$$

$$-\frac{ny_2^4 - my_1^4}{2.3.4} F^{V} - \frac{y_2^5 - y_1^5}{2.3\ldots5} F^{VI} + \rho$$

$$-(ny_2 - my_1) f'' - \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} f'''$$

$$+\frac{ny_2^3 - my_1^3}{2.3} f^{IV} + \frac{y_2^4 - y_1^4}{2.3.4} f^{V} + \rho \ldots (l).$$

Altrimenti sommando le due equazioni divise per 2, scrivendo μ in vece di $\frac{y_2 + y_1}{2}$, e disponendo a dovere i termini otterremo

$$f' = \frac{n+m}{2} F' + \mu F'' - \frac{ny_2^2 + my_1^2}{2.2} F''' - \frac{y_2^3 + y_1^3}{2.2.3} F^{IV}$$

$$+\frac{ny_2^4 + my_1^4}{2.2.3.4} F^{V} + \frac{y_2^5 + y_1^5}{2.2.3\ldots5} F^{VI} + \rho$$

$$+\frac{ny_2 + my_1}{2} f'' + \frac{y_2^2 + y_1^2}{2.2} f'''$$

$$-\frac{ny_2^3 + my_1^3}{2.2.3} f^{IV} - \frac{y_2^4 + y_1^4}{2.2.3.4} f^{V} + \rho \ldots (m).$$

47. Si avverta essere nell'equazione (l)

$$m = \left(\frac{Dy_1}{Dx}\right),\ n = \left(\frac{Dy_2}{Dx}\right),\ (n-m) = \left(\frac{D\lambda}{Dx}\right);$$

donde viene

$$(n-m)F'+\lambda F''=\left(\frac{D.\lambda F'}{Dx}\right),\ \frac{ny2^2-my1^2}{2}F'''$$

$$+\frac{y2^3-y1^3}{2.3}F^{iv}=\left(\frac{D.\frac{y2^3-y1^3}{2.3}F'''}{Dx}\right),\ \text{ecc.}$$

$$-(ny2-my1)f''-\frac{y2^2-y1^2}{2}f'''=-\left(\frac{D.\frac{y2^2-y1^2}{2}f''}{Dx}\right),\ \text{ecc.};$$

moltiplicando adunque l'equazione per Dx, ed integrandola secondo questa differenziale della massa, otterremo

$$\lambda F'=\chi+\frac{y2^3-y1^3}{2.3}F'''-\frac{y2^5-y1^5}{2.3\ldots5}F^{v}+\rho$$

$$-\frac{y2^2-y1^2}{2}f''+\frac{y2^4-y1^4}{2.3.4}f^{iv}+\rho,$$

χ contrassegnando una funzione del tempo e di costanti; onde

$$F'=\frac{\chi}{\lambda}+\frac{y2^3-y1^3}{2.3\lambda}F'''-\frac{y2^5-y1^5}{2.3\ldots5\lambda}F^{v}+\rho$$

$$-\frac{y2^2-y1^2}{2\lambda}f''+\frac{y2^4-y1^4}{2.3.4\lambda}f^{iv}+\rho\ldots.(n).$$

In tutte le precedenti equazioni sono appieno conosciuti i termini compendiati sotto la cifra ρ, poichè seguono la manifesta legge de' rispettivi termini antecedenti. E si può osservare che nel secondo membro dell'equazione (n) il primo termine $\frac{\chi}{\lambda}$ dovrà essere quantità del primo ordine; i due termini che consegnono, posti l'uno sopra l'altro, e relativi alle F''', f'', sono del terzo ordine, e gli altri due delle F^{v}, f^{vi} del quinto ordine, e così del resto; talmente che nel valore della funzione F' sono zero tutti i termini d'ordine pari.

48. Quanto all'equazione (m), essendo

$$\frac{n+m}{2}=\left(\frac{D\mu}{Dx}\right),\ \text{e si avrà}\ \frac{n+m}{2}F'+\mu F''=\left(\frac{D.\mu F'}{Dx}\right),$$

e si troverà parimente

$$-\frac{ny2^2+my1^2}{2.2}F''' - \frac{y2^3+y1^3}{2.2.3}F^{iv} = -\left(\frac{D.\frac{y2^3+y1^3}{2.2.3}F'''}{Dx}\right), \text{ ecc.}$$

$$\frac{ny2+my1}{2}f'' + \frac{y2^2+y1^2}{2.2}f''' = \left(\frac{D.\frac{y2^2+y1^2}{2.2}f'}{Dx}\right), \text{ ecc.};$$

onde sarà

$$f' = \left(\frac{D.\mu F'}{Dx}\right)' - \left(\frac{D.\frac{y2^3+y1^3}{2.2.3}F'''}{Dx}\right) + \left(\frac{D.\frac{y2^5+y1^5}{2.2.3\ldots5}F^{v}}{Dx}\right) + \varrho$$

$$+ \left(\frac{D.\frac{y2^2+y1^2}{2.2}f''}{Dx}\right) - \left(\frac{D.\frac{y2^4+y1^4}{2.2.3.4}f^{iv}}{Dx}\right) + \varrho \ldots (o).$$

Il primo termine del valore di f' è quantità di secondo ordine; i due seguenti delle F''', f'', soprapposti l'uno all'altro, appartengono a quantità di quarto ordine; i due susseecutivi sono del sesto ordine, e così del rimanente: dal che si vede che nel valore della funzione f' fallano i termini di ordine dispari. Nell'equazione (m) sono dicifrate le differenze che in questa equazione (o) vengono soltanto accennate colla cifra D.

49. Dall'equazione (n) si ritrae che

$$F = \frac{\pi}{\lambda}$$

sarà la prima approssimazione del valore di F'; e parimente dall'equazione (o) si riconosce che

$$f = \left(\frac{D.\mu F'}{Dx}\right)$$

sarà il primo valore approssimante della funzione f'; e sostituendo alla F' l'indagato primo valore $\frac{\pi}{\lambda}$, avremo la prima approssimazione dalla f' nella seguente espressione:

$$f' = \pi\left(\frac{D.\frac{\mu}{\lambda}}{Dx}\right)$$

50. A questo solo primo termine tanto della F', quanto della f' si

è limitato il signor Lagrange nella meccanica, tom. 2, facc. 324, benchè in tal modo nel valore della p, ch' è la velocità principale, manchi la funzione delle m, n, che rappresenta l' effetto dell' obbliquità delle sponde; il che rende insufficiente il calcolo ad assicurarci intorno il movimento di una massa considerabile di fluido: oltre di che rimane incerto come possa o no rendersi di notevole quantità il seguito de' termini omessi. Quindi tale espressione è insufficiente a spiegare in natura il movimento delle acque, e molto più a disvelare i grandi fenomeni del corso dei fiumi. Lo spignere la ricerca alla seconda ed alle successive altre approssimazioni dei valori delle F', f' non incontra altra difficoltà che quella di un calcolo prolisso, benchè elementare, non avendosi ad instituire alcuna *integrazione*, trovandosi questa già compiutamente eseguita; ma ad effettuare soltanto le operazioni, ondè prendere le differenze parziali delle F', f', e rinvenire i loro prodotti colle note funzioni delle $y1$, $y2$ figurate in ciaschedun termine delle equazioni (m), (n). Noi per procedere alla indagine della seconda e della terza approssimazione di ciascheduna F', f', recando almeno per ora il calcolo alla semplicità che si possa maggiore, supporremo quello che non solo l' intento nostro ci permette, ma che potrebbe altresì bastare a dicifrare le cagioni de' grandi effetti del corso de' fiumi, vale a dire che le due sponde o superficie che sono lambite dal fluido, e si rappresentano dalle equazioni $Dy1 = mDx$, $Dy2 = nDx$, siano piane, e che in conseguenza ogni stilla di acqua che lungo di esse si muove, descriva una retta. In tale assunto le quantità m, n riescono costanti.

CAPITOLO IX.

Continuazione del medesimo argomento nell' assunto che siano piane le due superficie lambite dal fluido.

51. Essendo arbitraria l' origine degli assi delle x e delle y, noi la collocheremo alla sponda o superficie delle $y1$, facendo per maggior semplicità $x = 0$, dove $y1 = 0$; quivi sarà $y2 = \lambda = a$, a denotando una costante. Laonde in virtù delle equazioni delle superficie $Dy1 = mDx$, $Dy2 = nDx$, sarà $y1 = mx$, $y2 = a + nx$, $\lambda = y2 - y1 = a + (n - m)x$; donde si ritraggono le seguenti espressioni che gioveranno per facilitare il calcolo

$$y1 = m\frac{\lambda - a}{n - m},$$

$$y2 = \lambda + m\frac{\lambda - a}{n - m},$$

$$\mu = \frac{n + m}{2} \cdot \frac{\lambda}{n - m} - \frac{ma}{n - m};$$

e surrogando questo valore della μ nell'equazione dell'art. 49.

$$f' = \chi\left(\frac{D,\frac{\mu}{\lambda}}{Dx}\right),$$

la convertiremo nella

$$f' = \chi m\frac{a}{\lambda^2},$$

che esprime più succintamente il primo valore approssimante della f'.

52. Per passare ora alla seconda approssimazione tanto della F', che della f', essendo l'esatto valore della prima funzione espresso nel secondo membro dell'equazione (n), converrà in questo investigare i due termini

$$\frac{y2^3 - y1^3}{2\cdot 3\lambda}F''' - \frac{y2^2 - y1^2}{2\lambda}f'',$$

che sono quantità di terzo ordine, e formano il secondo valore approssimante della F'. A tal fine bisogna determinare le funzioni F''', f'' mercè del primo valore della $F' = \frac{\chi}{\lambda}$ e della $f' = \chi m\frac{a}{\lambda^2}$, per le quali si avrà

$$F''' = 2(n-m)^2\frac{\chi}{\lambda^3},$$

$$f'' = -2m(n-m)\frac{a\chi}{\lambda^3};$$

accoppiando il primo di questi valori colla $\frac{y2^3 - y1^3}{2\cdot 3\lambda}$, ed il secondo colla $\frac{y2^2 - y1^2}{2\lambda}$, trasformate prima le $y1$, $y2$ nelle espressioni equivalenti dell'articolo 51, ce ne verrà

$$\frac{y2^3 - y1^3}{2\cdot 3\lambda}F''' - \frac{y2^2 - y1^2}{2\lambda}f'' = \frac{2}{3}(n^2 + nm + m^2)\frac{\chi}{\lambda} - m^2\frac{a^2\chi}{\lambda^3}.$$

Qui però conviene osservare che nel secondo membro di questa espressione il primo termine non rappresenta che una funzione del tempo e di costanti divisa per λ; e sicome nel primo valore della $F' = \frac{\chi}{\lambda}$ la χ indeterminata comprende qualsivoglia funzione del

tempo e di costanti, il termine di cui parliamo s'intenderà compreso nel primo valore della $F' = \frac{\chi}{\lambda}$. Resterà adunque la seconda approssimazione della F'

$$= - m^2 \frac{a^2 \chi}{\lambda^3} = - \frac{\chi}{\lambda} . m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} .$$

Quindi avremo in due termini il valore approssimante

$$F' = \frac{\chi}{\lambda} - \frac{\chi}{\lambda} . m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{\chi}{\lambda} \left(1 - m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} \right),$$

essendo il primo termine quantità del primo ordine, ed il secondo termine quantità del terzo ordine.

Quanto alla seconda approssimazione della f', ponendo nella espressione $f' = \left(\frac{D . \mu F'}{Dx} \right)$ in luogo della F' il valore della sua seconda approssimazione testè indagato, e sostituendo alla μ l'equivalente sopra additato, con facilità conseguiremo la quantità di quarto ordine

$$\frac{\chi}{\lambda} \left[(nm^2 + m^3) \frac{a^2}{\lambda^2} - 3m^3 \frac{a^3}{\lambda^3} \right],$$

la quale dovrà formare una parte della seconda approssimazione della f'. L'altra parte di questa medesima approssimazione sarà la somma dei due termini di quarto ordine

$$- \left(\frac{D . \frac{y2^3 + y1^3}{2 . 2 . 3} F'''}{Dx} \right) + \left(\frac{D . \frac{y2^2 + y1^2}{2 . 2} f''}{Dx} \right)$$

dell'equazione (o), determinate le F''', f'' come sopra colla prima approssimazione tanto della F', che della f'. Tal somma colle premesse sostituzioni delle espressioni di $y1$, $y2$ si troverà essere

$$\frac{\chi}{\lambda} \left[- (nm^2 + m^3) \frac{a^2}{\lambda^2} + 2m^3 \frac{a^3}{\lambda^3} \right],$$

la quale, combinata coll'altra parte già indagata, renderà la seconda approssimazione della f'

$$= - \frac{\chi}{\lambda} . m^3 \frac{a^3}{\lambda^3} .$$

Abbiamo adunque in due termini il valore approssimante della

funzione f' nella seguente espressione:

$$f'=\frac{\chi}{\lambda}\cdot m\frac{a}{\lambda}-\frac{\chi}{\lambda}\cdot m^3\frac{a^3}{\lambda^3}=\frac{\chi}{\lambda}\cdot m\frac{a}{\lambda}\left(1-m^2\frac{a^2}{\lambda^2}\right),$$

in cui il primo termine è quantità del secondo ordine, e del quarto ordine il secondo.

53. La terza approssimazione della F' dovrà, non altrimenti che la seconda già indagata della f', essere composta di due particelle; la prima delle quali sarà la somma dei due termini

$$\frac{y2^3-y1^3}{2.3\lambda}F'''-\frac{y2^2-y1^2}{2\lambda}f''$$

dell'equazione (n), derivando però le F''', f'' non dai primi valori $\frac{\chi}{\lambda}$, $\frac{\chi}{\lambda}\cdot m\frac{a}{\lambda}$ delle rispettive funzioni F', f', ma bensì dalle seconde loro approssimazioni, che sono $-\frac{\chi}{\lambda}\cdot m^2\frac{a^2}{\lambda^2}$, $-\frac{\chi}{\lambda}m\frac{a}{\lambda}\cdot m^2\frac{a^2}{\lambda^2}$. In questa guisa alla F''' si dovrà surrogare la quantità $-12m^2(n-m)^2\frac{a^2\chi}{\lambda^5}$, ed alla f'' la quantità $4m^3(n-m)\frac{a^2\chi}{\lambda^5}$: per lo che effettuando le operazioni additate dalla figura dei due termini, noi li trasformeremo nella quantità

$$\frac{\chi}{\lambda}\left[-2(n^2m^2+nm^3+m^4)\frac{a^2}{\lambda^2}+4(nm^3+m^4)\frac{a^3}{\lambda^3}-2m^4\frac{a^4}{\lambda^4}\right];$$

tale sarà la prima particella del terzo approssimamento della F'.

La seconda particella consisterà nei due successivi termini della medesima equazione (n)

$$-\frac{y2^5-y1^5}{2.3\ldots5\lambda}F^{v}+\frac{y2^4-y1^4}{2.3.4\lambda}f^{iv},$$

derivando F^{v}, f^{iv} dal primo valore delle correlative F', f', cioè facendo

$$F^{v}=24(n-m)^4\frac{\chi}{\lambda^5},$$

$$f^{iv}=-24m(n-m)^3\frac{a\chi}{\lambda^5}.$$

Con questi elementi eseguendo le note operazioni indicate dalla figura

dei due termini, e colla premessa avvertenza che ogni funzione del tempo e di costanti divisa per la λ s'intende già compresa nel valore $\frac{x}{\lambda}$ della prima approssimazione, si ritrarrà la ricercata quantità

$$=\frac{x}{\lambda}\left[2(n^2m^2+nm^3+m^4)\frac{a^2}{\lambda^2}-4(nm^3+m^4)\frac{a^3}{\lambda^3}+3m^4\frac{a^4}{\lambda^4}\right],$$

Unendo adunque le due indagate particelle, conseguiremo la terza approssimazione della F′, la quale sarà

$$\frac{x}{\lambda}\cdot m^4\frac{a^4}{\lambda^4},$$

quantità, come si vede, del quinto ordine.

54. Quindi avremo in tre termini il valore approssimante della F′ come segue:

$$F'=\frac{x}{\lambda}-\frac{x}{\lambda}\cdot m^2\frac{a^2}{\lambda^2}+\frac{x}{\lambda}\cdot m^4\frac{a^4}{\lambda^4}$$

$$=\frac{x}{\lambda}\left(1-m^2\frac{a^2}{\lambda^2}+m^4\frac{a^4}{\lambda^4}\right).$$

55. La terza approssimazione della f' si conseguirà ponendo nel primo termine dell' equazione (o) in vece della F′ la sua terza approssimazione testè indagata, e nei secondi termini derivando le F''', f'' dalle rispettive seconde approssimazioni delle F′, f', ed in fine sommando le quantità che ne provengono coi due ultimi termini dell' equazione medesima, derivate le loro F^{v}, f^{iv} dai primi valori approssimanti delle F′, f'. Si troverà perciò il terzo approssimamento della f' composto di tre parti, che sono:

$$1.^a \text{ Parte }=\frac{x}{\lambda}\left[\cdots\cdots\cdots\cdots-2(nm^4+m^5)\frac{a^4}{\lambda^4}+5m^5\frac{a^5}{\lambda^5}\right].$$

$$2.^a \text{ Parte }=\frac{x}{\lambda}\left[-2(n^3m^2+m^5)\frac{a^2}{\lambda^2}+6(n^2m^3+m^5)\frac{a^3}{\lambda^3}\right.$$
$$\left.-4(nm^4+m^5)\frac{a^4}{\lambda^4}\right].$$

$$3.^a \text{ Parte }=\frac{x}{\lambda}\left[\;2(n^3m^2+m^5)\frac{a^2}{\lambda^2}-5(n^2m^3+m^5)\frac{a^3}{\lambda^3}\right.$$
$$\left.+6(nm^4+m^5)\frac{a^4}{\lambda^4}-4m^5\frac{a^5}{\lambda^5}\right].$$

La somma di tutte e tre queste quantità non è che $\frac{\chi}{\lambda} m^5 \frac{a^5}{\lambda^5}$. Tale è dunque il terzo approssimamento della f', che si conosce appartenere a quantità del sesto ordine.

56. Abbiamo pertanto il valore approssimante della f' espresso in tre termini nel seguente modo:

$$f' = \frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} - \frac{\chi}{\lambda} \cdot m^3 \frac{a^3}{\lambda^3} + \frac{\chi}{\lambda} \cdot m^5 \frac{a^5}{\lambda^5}$$
$$= \frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \left(1 - m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} + m^4 \frac{a^4}{\lambda^4} \right).$$

57. Nella medesima maniera si troverebbe la quarta approssimazione della $F' = -\frac{\chi}{\lambda} \cdot m^6 \frac{a^6}{\lambda^6}$, la quinta $= \frac{\chi}{\lambda} m^8 \frac{a^8}{\lambda^8}$, e così del resto; e parimente la quarta della $f' = -\frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \cdot m^6 \frac{a^6}{\lambda^6}$, la quinta $= \frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \cdot m^8 \frac{a^8}{\lambda^8}$, e così del rimanente; regnando una medesima e semplicissima legge tanto nei termini del valore della F', quanto in quelli del valore della f'. Donde si conchiude l'intero valore di queste due funzioni, essendo

$$F' = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + m^2 \frac{a^2}{\lambda^2}},$$

$$f' = \frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + m^2 \frac{a^2}{\lambda^2}}.$$

A conclusioni sì semplici si potrà forse pervenire con calcoli più compendiosi; a me basta ora l'averle ottenute perfettamente esatte e sicure.

58. Rimangono in tal modo determinate tutte le funzioni F'', F''', ecc. f'', f''', ecc. derivate dalle F', f'; benchè tornerà bene il desumerle dalle serie espresse negli articoli 54 e 56, quando vogliansi separati i termini che si riferiscono a quantità di diversi ordini. Essendo poi

$$F' = \chi \frac{\lambda}{\lambda^2 + m^2 a^2}, \text{ e } dx = \frac{d\lambda}{n - m},$$

si troverà la funzione primitiva

$$F = \frac{\chi}{n - m} \int \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + m^2 a^2} = \frac{\chi}{2(n - m)} \log.(\lambda^2 + m^2 a^2) + b,$$

additata per θ una nuova funzione del tempo e di costanti. Quindi l'espressione della ϕ rappresentata nell'articolo 44 resterà in ogni parte determinata, e potrà porsi sotto la seguente forma:

$$\phi = \theta + \frac{\chi}{\lambda}\Big[\frac{\lambda}{2(n-m)}\log.(\lambda^2+m^2a^2)+ma\frac{y}{\lambda}-m^3a^3\frac{y}{\lambda^3}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2}(n-m)\frac{y^2}{\lambda^2}-\frac{3}{2}m^2(n-m)a^2\frac{y^2}{\lambda^3}+\ldots$$

$$-m(n-m)^2a\frac{y^3}{\lambda^3}+\ldots$$

$$-\frac{1}{4}(n-m)^3\frac{y^4}{\lambda^3}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\Big].$$

Si può osservare che la funzione ϕ è di questa forma:

$$\phi = \chi\psi + \theta,$$

ψ essendo funzione delle variabili x, y, e χ in vece funzione del tempo, come pure θ.

59. A fine per altro di ottenere i valori delle velocità p e q, che è l'oggetto principale delle ricerche di tal genere, non è mestieri ricorrere direttamente a questa espressione della ϕ, poichè essi sono particolarmente rappresentati dalle rispettive serie del citato articolo 44. Basta adunque collocare in queste gl'indagati valori delle F', f' e delle loro derivate funzioni per avere i valori delle p, q, che sono i più importanti elementi delle idrauliche indagini.

60. Nella determinazione di questi valori giova a far uso delle F', f' espresse in serie come agli articoli 54, 56, e 57, e da indi trarre ancora le dipendenti F'', f'', ecc. In questo modo disponendo acconciamente i termini della serie che costituisce la quantità p, ci accorgeremo sortirne

$$p = \frac{\chi}{\lambda}$$

$$-\frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2$$

$$+\frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^4$$

$$-\frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^6$$

$$+\ldots$$

La somma adunque di questa serie, che agevolmente si dà a conoscere, forma il valore della p; onde sarà

$$p=\frac{\chi}{\lambda}\,\frac{1}{1+\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2}$$

61. In simil guisa riconosceremo che la serie dell' articolo 44, la quale rappresenta il quanto della q, si trasmuta nella seguente:

$$\begin{aligned} q=&\frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)\\ &-\frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^3\\ &+\frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^5\\ &-\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sommando pertanto questa nuova serie, ce ne verrà

$$q=\frac{\chi}{\lambda}\,\frac{m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}}{1+\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2}.$$

Osserva essere i valori della p e della q di questa forma: $p=\chi\alpha$, $q=\chi\beta$; α e β essendo funzioni delle variabili x, y, e χ funzione del tempo.

62. Per una corrente di fluido, nella quale ogni stilla abbia una velocità ed una direzione diversa da quella delle altre, questa è la prima volta che si dà a conoscere l' esatto valore della p e della q. Considerando l' asse delle x qual asse della corrente, e riflettendo alla presenza della y nel valore della p e della q, facilmente ci persuaderemo che in qualunque sezione del fluido a squadra coll' asse deve variare sì l' una che l' altra velocità, di modo che le diverse stille d' una medesima sezione abbiano diversa velocità, e diversa direzione secondo la varia loro distanza dall' asse; il che dimostra la fallace supposizione dell' uguaglianza e parallela direzione de' movimenti di tutti i punti d' una medesima sezione, alla quale sogliono conformarsi i calcoli de' matematici idraulici.

63. Facendo per brevità $m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}=A$, le espressioni delle p, q degli articoli 60. e 61. si compendieranno nelle seguenti:

$$p = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + A^2},$$

$$q = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{A}{1 + A^2};$$

quindi

$$p^2 + q^2 = \frac{\chi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 + A^2}.$$

Segnando pertanto v la velocità di ciascun punto del fluido risultante dalle due p, q, sarà

$$v = \sqrt{(p^2 + q^2)} = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + A^2)}};$$

donde viene

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}} = \frac{p}{v} = \frac{1}{\sqrt{(1 + A^2)}},$$

espressione ben semplice che a suo luogo ci sarà uopo usare.

Ma senza andare più innanzi in queste particolari considerazioni, ora che abbiamo conseguito il valore integrale della ϕ, ritorniamo all' equazione (f) dell' art. 25, onde partimmo.

CAPITOLO X.

Si ripiglia l' equazione della forza sollecitatrice e nel presente assunto si dicifera.

94. L' equazione (f) dell' art. 25. relativa alla forza sollecitatrice del fluido, per essere nel presente assunto $\left(\frac{D\phi}{Dz}\right) = 0$, prenderà, secondo le premesse indagini, la seguente forma:

$$gy = \Pi + \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{2} q^2 + \frac{d\chi}{dt} \psi + \frac{d\theta}{dt} + K \ldots \ (p).$$

L' art. 63. ci rammenterà che la funzione χ del tempo entra pure nelle espressioni delle p, q. Se a due determinati valori delle ordinate x, y si conoscono le corrispondenti pressioni Π, come suole succedere alle estremità della fluida massa, ove la superficie sia libera e conseguentemente $\Pi = 0$, o dove la pressione sia esercitata da una nota forza esterna che calchi il fluido; ponendo questi due conosciuti valori in cambio della Π, l' equazione generale si trasforma in due

particolari, che servono a determinare le due incognite χ, e θ in t: queste nuove espressioni delle χ, θ in t riposte nella equazione generale rendonla acconcia a determinare il valore della Π per qualunque x e y, e per qualsivoglia tempo t. Le costanti si desumono dallo stato iniziale del fluido, vale a dire dai valori particolari che si assegnano alle x, y, Π, p, q, quando $t=0$. In tal maniera per qualunque valore della x e della y, vale a dire per qualunque punto della fluida massa che abbia le x, y per coordinate, si conosce in qualsivoglia istante di tempo la velocità p secondo l'asse delle x, e la velocità q secondo l'asse delle y; e quindi la direzione ed il valore della velocità risultante v. Così il problema idraulico del movimento del fluido resta nel presente assunto pienamente sciolto.

65. Allorchè il movimento dell'acqua è in uno stato permanente, vale a dire che le velocità e la pressione non variano al variare del tempo, ma soltanto al variare del luogo, cioè delle ordinate x, y, di maniera che a ciascun punto dello spazio, pel quale va continuamente passando il fluido, la velocità di questo rimanga inalterabile e sempre la medesima, come si avvera nelle correnti delle quali avremo a trattare, e come succede ne' fiumi stessi quando si mantengono costanti alla medesima altezza, e quali anzi senza notevole errore per notevoli durate di tempo si possono mai sempre considerare in qualsivoglia periodo di qualunque piena, la funzione ϕ non contiene il tempo, la $\theta=0$, e la χ non è funzione che di sole costanti; onde l'equazione (p) si riduce alla semplice forma di

$$gy=\Pi+\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}q^2+\mathrm{K}.$$

Essendo poi (art. 63) $v=\sqrt{(p^2+q^2)}$, e perciò $\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2$, avremo

$$gy=\Pi+\tfrac{1}{2}v^2+\mathrm{K}.$$

E poichè K è quella costante che rende $=0$ il secondo membro dell'equazione, quando $y=0$, sarà

$$gy=\Pi+\tfrac{1}{2}v^2-(\Pi)-\tfrac{1}{2}(v)^2, \ldots\ldots\ldots (q)$$

(Π) e (v) denotando la pressione e la velocità del fluido nel punto cui corrisponde la $y=0$. Usando finalmente in vece della v il suo valore $=\frac{\chi}{\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{A}^2)}}$ (art. citato) l'equazione si cangerà nella seguente:

$$gy=\Pi+\tfrac{1}{2}\frac{\chi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{A}^2}-(\Pi)-\tfrac{1}{2}(v)^2.$$

66. Questa ultima equazione serve a determinare il valore della costante χ, poichè fatta $y = o$, si ha $\Pi = (\Pi)$, $\lambda = a$, $A = m$; onde

$$o = \frac{\chi^2}{a^2 + m^2 a^2} - (v)^2.$$

$$\chi = (v) a \sqrt{(1 + m^2)}.$$

67. L' uso ha dato il nome di forza viva al quadrato v^2 della velocità; noi diremo similmente altezza viva la gy, dalla quale essa trae origine, giacchè rappresenta un' altezza y moltiplicata per una forza sollecitatrice g, che la rende attiva a guisa di un peso. Per questa medesima ragione una lunghezza qualunque moltiplicata per una forza sollecitatrice esprimerà ancora una pressione.

Sia il metro l' unità di spazio lineare, e si pigli un tempo ϑ per unità di tempo, sarà $\frac{met.}{\vartheta}$ l' unità di velocità, $\frac{met.}{\vartheta^2}$ l' unità di forza *acceleratrice*, che moltiplicata per l' unità lineare darà $\frac{met. \, met.}{\vartheta^2}$ per l' unità di altezza viva, e parimente per unità di pressione e di forza viva ancora. Inoltre l' unità di forza *acceleratrice* $= \frac{met.}{\vartheta^2}$ in un minuto secondo sessantesimo, che noteremo $1''$, farebbe colla libera caduta passare al corpo mobile uno spazio $= \frac{1''. 1''. met.}{2\vartheta^2}$; la gravità terrestre g alla latitudine di Milano gli fa in vece nel medesimo tempo passare lo spazio $= 4^{met.}, 9027$; e poichè le forze sono fra di loro come questi spazj, sarà

$$\frac{met.}{\vartheta^2} : g :: \frac{1''. 1''. met.}{2\vartheta^2} : 4^{met.}, 9027,$$

donde si cava $g = \frac{met.}{\vartheta^2} \times 9{,}8054 \frac{\vartheta^2}{1''. 1''}$; e ponendo l' unità di forza *acceleratrice* in vece di $\frac{met.}{\vartheta^2}$, e n in luogo di $\frac{\vartheta}{1''}$, sarà

$$g = 9{,}8054 n^2.$$

Dal che si vede che preso il metro per unità di spazio lineare, dipende da quel tempo che si piglia per unità di sua misura l' assegnare il valore alle unità di misura di tutte le quantità ch' entrano nel calcolo, ed alla gravità medesima. Coll' uso però di tali unità

di misure tutte le quantità concrete x, y, Π, p, q, ec. de' precedenti calcoli verranno ad esprimersi per via di numeri astratti che additeranno il rapporto di ciascheduna quantità all' unità della sua specie; e sarà perciò lo scioglimento dell' idraulico problema ridotto a semplice maneggio di numeriche cifre.

Contemplandosi il movimento dell' acqua nello stato di permanenza, dove passerà acqua in un istante, quivi passerà sempre, e sempre colla medesima velocità e direzione. Dato perciò il valore numerico alle ordinate x, y di qualsivoglia punto della corrente, atteso che rimane colla x determinata anche la corrispondente λ, e le altre quantità costanti si suppongono date in numeri, le equazioni degli articoli 63, 65 e 66 serviranno ad esprimere parimente in numeri le velocità p, q, v che l' acqua ha in tal punto, ed eziandio la pressione Π che vi esercita (*).

68. Se là dove si fa cominciare la verticale y, sia nulla la velocità dell' acqua ed anche la pressione, sarà ivi $gy = 0$, $(v) = 0$, $(\Pi) = 0$; ma al di sotto di questo livello prendendo la gy un valore, converrà per l' equazione (q) che ne abbia uno anche la Π, ovvero la v, ovvero ambidue, di maniera che trovisi sempre $gy - \Pi = \frac{1}{2} v^2$. Quindi è che $\Pi = gy$ renderà $\frac{1}{2} v^2 = 0$, ed all'opposto $\Pi = 0$ darà $\frac{1}{2} v^2 = gy$; onde comprenderemo che al discendere che fa la pressione dal sommo suo valore fino al nulla, innalza la forza viva e la velocità dal nulla fino al massimo; ed al contrario nel salire che fa la pressione dal nulla al massimo valore, abbassa la forza viva e la velocità dal più alto suo valore fino al più basso, vale a dire fino allo zero. Onde si può considerare che la pressione a misura che si va consumando, si trasmuti in un doppio valore di forza viva; e questa, con contrario effetto allo scemare, in quella si trasmuti.

Qui si suppone, come ognun vede, che la y rimanga frattanto invariabile; se però al variare della v può crescere o calare anche la y, dovendo sempre avverarsi la equazione $gy - \Pi = \frac{1}{2} v^2$, si conoscerà che quanto impicciolisce la forza viva v^2, altrettanto ingrandisce la pressione Π, o altrettanto cala l' altezza viva gy, ovvero cresce in una parte la pressione, e per l' equivalente altra parte cala in vece l' altezza viva: onde si può considerare che la forza viva nel

(*) Codesto risultamento del valore della gravità alla superficie della terra, cui si dice appartenere alla latitudine di Milano, appartiene più prossimamente a quella di Torino, siccome può vedersi nella mia Memoria = *Della misura delle acque correnti per le bocche di derivazione, e per gli alvei di corso equabile* = inserita in questo volume. Il divario però è piccolissimo, e potrebbe anche derivare dal numero delle cifre decimali adoperate nel calcolare il valore di codesta forza. (*Questa nota con alcune altre che seguono sono del Pr. G. B. Masetti.*)

consumarsi venga convertita o in pressione o in altezza viva negativa, vale a dire in salita, o parte in una e parte in altra; e si troverà all' opposto che nel crescere e riprodursi o consuma altrettanto di pressione, o genera in cambio altrettanta discesa o forza viva; ovvero consuma parte di quella, e supplisce pel resto inducendo l' equivalente di questa.

69. Alla superficie libera del fluido è sempre $\Pi = 0$, quivi adunque nella fatta supposizione di $(v) = 0$, $(\Pi) = 0$ avremo per l' equazione (q)

$$gy = \tfrac{1}{2}v^2 ;\ 2gy = v^2 .$$

Di qua è venuto l' uso dagl' Italiani Idraulici introdotto di rappresentare le velocità dell' acqua corrispondenti a diverse altezze vive per mezzo della parabola; imperocchè se intenderemo descritta una parabola coll' asse della y verticale, e col parametro $= 2g$ (numero che secondo le premesse esprimerà tante unità lineari, vale a dire tanti metri), mentre le ascisse y additeranno le altezze dell' acqua, le ordinate x daranno la misura delle corrispondenti velocità. Egli è però chiaro che questo non si avvera, se non se là dove $\Pi = 0$, vale a dire alla superficie libera, qual sarebbe la sezione di una cateratta, per la quale l'acqua sbocchi a libera cascata; onde si scorge l' abbaglio comune dei nostri Scrittori di cose fluviali, i quali hanno creduto di poter adattare questa legge anche alle acque de' fiumi secondo la diversa profondità alla quale si trovano sommerse sotto la suprema superficie, di qua argomentandosi che la velocità crescesse come la radice dell' altezza d' acqua soprastante; mentre sotto la superficie d' un fiume la pressione Π che soffrono le acque non è mai $= 0$, anzi tanto più cresce, quanto cresce la loro profondità o l' altezza delle acque soprapposte.

Del resto, ovunque piaccia di collocare l' origine delle y, se alla $y = 0$ corrisponde un valore della (Π) e della (v), non si avrà che a pigliare un' altezza costante, che noteremo a, tale che sia $ga = (\Pi) + \tfrac{1}{2}(v)^2$, perchè l' equazione (q) per la superficie libera si trasformi nella $g(a + y) = \tfrac{1}{2}v^2$; onde la parabola rappresenterà ancora le velocità, purchè abbia il suo vertice alla sommità di a, e siano le ascisse $a + y$ in vece di y.

70. Partendo da un punto A della superficie del fluido, ove l' acqua sia senza pressione e senza moto, vale a dire ponendo in A l' origine delle altezze vive y, e trasferendoci ovunque ad un punto C sotto la medesima superficie, qui troveremo

$$gy = \Pi + \tfrac{1}{2}v^2 .$$

Se in vece di venire dal punto A della superficie libera dell' acqua

stagnante, fossimo partiti da altro qualunque punto B della corrente posto sotto il livello di quella, tal che fosse l'altezza viva di B sopra C $= y$, notando (Π) e (v) la pressione e la velocità dell'acqua in B, avremmo in cambio trovato per l'equazione (q)

$$gy + (\Pi) + \tfrac{1}{2}(v)^2 = \tfrac{1}{2}v^2.$$

Dal che si comprende, come, onde che piaccia di far mossa col calcolo, sia dalla superficie libera dell'acqua stagnante, sia da qualsivoglia altro luogo dell'acqua corrente, rinverremo sempre per un qualunque dato punto del fluido la medesima pressione e la medesima velocità o forza viva, purchè nel secondo caso alla corrispondente altezza viva y si aggiunga la pressione e la mezza forza viva che ha l'acqua al sito, onde muove il calcolo.

71. Tutte queste equazioni derivate dalle primarie (l), (m) dipendono soltanto dalla condizione, cui è soggetto il movimento del fluido, di secondare cioè le sponde del canale che lo contiene, ovvero le due qualunque superficie piane, alle quali si considera obbligato di conformare il suo moto: in esse perciò non è contemplata che quella resistenza la quale nasce dalla semplice direzione del moto che il fluido deve seguire per adattarsi a' medesimi piani. Di genere affatto diverso è la resistenza che la corrente può incontrare per gli ostacoli disseminati sopra gli stessi piani, i quali convertendo il movimento regolare in onde irregolari fra loro contrastanti, fanno sì che per esse una parte della velocità e forza viva, di cui le acque sono animate, resti di netto distrutta senza che si cangi nè in salita, nè in pressione, come fa quella che si estingue in virtù della semplice forma del canale. Tali sono le resistenze cui soggiacciono i fiumi a cagione degli impedimenti sparsi sopra il loro letto; onde vediamo che, sebbene essi abbiano elevatissime le origini, pure ne' tronchi inferiori sono lungi a gran pezza dall'avere la velocità o la pressione a tanta altezza corrispondente.

DEL MOVIMENTO E DELLA MISURA

DELLE

ACQUE CORRENTI

PARTE SECONDA

CAPITOLO PRIMO.

Idea generale del movimento delle acque correnti.

72. Le acque dei fiumi, dei torrenti, dei rii, dei fossati, dei borri medesimi, e generalmente di qualsivoglia canale, piccolo o grande ch' e' sia, e dalla natura o dall' arte scavato, discorrono in guisa che il principalissimo loro movimento sia diretto lunghesso il canale, vale a dire a seconda del suo asse longitudinale, ed i movimenti traversali di qua, di là, di su in giù od al contrario riescono sempre al suo paragone piccolissimi. Inoltre, eccetto particolari accidenti che qui non dobbiamo contemplare, l' universalità delle acque correnti negli alvei naturali o artifiziali si muove in modo che la principal loro velocità a seconda dell' asse longitudinale sia pressochè costante per lunghi tratti di corso, e nei tronchi più regolari di fondo piano ed uniforme anche in tutta l' ampiezza dell' alveo, o poco meno; e nei tronchi men regolari essa è quasi costante per quel tratto d' ampiezza almeno, pel quale corre il massimo e più poderoso corpo dell' acqua, di cui principalmente importa di conoscere il moto. A tutti però i fiumi ed a tutte le acque correnti appartiene in generale il caso contemplato agli articoli 29 e 30; e nell' indagine del loro movimento si potrà trattare la $pDx + qDy + rDz$ qual *differenziale* esatto; onde a tutte le acque correnti sarà generalmente adattabile il calcolo a tal condizione soggetto.

73. In esso noi ci siamo per ora limitati a risguardare il movimento del fluido dipendente da due sole variabili ordinate, quali sarebbero le x, y, considerata la terza z qual costante nel movimento d' ogni fluida stilla, ed a contemplare inoltre come piane le due superficie alle quali terminano le variabili y (art. 33. e 50.), il che vale quanto il far muovere la corrente terminata fra quattro superficie

piane, due delle quali parallele al piano che passa per gli assi delle x, y, e le altre due a questo perpendicolari, ma ciascheduna in qualsivoglia modo inclinata al piano delle x, z. Pigliando l'asse delle x orizzontale, ma longitudinale, e l'asse delle y verticale, le due superficie parallele rappresenteranno le sponde, e le due inclinate additeranno l'una la superficie suprema, e l'altra il fondo della corrente. Se in vece si prenderanno le y trasversali al letto del fiume, le due superficie considerate parallele saranno la suprema e l'infima di questo, e le due inclinate diverranno le sponde. E sebbene queste nei fiumi non sogliono essere a piombo, possono nondimeno pel movimento dell'acqua considerarsi tali; giacchè si osserva che aste immerse nella corrente anche in vicinanza delle ripe non corrono in banda, ma col corpo diritto, e senza inclinare nè a destra, nè a sinistra; il che dimostra che quelle parti di fluido, le quali si trovano su d'un piano verticale, si attengono movendosi al medesimo; onde il fluido non altrimenti cammina, che se fosse obbligato a strisciarsi rasente i piani verticali.

74. Inoltre le tangenti degli angoli che questi piani fanno col piano verticale che segue l'asse della corrente, sono generalmente quantità assai piccole, e tali molto più sono quelle degli angoli fatti dalla superficie suprema ed infima col piano orizzontale: onde non è difficile il riconoscere, secondo i principj del calcolo, che l'obbliquità delle sponde non deve sensibilmente turbare l'ordine dei fenomeni dipendenti dalla inclinazione della superficie e del fondo, e permutatamente questa non deve sconcertare l'ordine dei fenomeni da quella dipendenti. Perciò col calcolo a due variabili, secondo che si piglierà la y verticale ovvero orizzontale, si formerà idea dei principali effetti che nascono tanto dalla vicendevole inclinazione delle sponde, quanto dalla pendenza della superficie e del fondo del fiume.

75. Delle tre velocità p, q, r la prima di direzione longitudinale è la massima e quella che costituisce il corso del fiume, giova adunque soprattutto mostrare la variazione ch'essa può soffrire tanto in grazia della pendenza del fondo e della superficie, quanto in virtù dell'obbliqua direzione delle sponde. Si consideri pertanto il valore della p a due variabili, quale si trova espresso all'articolo 60, cioè

$$p = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{2}{1 + \left(m\frac{z}{\lambda} + (n - m)\frac{y}{\lambda} \right)^2}$$

ovvero

$$p=\frac{x}{\lambda}$$
$$-\frac{x}{\lambda}\left(m\frac{x}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2$$
$$+\ldots\ldots$$

Sia la y verticale, λ esprimerà l'altezza dell' acqua corrente, che sarà costante in ogni determinata sezione; le sponde saranno considerate parallele. Il primo e principal termine di questo valore sarà $\frac{x}{\lambda}$ indipendente dalla pendenza tanto del fondo, quanto della superficie. Il secondo termine della p sarà

$$-\frac{x}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2$$

La grande piccolezza delle m, n fa che i termini successivi riescano incomparabilmente minori di questo, e perciò non apprezzabili. Questo termine adunque rappresenta quella parte della velocità p, la quale deriva, come mostra la sua espressione, dalla inclinazione del fondo e della superficie, di cui le m, n sono le tangenti.

Prendasi ora la y orizzontale, la λ diverrà larghezza del fiume; m, n saranno tangenti dell' obbliquità delle rispettive sponde; e le due superficie suprema ed infima verranno risguardate parallele. In tal caso il termine

$$-\frac{x}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2$$

esprimerà quella parte della velocità p, la quale dipende dalla inclinazione delle sponde.

Facciamo per maggior semplicità cominciare, com' è in nostro arbitrio, la y alla superficie dell' acqua nel primo caso, ovvero all' analoga sponda relativa alla m nel secondo, tornerà in ambidue i casi $\lambda=a$, ed il termine di cui parliamo prenderà questa forma

$$-\frac{x}{a}\left(m+(n-m)\frac{y}{a}\right)^2.$$

Questa espressione ha variabile la y, la quale nel primo assunto sarà la profondità sotto la superficie dell' acqua, alla quale è situato quel filo d' acqua di cui si cerca la velocità, e nel secondo assunto esprimerà la differenza di tal acqueo filo dalla sponda che ha la m per tangente della sua obbliquità. Laonde questo termine nella prima supposizione mostrerà il crescere o il calare che fa la velocità p

25

dell' acqua a diverse profondità sotto la superficie della corrente, e nella seconda ci darà a conoscere quanto cresce o cala la medesima velocità a misura che ci scostiamo da una sponda e ci avviciniamo all' altra. Diamo su di ciò alcuni saggi.

76. Essendo

$$p=\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\left(m+(n-m)\frac{y}{a}\right)^{2}$$

l' espressione della velocità p dell' acqua, si domanda nel primo assunto a quale profondità y la velocità cesserà di crescere per cominciare indi a calare, ovvero finirà di calare per crescere di poi, vale a dire a quale profondità corrisponderà il massimo o minimo valore di tal velocità. Facciamo

$$p=\frac{x}{a}-k,$$

$\frac{x}{a}$ essendo quantità costante, e k variabile e positiva. Noi troveremo che $dk=0$ rende $y=\frac{m}{m-n}a$, ed essendo $ddk=2\frac{(n-m)^2}{a^2}dydy$, e perciò quantità sempre positiva, conosceremo che alla profondità

$$y=\frac{m}{m-n}a.$$

corrisponde il minimo valore di k, e perciò il massimo valore della velocità p.

Allorchè $n=0$, vale a dire dove il fondo è orizzontale, la massima velocità si trova alla $y=a$, cioè al fondo (rammentiamo che qui non si considera l'effetto degli ostacoli accidentali sparsi sul fondo, de' quali è detto all' articolo 71.). Quando $n<0$, cioè negativa, vale a dire quando il fondo è acclive, la massima velocità regna alla profondità $y<a$, cioè tra la superficie ed il fondo, e sarà precisamente a mezz' altezza, quando $n=-m$. Se il fondo sia invece declive, cioè $n>0$, non vi sarà, propriamente parlando, il massimo della velocità, poichè converrebbe cercarlo ad una profondità $y>a$, ch' è impossibile: si troverà per altro che in tal caso la velocità cresce dalla superficie al fondo, senza che qui diventi zero il suo *differenziale* aumento.

Quando $n=m$, il fondo è parallelo alla superficie; ed essendo allora $(n-m)=0$, il valore della p nell' espressione

$$p=\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\left(m+(n-m)\frac{y}{a}\right)^{2}$$

diviene indipendente dalla y. Quindi là dove il fondo è parallelo alla superficie del fiume, regna la medesima velocità a qualunque profondità dalla superficie fino al fondo.

Si troverà colla medesima facilità che dove $n > m$, il che importa che il fondo sia più pendente che la superficie, la velocità dell'acqua sarà minore al fondo che alla sommità, come all'opposto è più viva all'imo che al sommo della corrente, dove $n < m$ e $> o$, cioè dove il fondo è men declive che la superficie.

Le acque de' fiumi, eccetto rari accidenti di brevissima estensione che qui non si considerano, sempre corrono alla china, perciò la loro superficie è ovunque declive, e la m sempre positiva; ma il fondo avvegnachè a grandi tratti sia sempre pendente, nondimeno in minori intervalli diviso, ora è chino ed ora erto, e perciò qua la n è positiva, là è negativa: tuttavia, per essere il quadrato di questa quantità sempre positivo, si troverà che la velocità dell'acqua al fondo sarà indifferentemente la medesima tanto se questo è declive, come s'è acclive, purchè abbia un medesimo grado, sia di china, sia di erta.

77. Affinchè si conosca a quanto montar possa in natura la differenza che passa fra le contemplate velocità del fondo e della superficie, supponghiamo il caso più favorevole alla velocità del fondo, e che ci dà il massimo divario fra questa e la superficiale, quello cioè del fondo orizzontale cui corrisponde la $n = o$. I torrenti, come ognuno sa, sono quelle acque correnti che più abbondano in declività; sia adunque la tangente della pendenza superficiale di un torrente $= 0{,}04$, quale, per esempio, sarebbe a un di presso quella del torrente Serta che sbocca nell'Adda sopra il lago di Brivio. Essendo secondo il supposto $n = o$, $m = 0{,}04$, facendo nell'espressione della p la $y = o$, si otterrà la velocità del torrente in superficie

$$p = \frac{z}{a} - 0{,}0016\frac{z}{a},$$

e pigliando in vece la $y = a$, si avrà la velocità del torrente al fondo

$$p = \frac{z}{a};$$

onde presa la velocità in superficie $= 1$, sarà quella del fondo $= 1 + 0{,}0016$, non apprezzando le quantità piccole di secondo ordine per essere impercettibili; talchè l'acqua al fondo non avrà che appena una millesima con sei diecimillesime parti di velocità più che in superficie; differenza per nessun conto apprezzabile.

Se considereremo in vece un fiume che abbia minore pendenza; questo per altro tenuissimo divario diverrà ancora assai più impercettibile. Per esempio il nostro Po allo sbocco del Crostolo, secondo

il livello che io ne feci prendere, ha di pendenza $0^{met.},000214$ per ogni metro, cioè quivi si ha la $m = 0,000214$; onde si troverà che la velocità del fiume al fondo non è maggiore di quella che ha in superficie, se non 0,000000045; quantità sì piccola che eccede i limiti d'ogni nostra fantasia.

78. Questi aumenti di velocità dalla superficie al fondo, benchè estremamente piccoli, non si ottengono che là dove il fondo sia orizzontale; e siccome questo, preso a grandi tratti, è generalmente parallelo alla superficie, nel corso generale de' fiumi e de' torrenti aparisce del tutto anche questa tenuissima differenza tra la velocità delle acque in superficie, e la velocità delle acque al fondo.

Ben si vede che tutto ciò dipende dalla piccolezza della m, ch'è la misura del declive che hanno le acque in superficie; quindi è che ovunque questa quantità sia di notabile grandezza, rimanendo la $n = 0$, o almeno assai minore della m, la velocità, di cui parliamo, riesce al fondo considerabilmente maggiore che alla superficie, come mostrano le osservazioni fatte, ove l'acqua in superficie assai s'inclina, per esempio, sotto i ponti che ristringono alla corrente il passaggio, all'estremità delle moli al suo impeto opposte e simili.

79. Noi finora non abbiamo parlato che della velocità p, vale a dire di quella che ha una direzione orizzontale e parallela all'asse delle x ovvero della corrente; ma quanto abbiamo detto degli accidenti di questa si accomuna eziandio alla velocità assoluta che abbiamo notata v. Imperocchè essendo (art. 63.)

$$v = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + A^2)}},$$

e perciò

$$v^2 = \frac{\chi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 + A^2},$$

ed esprimendosi anche

$$p = \frac{\chi}{\lambda} \frac{1}{1 + A^2},$$

egli è chiaro che al variare della A, vale a dire della y in essa compresa, quando crescerà la p, crescere dovrà ancora la v^2, e quindi anche la v; ed al calare di quella calerà ancora il valore di questa: e quando l'una giugnerà al massimo suo valore, arriverà alla massima sua grandezza anche l'altra: nè altra disparità passerà fra le variazioni dell'una e dell'altra, se non che quelle della seconda saranno soltanto la metà degli aumenti o decrementi della prima a cagione del segno radicale che entra nell'espressione della v. Di quà

si conosce l'errore di que' nostri Idraulici i quali fino al dì d'oggi hanno creduto che la velocità de' fiumi dalla superficie discendendo verso il fondo andasse crescendo come la radice della profondità, vale a dire in proporzione della $\sqrt{y}$, il che conferma quanto abbiamo avvertito in altro precedente articolo. Si vede adunque come col premesso calcolo vengono ad essere determinati gli accidenti ai quali può soggiacere la velocità assoluta dell'acqua in virtù della varia pendenza del fondo e della superficie.

80. Allo stesso modo considerando l'obbliquità delle sponde in vece della pendenza delle superficie suprema ad infima della corrente, e risguardando queste fra loro parallele, si troverà che il massimo valore della p e quello insieme dalla v corrisponde al caso della

$$y = \frac{m}{m-n} a,$$

m e n qui denotando le tangenti degli angoli che le due sponde fanno con un piano parallelo al piano verticale che passa per l'asse della corrente (intendendosi per asse della corrente quella linea presso la quale il movimento de' fili fluidi si avvicina all'andamento parallelo più che altrove); a significando l'intera larghezza del fiume, e y finalmente additando la distanza dalla sponda cui appartiene la m. Quivi dunque corrisponde la velocità più viva della fluida vena, dal che trae la prima origine quel che chiamasi filone della corrente.

Diamo alla m un valore positivo, e negativo alla n, saranno le due sponde oppostamente inclinate e rivolte ambedue verso l'asse della corrente, al quale andranno avvicinandosi; se pertanto sarà $m = -n$, avremo $y = \frac{1}{2} a$, cioè là dove le due sponde sono egualmente inclinate verso l'asse, il filone tiene il mezzo del canale. Dove $m < -n$, sarà $y < \frac{1}{2} a$, vale a dire se una sponda è meno inclinata verso l'asse della corrente, che l'altra opposta, il filone correrà più vicino a quella che a questa; ed al contrario se $m > -n$; cioè se una sponda sarà all'asse più obbliqua, il filone le starà più discosto. Di qua viene ancora che se l'una delle due sponde è concava, l'altra convessa, il filone corre più presso alla prima che alla seconda, perchè la concava nella direzione delle sue parti è meno obbliqua che la convessa.

Se poi daremo alla m un valore negativo, e positivo alla n, le due sponde in vece di avvicinarsi scambievolmente all'asse della corrente, andranno più e più disseparandosi da esso, e tra di loro, ma troveremo ancora i medesimi risultamenti; onde le vicende del filone sono le medesime tanto se ambe le sponde pieghino verso l'asse, come se dall'asse si dilunghino, cioè tanto qua dove il fiume si dilata, che là dove si restringe.

Allorchè $m = n$, le ripe sono parallele fra loro; $n - m = o$ fa sparire la y dal termine

$$-\frac{\chi}{a}\left(m + (n-m)\frac{y}{a}\right)^2;$$

onde siamo avvertiti che regna la medesima velocità in tutta la larghezza del canale, e non vi ha filone (non venendo qui contemplato l'effetto degli accidentali intoppi aderenti alle sponde, ed il fondo essendo considerato acclive o declive soltanto a seconda della corrente). Ma, senza andare più innanzi in queste considerazioni, basti riflettere che gli effetti dell'obbliqua direzione delle due sponde sono perfettamente analoghi e corrispondenti agli effetti della pendenza del fondo e della superficie fiumale; onde quanto si dice degli uni, si appropria ancora agli altri.

81. Gettando pure un'occhiata sopra l'espressione della velocità q (art. 61), ch'è trasversale rispetto alla direzione dell'asse della corrente, conosceremo essere il primo termine del suo valore

$$q = \frac{\chi}{\lambda}\left(m\frac{a}{\lambda} + (n-m)\frac{y}{\lambda}\right),$$

ovvero prendendo, come già facemmo, $\lambda = a$

$$q = \frac{\chi}{a}\left(m + (n-m)\frac{y}{a}\right),$$

il quale, come si vede, dipende interamente dalle inclinazioni espresse per m, n delle due superficie alle quali queste quantità appartengono; il secondo termine della q, ch'è il massimo fra i successivi, non è punto apprezzabile, perchè riesce quantità piccola dell'ordine di m^2. Pigliando la y verticale, la q accenna il movimento che fa l'acqua salendo o discendendo; prendendo la y orizzontale, la q esprime quel movimento dell'acqua col quale tende a scostarsi da una ripa andando verso l'altra, onde facilmente si conoscerà che facendo nell'equazione variare la y, otterremo nel primo caso il movimento che ha l'acqua di su in giù, o di giù in su alla profondità $= y$; e nel secondo caso a qualunque distanza y dalla sponda relativa alla m avremo il moto trasversale, col quale in tal sito dell'alveo l'acqua va scostandosi da un lato per avvicinarsi all'altro.

82. Agevolmente ci accorgeremo ancora che diviene la $q = o$, dove $y = \frac{m}{m-n}a$. E poichè la q presa sotto il doppio suo aspetto; e fatta $= o$ rende paralleli fra loro i fluidi fili, la $y = \frac{m}{m-n}a$

corrispenderà all' asse della corrente, intorno al quale i fluidi fili rendonsi appunto paralleli; ma abbiamo veduto che alla $y = \frac{m}{m-n}a$ si trova la massima velocità, dunque il corso più vivo del fiume corrisponde all' asse della sua corrente.

83. Da questi pochi saggi abbastanza si comprende come per mezzo del calcolo venghiamo in cognizione de' principali fenomeni che accompagnano il movimento de' fiumi, e ci è dato ancora di chiarirci intorno a quegli elementi del corso, dai quali può dipendere la misura delle loro acque.

CAPITOLO II.

Nozione generale della misura delle acque correnti.

84. Quanto abbiamo dimostrato nel capitolo precedente intorno alla velocità delle acque correnti e de' fiumi, che prescindendo dall' effetto di ostacoli accidentali suol essere la medesima tanto alla superficie, che a qualunque profondità sotto di essa ed al fondo, e la medesima pure su tutta la larghezza del fiume, ovunque le sponde siano parallele, ed il fondo piano ed inclinato soltanto pel verso dell' asse della corrente, potrebbe additare un modo per misurare le acque correnti agevolissimo, quello cioè di scegliere un tronco più regolare che aver si possa, vale a dire di ripe parallele e di fondo su tutta la larghezza uniforme, e di scandagliare in tal sito per mezzo di galleggianti la velocità superficiale, la quale, moltiplicata per la sezione dell' acqua corrente, ci darebbe prossimamente la sua quantità; dico prossimamente, poichè a cagione degli ostacoli seminati sul fondo e sopra le ripe la velocità in vicinanza dell' uno e delle altre soffre qualche ritardo, il quale però è cosa tanto più piccola, quanto il fondo (da cui muove la maggior cagione del ritardamento) è men aspro, e la corrente men bassa. Ma noi parlando qui di misura delle acque correnti, non intendiamo di ragionare particolarmente intorno al modo di scandagliare, comunque si sia, la special quantità di acqua che discorre per qualche canale, o rivo, o fiume, bensì della maniera rigorosa di misurare e di dispensare a giusta misura qualunque quantità di acqua ad arbitrio si domandi; talmente che il metodo, del quale si tratta, sia adatto non solo a definire, qualora piacesse, la quantità di fluido che porta una corrente, ma a dividerla in quali e quante assolute porzioni siano a beneplacito richieste, ovvero a separarne qualunque quantità in quella

misura che si voglia, come si misura e si stacca da una pezza di panno quel che si vende a taglio. L'arte adunque di cui si favella è generale per qualunque quantità di acqua ad arbitrio domandata, non particolare per quella soltanto che la natura o l'industria dell'uomo abbia per sorte somministrata a qualche canale; anzi della misura speciale di quest'ultima poco o nulla sarà quinci al nostro scopo generale per calere.

85. Ogni misura suppone l'unità alla quale si riferisce, perciò la misura delle acque correnti dovrà riportarsi ad un cubo di acqua considerato per unità di solido avente per lato l'unità lineare, il quale passi in un certo tempo preso parimente per unità di sua durata. Secondochè per la sezione di un'acqua corrente trapassi nell'unità di tempo uno, due o tre tali cubi di acqua, si dirà essere uno, due o tre la sua quantità. Onde si vede che nella stima di questa entrar deve la considerazione di due elementi, ciò sono la grandezza della sezione e la velocità dell'acqua nel traversarla. La prima abbraccia tutte le sezioni delle vene capillari che costituiscono il corpo della corrente, la seconda è riposta nel movimento di ciascheduna vena capillare, il quale può essere nell'una più celere, e nell'altra meno. Per valutare adunque la quantità dell'acqua che passa per l'intera sezione di una corrente bisogna conoscere la velocità di cui è animata ogni vena capillare al passaggio per la corrispondente sua sezione. Ma non basta conoscere in tal modo la velocità assoluta di ogni fluido capello, facendo mestieri sapere la sua direzione per dedurne quella velocità che ne risulta perpendicolarmente al piano della sezione medesima; poichè questa sola, e non altra, moltiplicata pel corrispondente elemento di sezione esprime la quantità elementare di acqua da ciascheduna vena capillare tramandata: la somma poi di tutte queste quantità elementari somministrate dalla generalità delle fluide vene è quella appunto che costituisce la totale quantità dell'acqua che passa per l'intera sezione della corrente.

86. Immaginiamo adunque una corrente di acqua, che secondo le condizioni espresse nell'articolo 73 cammini per un canale di sponde perpendicolari e fra loro equidistanti, di fondo piano acclive o declive, e parimente con superficie piana comunque anch'essa pel verso della corrente inclinata. In questo movimento sia la $pDx + qDy$ *differenziale* esatto, come per lo meno lo sarà, sempre che le m, n, vale a dire le inclinazioni della superficie e del fondo siano assai piccole; poichè allora essendo la variazione della p, che dipende dalle m, n, quantità assai piccola, si può questa velocità considerare o come costante, o come funzione della sola x: ed essendo per la medesima ragione assai piccola anche la q, il *differenziale*, di cui si parla,

potrà essere trattato qual differenziale esatto (art. 30) (*). Sarà pertanto adattabile a questa corrente il nostro calcolo.

Essendo le sponde del canale parallele, avremo la sua larghezza z costante, ed il movimento del fluido da essa indipendente. Notiamo L questa larghezza, e ad un qualunque punto della x immaginiamo la corrispondente sezione verticale $L\lambda$ della corrente, λ dinotando la sua altezza. Poichè il movimento è indipendente dalla variabile z, a qualunque assegnata profondità y sotto la superficie l'acqua passerà per la sezione colla medesima velocità in tutta la sua larghezza; onde la quantità dell'acqua che nel tempo $=1$ passerà per un elemento LDy della sezione medesima, sarà $LpDy$, p indicando la velocità in direzione perpendicolare al piano della sezione e corrispondente alla profondità y. La copia adunque dell'acqua che nell'unità di tempo scorrerà per l'intera sezione, vale a dire la quantità dell'acqua somministrata dalla corrente nel tempo $=1$ sarà $=L\int pDy$.

Ponendo qui in vece della p il suo valore indagato all'art. 60, la quantità dell'acqua corrente che nomineremo Q, verrà espressa nel seguente modo:

$$Q = L\frac{\chi}{\lambda}\int\frac{Dy}{1+\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2};$$

e potendosi, come già avvertimmo, far cominciare la y alla sommità della contemplata sezione, che ha λ per altezza, nel qual caso diviene $a=\lambda$, verrà

$$Q = L\frac{\chi}{\lambda}\int\frac{Dy}{1+\left(m+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2}.$$

Ed integrando

$$Q = L\frac{\chi}{n-m}\,Arc.\,tang.\left(m+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)+cost.$$

La costante è quella che rende $Q=0$, dove $y=0$; dunque

$$cost. = -L\frac{\chi}{n-m}\,Arc.\,tang.\,m;$$

conseguentemente

$$Q = L\frac{\chi}{n-m}\left[Arc.\,tang.\left(m+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)-Arc.\,tang.\,m\right].$$

(*) Vedi inoltre la citata annotazione quarta.

Facendo adunque nell' integrale $y=\lambda$, ottorremo la totale quantità dell' acqua, che nel tempo $=1$ fluisce per tutta la seziono della corrente, determinata come segue:

$$Q=L\frac{\chi}{n-m}\left[Arc.\ tang.\ n-Arc.\ tang.\ m\right].$$

87. Rendiamo ancora più semplice quest' espressione col fare $n=0$, cioè coll' aggiustare al canale un fondo orizzontale; con questo spediente verrà

$$Q=L\frac{\chi}{m}Arc.\ tang.\ m.$$

Per avere adunque la misura della quantità Q dell' acqua, converrà conoscere la m e la χ. Ora se la superficie suprema della corrente è libera, la m non si potrà conoscere senza la misura effettiva dell' angolo d' inclinazione che quella fa coll' orizzonte: tal misura non potrà aversi se non con un mezzo puramente meccanico, il quale sarà soggetto ad incertezze da questo inseparabili; inoltre per poco che quest' angolo fosse considerabile, la superficie dell' acqua riuscirebbe curva, non piana, come nel calcolo si assume; e perciò non si potrebbe con sicurezza adattare al caso il costrutto di questo. Se poi la superficie non è libera, talchè la sua inclinazione sia determinata da un piano resistente che formi coperchio al canale, potendosi ad esso dare quel grado d' inclinazione che piace, supporremo nota la m; ma in tal caso può rimaner dubbio che talvolta la superficie della corrente ad esso non si adatti. Quell' incertezza di misura che può cadere sopra il grado d' inclinazione della superficie additato dalla m, cade egualmente sopra il valore della χ, il quale dalla m dipende (art. 66). Ma lasciando anche da canto questo o simili altre considerazioni sopra la determinazione delle m, χ, il metodo di far dipendere la misura della quantità d' acqua dalla ricerca d' un arco di cerchio corrispondente alla tangente di un angolo manca di quella semplicità che a ragione si può in simile facenda desiderare; e non porta seco il carattere di una evidenza, che non solamente sia matematica, ma eziandio oculare, la quale sola è acconcia ad appagare l' uomo volgare che suole avervi interesse.

88. Ben diversamente camminerà il negozio, se stando $n=0$, si renderà anche $m=0$, facendo che la superficie libera dell' acqua discorra orizzontale. Allora l' equazione dell' art. 61. ci dà

$$q=0;$$

onde tutte le vene capillari dell' acqua corrente hanno un movimento orizzontale. Inoltre l' equazione dell' art. 60. si trasmuta in

$$p=\frac{\chi}{\lambda},$$

nella quale non si contiene la variabile y; per lo che tutto le vene capillari dalla sommità dell'acqua fino al fondo hanno la medesima velocità diretta secondo l'asse delle x, ch' è l'asse della corrente. Dal che segue che la quantità dell'acqua dalla corrente somministrata rimane determinata dalla sua sezione verticale moltiplicata per la velocità; quindi è

$$Q=pL\lambda=L\chi,$$

a sì semplice espressione riducendosi la precedente formola

$$Q=L\frac{\chi}{m}\,Arc.\ tang.\, m,$$

atteso che all'impicciolirsi ed annientarsi d'un angolo, divenendo l'arco eguale alla sua tangente, quando $m=0$, l'espressione fassi

$$Q=L\frac{\chi}{m}m=L\chi.$$

89. Ed è qui da osservare, 1.° che fatta $m=0$, divenendo $q=0$, $p=cost.$ rimane insieme perfettamente compiuta la condizione dell'integrale esatto, di cui è detto all' art. 30; 2.° che quanto spetta alla fisica giustezza della misura, si ottiene il medesimo valore della Q, ancorchè non sia a rigore $m=0$, ma rimanga ancora $m=$ a qualche sensibile quantità, purchè tale che sia permesso di prendere indifferentemente la tangente dell'arco per l'arco stesso.

90. Se la superficie libera di una corrente, là dove si fa $y=0$ si trovi sotto il livello d'una superficie parimente libera, ove l'acqua suprema della corrente dando nell'opposto ostacolo perda ogni moto, e sia in tal sito la differenza costante di livello delle due superficie $=a$; per essere quivi $y=0$, l'equazione dell'art. 69. $g(a+y)=\frac{1}{2}v^2$ si trasmuterà nella

$$ga=\tfrac{1}{2}v^2;$$

onde $v=\sqrt{2ga}$. Essendo poi $q=0$, sarà $v=\sqrt{(p^2+q^2)}=p$. Quindi vien noto il valore della $p=\sqrt{2ga}$; o perciocchè sia (art. 88.) $p=\frac{\chi}{\lambda}$, avremo

$$\chi=\lambda\sqrt{2ga};$$

onde

$$Q=L\lambda\sqrt{2ga}.$$

Se pertanto potremo avere un'altezza qualunque a di acqua ridotta

in tal modo stagnante sopra il livello della superficie della corrente, sarà in nostro potere il dare a questa quella velocità $= \sqrt{2ga}$ che più ci aggrada. Prendasi dunque $a = \frac{1}{2g}$, sarà $\sqrt{2ga} = 1$, cioè la velocità della corrente sarà quella che vien presa per unità $= \frac{met.}{9}$ (art. 67), e la formola precedente diverrà

$$Q = L\lambda,$$

vale a dire la sezione $L\lambda$ della corrente ci darà ella medesima di netto la quantità dell' acqua che la corrente trasporta nell' unità di tempo.

91. Ognun vede che non ci può avere misura d'acqua corrente più semplice di questa. Qualunque uomo nelle matematiche inesperto, potendo coll' occhio discernere come l'acqua nel canale si muova a guisa di un solido perfettamente squadrato, non ha che a prendere la misura dell' altezza e della larghezza della corrente per riconoscere con puntualità e con certezza la quantità dell' acqua che tramanda. Questo spediente adunque offre in generale la miglior maniera per misurare e dispensare qualunque quantità di acqua ad arbitrio si domandi; poichè non fa mestieri, se non che data in numeri tal quantità, ad essa in numeri si uguagli il prodotto dell' altezza colla larghezza della sezione del canale pel quale deve colle descritte condizioni passare.

92. I rivi ed i fiumi corrono naturalmente colla superficie quasi del tutto orizzontale; per rendere ben piano ed a livello anche il loro fondo, e per dar loro le sponde diritte e verticali a fine di poter misurarne le acque, si è immaginata l' idea del Regolatore, che sarebbe un breve tronco di canale fatto ad arte entro l' alveo della corrente a sponde perpendicolari e parallele, e con fondo perfettamente orrizzontale, pel quale si costrignerebbe tutta l' acqua a passare. Ma nel restringere con tal macchina, l' alveo del rivo si rende obbliqua la direzione delle vene capillari di tutta la corrente, inflettendosi le une contro le altre; il che più non permette di ottenere la misura fedele dell' acqua col prodotto della sua sezione nella velocità. Si conoscerà a suo luogo per qual cagione il nostro canale non andrà punto soggetto a simile inconveniente.

CAPITOLO III.

Continuazione del medesimo argomento.

93. Il precedente nostro concetto mira, come si vede, ad usare

un canale per misuratore dell' acqua: altra maniera di misura si può indagare, la quale consista nel far alla libera sgorgare l'acqua da una luce di nota grandezza, ed incisa in un piano verticale presentato alla corrente, come qui ci faremo ad esporre.

Sia per maggior semplicità la luce di forma rettangola con due lati orizzontali e due verticali. Sopra di essa s' intenda arrestata l' acqua per l' opposizione del piano verticale, formandovi quel che suol chiamarsi battente, colla superficie stagnante. Se il vano della luce sia libero, talchè l' acqua che shocca si trovi pensile in aria o in niuna parte da che che sia sostenuta, nel piano di essa riuscirà nulla la pressione, cioè $\Pi = 0$; quindi segnando a l' altezza cui sale il battente sopra il labbro superiore della luce, per ogni punto della sua sezione situato alla profondità y sotto il medesimo labbro avremo la velocità assoluta dell' acqua, che ci passa, espressa per

$$v = \sqrt{[2g(a+y)]},$$

ed una parabola che abbia il vertice alla sommità dell' acqua stagnante, ove comincia l' altezza notata a, ed il parametro $= 2g$ potrà colle sue ordinate orizzontali rappresentare le velocità dell' acqua corrispondenti a tutt' i punti della sezione (art. 69). Di qua viene il noto comun metodo di calcolare la quantità dell' acqua sgorgante dalla luce, la quale si ritiene espressa per lo spazio medesimo compreso fra la linea parabolica ed il suo asse.

94. Per dare col nostro calcolo qualche idea di questa maniera di misura, supponghiamo, secondo il suo assunto, che nello sgorgamento della fluida copia sia nullo il movimento dell' acqua secondo uno dei tre assi, per esempio secondo quello delle z, talchè alle due estremità di questa ordinata la corrente abbia colla direzione del moto a radere due superficie parallele fra loro e col suo asse. Preso, come già usammo, l' asse delle x per asse longitudinale della corrente o vena sgorgante, e quello delle y per traverso, le due superficie dalla fluida vena secondate col suo moto alle estremità della y si considerino piane, poste ad angoli retti al piano formato dagli assi delle x, y; ma l' una e l' altra comunque inclinate al piano degli assi delle x, z; tutto in somma sia analogo alle condizioni degli articoli 73 e 86.

Si noti L la distanza delle due superficie parallele, che sarà la larghezza della luce che dà l' uscita all' acqua, LDy sarà l' elemento *differenziale* della sezione della luce, e per esso passerà una lastretta elementare di fluido. Secondo le premesse p indicherà la velocità della lastretta in direzione perpendicolare al piano della luce, mentre v esprimerà la sua velocità assoluta, la quale riescirà di direzione obbliqua al piano medesimo. Facilmente s' intenderà essere

$\frac{p}{v}$ il seno dell'angolo che la lastretta forma col piano della sezione; quindi $\frac{p}{v}Dy$ esprimerà la grossezza della lastretta che passa per l'elemento Dy della sezione medesima; e $L\frac{v}{p}Dy$ sarà la sezione elementare della lastretta presa perpendicolarmente alla direzione del suo moto.

La sezione adunque della corrente che taglia ad angoli retti tutte le fluide lastrette cha la formano, cioè la somma di tutte le sezioni elementari delle lastrette prese a squadra colle respettive direzioni del moto starà alla sezione o grandezza dalla luce come

$$\int L\frac{p}{v}Dy : \int LDy.$$

Ora egli è chiaro che se le fluide lastrette, le quali si muovono obbliquamente le une verso le altre, nell' incontro si raddrizzassero il corso, salva la loro velocità, la sezione $\int L\frac{p}{v}Dy$ della corrente diverebbe disposta ad angoli retti colla direzione del moto comune a tutte le fluide vene capillari. Tale sezione del corso raddrizzato è quella che suole chiamarsi col nome di *vena contratta*; essa è la vera sezione dell' acqua sgorgante dalla luce, poichè vien presa a dovere, vale a dire ad angoli retti a tutte le sue minute fila; a differenza della sezione della luce medesima, la quale, riferita al corpo dell' acqua che la traversa, non è che sezione viziosa e fallace, perchè riesce presa in isbiescio per rispetto alle capillari fila della fluida scaturigine. Noi chiameremo per legittimo contrapposto *vena lata* questa sezione della luce; onde la vena contratta starà alla vena lata nella ragione di

$$L\int\frac{p}{v}Dy : Ly.$$

95. Sia pertanto m la tangente dell'angolo che una delle due superficie inclinate fa col piano degli assi delle x, z, e n la tangente dell'angolo fatto parimente dall' altra superficie: l'espressione della $\frac{p}{v}$ sarà (art. 63.) $\frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}}$, presa $A = m\frac{a}{\lambda} + (n-m)\frac{y}{\lambda}$, donde si ricava

$$L\int\frac{p}{v}Dy = L\frac{\lambda}{n-m}\int\frac{DA}{\sqrt{(1+A^2)}},$$

ed integrando

$$L\int \frac{p}{v} Dy = L\frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}-A} + cost.,$$

cioè surrogando ad A il suo valore

$$= L\frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2\right]}-\left(m\frac{a}{\lambda}+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)} + cost$$

Ponendo il principio della y alla superficie della corrente nel punto cui corrisponde l'altezza a, l'integrale dovrà farsi $=0$, quando $y=mx=m\frac{\lambda-a}{n-m}$, ed avere il suo compimento dove $y=a+nx=\frac{n\lambda-ma}{n-m}$. Diversamente se, come altrove usammo di fare, si ponga l'origine della y alla sommità dell'altezza λ, talchè si abbia $a=\lambda$, l'integrale avrà il suo cominciamento dove $y=0$, ed il fine dove $y=\lambda$. All'uno ed all'altro assunto corrisponde il medesimo avvenimento; appigliamoci dunque al secondo, ch'è il più semplice; onde avremo l'espressione generale dell'integrale come segue:

$$L\int \frac{p}{v} Dy = L\frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(m+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)^2\right]}-\left(m+(n-m)\frac{y}{\lambda}\right)} + cost.$$

La costante è quella che rende l'integrale $=0$, quando $y=0$, onde

$$cost. = L\frac{\lambda}{n-m} \log. [\sqrt{(1+m^2)}-m];$$

facendo perciò terminare l'integrale colla $y=\lambda$, si otterrà

$$L\int \frac{p}{v} Dy = L\frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{\sqrt{(1+m^2)}-m}{\sqrt{(1+n^2)}-n}.$$

Dunque la vena contratta sta alla vena lata Ly, cioè $L\lambda$ nella ragione di

$$\frac{1}{n-m} \log. \frac{\sqrt{(1+m^2)}-m}{\sqrt{(1+n^2)}-n} : 1,$$

la quale allorchè $n=-m$, vale a dire quando l'inclinazione delle due superficie è la medesima, ma in verso opposto, come generalmente suol succedere nelle naturali contrazioni di vena, si converte nella seguente

$$-\frac{1}{2m}\,log.\frac{\sqrt{(1+m^2)}-m}{\sqrt{(1+m^2)}+m}:1,$$

cioè

$$\frac{1}{2m}\,log.\frac{\sqrt{(1+m^2)}+m}{\sqrt{(1+m^2)}-m}:1.$$

Si osservi che in questo rapporto della vena contratta alla vena lata non entra nè la grandezza $L\lambda$ della bocca o cateratta dalla quale sgorga l'acqua, nè la velocità p, ovvero v del fluido; ma ci ha soltanto le tangenti m e n degli angoli che le due superficie inclinate fanno col piano degli assi delle x, z. Dunque salva in qualsivoglia modo la grandezza di questi angoli, la vena contratta conserva una ragione costante alla vena lata, qualunque sia la grandezza della luce o cateratta per cui sorte l'acqua, e qualunque sia la velocità di questa, ed in conseguenza qualunque sia ancora l'altezza viva o battente da cui la velocità dipende.

96. Questa dimostrazione, soggetta sempre alla condizione dell'integrale esatto $pDx+qDy$, non è rigorosa se non per la contrazione della vena che fassi secondo un solo asse delle ordinate y, e nel caso in cui allo sgorgare dell'acqua le due superficie inclinate siano piane, come si riconosce dall'assunto donde muove il calcolo. Nulladimeno si consideri valere ancora, s'è possibile, come alcune sperienze finora istituite sembrano accennare, per la contrazione fatta, come generalmente addiviene, su ambedue le direzioni trasversali della vena parallele agli assi delle y e delle z, e colle superficie curve non piane; e supponghiamo inoltre che i piani tangenti di queste formino alla loro origine angoli costanti coi piani paralleli a quelli degli assi delle x, y e delle x, z.

In tale supposto la nostra dimostrazione sarà adattabile alla contrazione di vena per tutte le grandezze delle bocche rettangole e per tutti i gradi di velocità dello sgorgo, e conseguentemente per ogni altezza di battente. Indagando perciò colla sperienza la ragione che passa fra le vena contratta e la vena lata in una determinata ampiezza di luce, e con un dato battente, saremo certi che questa ragione quadrerà a tutte le luci ed a tutti i battenti, di modo che moltiplicando per essa la sezione di una luce o cateratta qualunque, ch'è la sezione infedele ed illegittima della corrente, noi la convertiremo nella legittima e sincera sezione, qual è quella della vena contratta. Similmente s'intenderà, che trattandosi di quantità d'acqua dalla cateratta versata, quel conto che si fa per calcolarla, moltiplicando ogni menomo elemento di questa per la corrispondente velocità dalla parabolica ordinata espressa, ovvero, il che torna lo stesso, moltiplicando la media velocità parimente dalla parabola

additata per l' intera grandezza della cateratta, conto necessariamente difettoso, atteso che la sezione di questa è obbliqua e torta al corso de' fluidi fili, verrà ad essere rettificato e corretto col moltiplicare il suo prodotto per la medesima ragione, vale a dire pel *coefficiente* costante che la esprime.

97. Conoscendosi in tal guisa la quantità dell' acqua che sorte per qualsivoglia luce e con qualsivoglia battente, potrà in generale la grandezza della luce sotto tal battente servire di misura all' acqua corrente. Quindi si potrà ancora talmente assortire la misura di una cateratta e del suo battente, che la massa d' acqua tramandata nell' unità di tempo stia al metro cubo come la sezione della cateratta sta al metro quadrato; nel qual caso la grandezza della luce si dirà essa medesima la quantità dell' acqua che si dispensa: dilatando poi o restringendo soltanto la larghezza di questa bocca, salva la sua altezza e salvo il suo battente, dai quali dipende la velocità dell' acqua, egli è manifesto che crescerà o scemerà la quantità dell' acqua nella medesima ragione in cui cresce o cala la grandezza della luce, onde coll' adattare all' uopo la sola larghezza della cateratta potremo conseguire la misura di qualsivoglia quantità di acqua corrente, e potremo da qualsivoglia canal maestro o fiume separare e dispensare l' acqua in quella quantità che si domanda; e nell' uno e nell' altro caso quel numero che esprimerà la grandezza della luce in metri quadrati o in frazioni di metro quadrato, esprimerà insiememente la quantità dell' acqua in metri cubi o in frazioni di metro cubo. Noi parleremo a suo luogo di questo metodo di misura; intanto però si vede ch' esso non ha in suo favore la certezza della dimostrazione, ed è in parte appoggiato a gratuite supposizioni; e sappiamo altronde che la sperienza, la quale sembra avvalorarlo, manca di molto di quella generalità che possa in ogni caso dar bando al dubbio dell' errore; oltre di che tal modo non ci presenta quella semplicità ed evidenza di misura che appagar possa l' occhio volgare di chi vi ha interesse.

CAPITOLO IV.

Diverse pratiche usate in Italia per la misura e dispensa delle acque correnti.

98. Dall' idea generale della misura delle acque correnti passando a dire in particolare delle pratiche usate in Italia per la dispensa delle medesime, noi senza preamboli cominceremo dalla pratica milanese, che a dritto o a torto sembra la più accreditata, e della quale diversi scrittori delle idrauliche cose hanno ragionato.

L' unità di acqua corrente a Milano si chiama oncia, e per essa s' intende quella copia di acqua che passa per una cateratta rettangola, chiamata modulo, alta once 4 del braccio milanese (metri 0,198), larga once 3 (met. 0,148), con battente di acqua alto once 2 (met. 0,099) sopra il labbro supremo della bocca. Secondo la maggiore o minore quantità di acqua che si vuole dispensare, si dilata o si restrigne la larghezza della cateratta, salva la sua altezza e salvo il battente. La fabbrica è come segue. Due sono le cateratte di eguale larghezza, l' una scolpita nella sponda del canale maestro da cui si piglia l' acqua, l' altra posta a traverso dell' acquidotto che la conduce per misurarla; la loro distanza è di braccia 10. (met. 5,949). La prima ha la soglia met. 0,395 più bassa che la seconda; un suolo orizzontale a livello della prima soglia si stende fin sotto la seconda, ove resta un gradino: è però permesso l' unire in vece le due soglie con un piano inclinato, che risparmia la brusca opposizione del gradino. Il tronco del condotto che giace fra le due cateratte, ed è il bottino dell' acqua, è largo met. 0,495 più di queste, cioè met. 0,247 per ogni parte; una soffitta orizzontale, detta cielo morto, lo cuopre, lasciando il vano pel battente; esso però è chiamato tromba coperta. Il modulo è inciso in una lastra di marmo grossa met. 0,148, contornata da sottil lamina di ferro, che pareggia esattamente i labbri del modulo. Il tronco del condotto che sussegue, detto tromba scoperta, ha di lunghezza met. 5,354; la sua larghezza sopravanza quella del modulo met. 0,099 per ogni lato al suo principio, e met. 0,247 al suo fine; esso ha il fondo depresso sotto la soglia del modulo met. 0,049 alla stremità superiore, e met. 0,099 all' inferiore. Al di là di questo confine nulla è prescritto, e tutto rimane in arbitrio del possessore del rigagno.

La cateratta che tira l' acqua dal canal maestro, ha la sua imposta di legno da alzare o sbassare finchè il livello dell' acqua si alzi met. 0,693 sopra la sua soglia, combaciandosi allora colla soffitta della tromba coperta, e formando lo stabilito battente sopra la cateratta del modulo. Aggiustata una volta l' imposta a sito, quando le acque del canale maestro stanno ad un prescritto segnale, ivi si salda, perchè più non venga smossa, salva l' esigenza della navigazione; tanto almeno è stabilito da' regolamenti per le acque che si derivano da canali di regio diritto.

Nel Pavese si segue la pratica di Milano, salva la differenza del proprio braccio, il quale è di met. 0,62791.

Nel Novarese pure si ritiene l' uso milanese, ma a bottino scoperto e con piccole altre diversità, conservata la misura del braccio del paese, ch' è di met. 0,60621.

Nel Lodigiano l' oncia d' acqua è quella che schizza da una cateratta

larga un' oncia a misura del paese (met. 0,03822), alta once 9 (met. 0,34398), e con due once di battente a misura milanese (met. 0,09915).

Il modulo Cremonese dell' oncia d' acqua è un' apertura rettangola come le precedenti, alta once dieci, misura del paese (met. 0,4029), larga un' oncia (met. 0,0402), col battente parimente di un' oncia. Quivi il modulo è accompagnato con un canale di eguali dimensioni, lungo met. 4,8353; il tronco che sussegue del rigagnolo alla distanza di met. 72,53 è attraversato da una soglia depressa un' oncia sola sotto il livello della soglia del modulo. Il bottino che si stende dalla cateratta del canal maestro fino al modulo non ha stabilite le misure; ma secondo l' uso è assai più lungo, ed anche più largo che nelle antescritte pratiche.

I Cremaschi usano per lo più il modulo cremonese, toltone il piccolo divario del loro braccio, ch' è di met. 0,40978, dove nel Cremonese è di met. 0,48353.

Ne' diversi paesi ove si usano le descritte pratiche, ed ovunque vengono imitate, non altrimenti che a Milano, si suole aggrandire la larghezza della bocca modellata secondo la copia d' acqua che si vuola dispensare, mantenendo invariabile l' altezza. E se talvolta vien meno la sufficiente vena d' acqua nel canal maestro, si abbassano egualmente le imposte di tutte le sue cateratte, affinchè l' acqua cali in egual misura a tutti i moduli.

99. In tutte le precedenti pratiche usandosi doppia cateratta, l' una cioè alla sponda del canal maestro, e l' altra al modulo, il tronco dell' acquidotto ad esse intermezzo forma bottino all' acqua. Seguono ora altri usi nei quali non avvi bottino, perchè il modulo s' intaglia nella sponda medesima del canale maestro.

A Bergamo per oncia d' acqua s' intende quella che sgorga liberamente da un foro rotondo del diametro di un' oncia a misura del paese (met. 0,044); il doppio spazio circolare rappresenta le due once, il triplo le tre, e così del resto; sembra scelta la forma circolare dell' orifizio, perchè questa più agevolmente si suole con puntualità descrivere. Non essendo molto varia la profondità alla quale le circostanze de' pubblici canali permettono di collocare le bocche, non è stata prescritta la misura del loro battente; nulladimeno erasi già da gran tempo colà pensato allo spediente di regolare il diametro delle bocche secondo la profondità alla quale piacesse di collocarle, perchè avessero a dare la competente misura dell' acqua; ed io so che a tal fine vi ha già preparate delle tavole che le vicende de' tempi lasciarono oziose.

Nel Piemonte l' acqua si stima a ruote, ed è la ruota d' acqua quella quantità che viene tramandata da una cateratta quadra d' un

piede di lato (met. 0,5136). La ruota d'acqua non ha battente, secondo la descrizione che ne fa il signor Michelotti.

Nel Modonese l'unità d'acqua è similmente detta macina, perchè reputata bastevole a volgere una macina; essa è misurata con una luce quadra di un braccio (met. 0,5230) di lato. Può, secondo il prescritto del paese, avere un battente, purchè non sia maggiore di once dieci (met. 0,435). Un'altra minor misura, considerata per la nona parte della macina, porta il nome di bocchetta; la sua cateratta quadra ha per lato il terzo del lato della macina; ma non deve avere battente. L'uso Modonese è comune ancora ai Reggiani, se non che presso di questi la misura del braccio equivale a met. 0,5308.

Nel Mantovano l'acqua si dispensa a quadretti. Il quadretto è una cateratta tagliata in quadro con un braccio Mantovano (met. 0,4668) di lato, e con due once (met. 0,0778) di battente.

I Veronesi pure misurano l'acqua a quadretti, avendo il quadretto il lato d'un piede (met. 0,3429), ed il battente di due once (met. 0,0571). La misura Veronese è usata anche dai Mantovani per le acque del Tartaro.

A Brescia parimente l'unità di acqua corrente vien detta quadretto, e per esso s'intende quel corpo di acqua che scorre per un canale di certa pendenza coll'altezza e larghezza di un braccio (met. 0,47099), come riferisce il Baratteri; ma io vengo accertato da periti Bresciani che, presentemente almeno, il quadretto ha mezzo braccio in altezza, e due braccia in larghezza. La misura del quadretto si piglia alla metà del canale.

In questi metodi a sezioni rettangole, non altrimenti che nei precedenti, si dilata o si restrigne la larghezza delle bocche secondo la quantità d'acqua che si richiede.

100. In altri paesi d'Italia o non ci ha, propriamente parlando, alcuna regola per dispensa d'acque, o la misura di questa si colloca nella sola sezione della luce o del canale che la diffonde, o si cerca d'imitare alcuna delle descritte pratiche, le quali contengono i metodi assolutamente più studiati e meditati per vendere e comperare l'acqua a quella misura che si può più giusta; il che dipende dal grande valore ch'essa ha nei paesi nei quali sono in uso. Imperocchè quell'acqua che in una gran parte dell'Italia è abbandonata all'arbitrio di chi se la piglia, o poco si stima, e talvolta presso alcuni è oggetto di rifiuto; nelle campagne di Novara, di Milano, di Pavia, di Lodi e di Cremona, per l'uso vantaggiosissimo che se ne fa a beneficio dell'agricoltura, è salita a sì alto prezzo, che la proprietà di una bocca di mezzo metro quadro di ampiezza, la quale versi acqua in ragione di un metro cubo per ogni minuto secondo

(equivale a 28 once d'acqua di Milano a libera caduta), si valuta circa un mezzo milione di lire Italiane o franchi, e più ancora secondo le circostanze particolari de' luoghi.

Non si è qui fatta menzione di quel distribuimento col quale suol diramarsi per le città e per le case mediante l' uso di canne e cannoncelli, essendo un affare di pochissima considerazione, che non può essere posto a paragone di quella copia d'acqua che si dispensa colle descritte pratiche, nè potendosi con tale dispensamento avere alcuna norma di misura dell' acqua che si diffonde, a cagione della grande e varia perdita di moto che il fluido soffre nella stretta e diversa lunghezza dell' angusto passaggio.

CAPITOLO V.

De' principali difetti delle descritte pratiche, e nominatamente della milanese.

101. Date a conoscere le principali usanze delle dispense d'acqua, che sono specialmente in vigore ne' paesi ove ogni copia d' acqua è in grande estimazione per gli adacquamenti, niuno s' attenda che io discender voglia a mostrare a parte a parte tutti i difetti di ciascheduna, poichè gitterei in vano le parole, e farei inutilmente perdere il tempo a chi le ode; io toccherò appena i maggiori inconvenienti comuni a tutte, o particolari di taluno dei metodi più accreditati, a fine di dare in questo luogo qualche saggio della grande loro imperfezione; nel resto ciascuno confrontando il metodo che noi daremo colla usanza del suo paese, vedrà palesemente per sè stesso tutti i vizj di questa, senza che faccia mestieri ch' altri glieli additi.

Il primo difetto comune indistintamente a tutte le pratiche egli è quello di mancare del fondamento d' ogni misura, ch' è la vera unità esprimente una quantità determinata della materia che s' intende di misurare, ed a cui la misura si riferisca non altrimenti che ogni numero alla unità numerica. L' unità di misura dell' acqua corrente, come già avvertimmo (art. 85), altro non può essere che un solido cubo di acqua, il quale abbia per lato una lunghezza presa per unità lineare, e venga somministrato dalla corrente in un difinito tempo considerato parimente per unità di tempo. Allora si avrà la vera ed assoluta misura della quantità d' acqua di ciascheduna corrente, quando si conoscerà ch' essa contiene un tal numero di unità o una tale frazione della medesima. Secondo gli usi improprj delle misure di acqua d' ogni paese tanto in Italia che fuori, si sa soltanto che la tale o tal altra corrente passa per una bocca di un braccio, di un piede quadrato, o di tante once o pollici quadrati di apertura, e se

vuolsi ancora con tale o tal altro battente; ma nè il braccio o piede quadrato, nè il numero delle once quadre o de' pollici, nè il battente ci rappresenta la quantità effettiva di acqua che viene da queste tali luci in un certo tempo somministrata. Ora questa cognizione dell'assoluta misura dell'acqua riportata ad una determinata e nota quantità è del tutto indispensabile, non solamente a fine di poter far loro paragonare le quantità di acqua solite dispensarsi in paesi diversi al lume de' prezzi, de' contratti e della generale idraulica economia, ma per saperne regolare l'impiego tanto pel movimento delle macchine, quanto per gli adacquamenti, per la navigazione ed anche pel consumo nei domestici usi di una popolazione cui sia per avventura l'acqua destinata. Quando non si conosce la vera quantità dell'acqua di cui si ha a disporre, fa mestieri in tutti gl' impieghi, cui deve servire, gettarne superfluamente una quantità per timore ch' essa al bisogno non manchi; così una quantità preziosa dell'acqua si perde inutilmente pel solo difetto della misura.

102. Un metodo convenevole di misura vuole che la quantità dell'acqua apparisca dalla grandezza della cateratta o luce per la quale passa, vale a dire che la grandezza della luce sia all'unità di superficie come la copia dell'acqua che trasfonde sta all'unità di solido; ma questa corrispondenza fra la grandezza della cateratta e la quantità dell'acqua esige che sia in una determinata maniera aggiustata la velocità dell'acqua, o il battente da cui dipende, alla misura lineare che serve per l'unità di superficie; poichè senza questo accomodamento ad ogni grandezza di luce può corrispondere e molta e poc'acqua sgorgante. Ma ne' paesi ne' quali si prescinde dal battente, la velocità dell'acqua è quale s'imbatte, e non ha alcuna relazione colla grandezza della cateratta; e dove si usa il battente, questo è fissato ad arbitrio senza alcuna corrispondenza colla rispettiva unità lineare e di superficie di ciascun paese. Egli è questo un secondo difetto comune a tutte le misure fino ad ora usate per dispensa di acque.

103. Ma quand'anche la velocità o il battente fosse adattato alla misura che serve di unità per la grandezza della luce, nessuna luce, secondo i metodi generalmente praticati, potrebbe rappresentare la quantità dell'acqua che passa; poichè in generale al passaggio dell'acqua per la cateratta le vene capillari inflettono il loro corso; dalla qual piega de' fluidi fili nasce la contrazione della vena intera: allora la sezione della cateratta taglia in isbiescio le vene capillari, e la grandezza di quella eccede non poco la somma delle sezioni perpendicolari di queste, vale a dire la cateratta non rappresenta più la vera sezione della corrente dell'acqua, ch'è quella che può abilitarla ad esprimere la quantità dell'acqua trasfusa. Questo forma

il terzo vizio comune a tutte le cateratte che servono generalmente alla misura delle acque correnti.

104. Noi per altro ci siamo studiati di mostrare (art. 97) che, malgrado lo sconcerto di direzione che l'acqua soffre per la contrazione della vena, si potrebbe ottenere l'intento di esprimere la quantità dell'acqua colla sezione della cateratta, purchè la vena contratta conservasse in tutte le bocche una ragione costante alla vena lata, cioè alla sezione della cateratta, e ci siamo ingegnati di chiamare il calcolo in sussidio di questo argomento (art. 95); ma abbiamo altresì osservato che l'assunto di quella costante ragione è in parte appoggiato a gratuite supposizioni, ed è destituto di sufficienti prove sperimentali; onde rimane dubbioso se in ogni circostanza al crescere o calare della cateratta, ancorchè rettangola, cresca sempre o cali nella medesima ragione la copia dell'acqua che si versa. Nulladimeno supponghiamo per largheggiare essere ciò vero, ed essere certo in tutta la sua generalità, talmente che regulando a norma del citato articolo 97. per mezzo del battente la velocità in modo che l'ingrandimento di questa nella mentovata ragione costante supplisca allo impicciolimento della sezione contratta, si possa rappresentare colla grandezza della cateratta la quantità dell'acqua uscente. Conviene qui riflettere che la determinazione della velocità dell'acqua che sgorga da ciascun punto di una cateratta per mezzo della sua corispondente altezza viva, che diciamo battente, dipende secondo le cose dimostrate dall'essere libera la luce della cateratta, onde l'acqua che sbocca si spiani tutta di sotto il livello infimo della luce, poichè altrimenti l'acqua sgorgata alzandosi sopra il livello della soglia di detta luce, esercita una pressione contro quella che sta per uscirne, ed infievolisce la sua velocità, di modo che questa più non corrisponde all'altezza viva, ovvero al battente: ora in tutte le pratiche delle dispense d'acque il recipiente nel quale si versa il fluido che sbocca dalla cateratta, manca della dovuta condizione perchè lo sgorgo formi libera cascata, e l'acqua che esce or più or meno, secondo le diverse circostanze delle bocche, viene ritardata da quella che già uscita la precede. È questo un nuovo vizio di tutte le comunemente usate dispense d'acque che le rende inesatte ed infedeli, rendendo erronei insieme i calcoli di quantità d'acqua che sui premessi principj si sogliono istituire colle tavole paraboliche e coll'aggiustamento corrispondente alla costante ragione, qual si supponesse, della vena contratta. Dicesi che nel Veronese lo sgorgamento dell'acqua facciasi a libera cateratta; ma per verità o non è tale o non lo è sempre; che anzi più volte vi ha sì grande ringorgamento, il quale frena la velocità dell'acqua uscente dalla cateratta medesima, che si cerca di supplire al grave difetto coll'ingrandire più del dovere

l'ampiezza della luce medesima, sconcertando in tal modo il sistema della dispensa.

105. A questi inconvenienti soggiacciono tutt' i metodi fino ad ora usati e che io conosca, onde non ne va esente eziandio il Milanese, che sembra fra tutti il più rinomato; ma questo ha pure altri difetti che non sono comuni a tutti. La quantità dell'acqua che si versa da una bocca dipende dall'altezza viva del fluido sopra ciascun punto della luce, poichè da quest' altezza deriva la sua velocità (art. 69), e da questa la maggiore o minor copia dell' acqua che esce; in più brevi termini la quantità dell'acqua dipende dal battente. L'altezza del battente, secondo gli articoli 69 e 70; vuol essere computata dalla superficie dell' acqua che sia senza pressione e senza moto; ma nell' uso milanese, se la misura del battente si desume dall'altezza che ha l'acqua entro il bottino e rasente l' imposta della cateratta del canal maestro, essendo quivi la superficie del fluido lasciata a tal uopo libera, essa è bensì esente da ogni pressione, ma per la vicinanza ed impeto dello sgorgo l' acqua non vi è mai tranquilla, com' esser dovrebbe per somministrare il legittimo battente, ed ha anzi spesse volte un movimento assai vivo di vibrazione o di vortice: se poi il battente si piglia in vece dalla superficie dell' acqua contigua al modulo, e che quivi s' affronta al ciel coperto, ancorchè in tal sito la superficie dell' acqua fosse per avventura senza moto, il che generalmente non succederà, nulladimeno, non essendovi la superficie libera, vi può essere e vi sarà comunemente pressione che alteri il battente, e veramente il cielo morto sembra espressamente fatto, perchè non si possa giammai essere certi del vero battente dell' acqua. Nè nell' una, nè nell' altra maniera adunque si ha la legittima misura del battente, e conseguentemente rimane incerta e fallace la dispensa dell' acqua.

Ma quel che dà ancora maggiore risalto a questa incertezza è la troppa brevità del tragitto che fa l' acqua per passare dalla cateratta del canal maestro al modulo, e insieme la ristrettezza di questo tronco di canal coperto, in una parola l' angustia del bottino, la quale per sopraccarico d' inconvenienti fassi ancora più difettosa quando al bottino si occupa notabil parte di sua capacità col piano acclive, che sale dalla soglia di detta cateratta a quella del modulo. Questa angustia della tromba coperta primieramente non concede alle onde provegnenti dal canal maestro, ed a quelle che l' acqua eccita all' impetuoso suo ingresso nel bottino, spazio sufficiente per sedarsi col vicendevole loro contrasto avanti che giungano al modulo, dove, giunte che siano, sconcertano l' uniformità dell' efflusso; secondariamente fa che la vena sgorgante dalla prima cateratta arrivi con tale vivacità di moto al modulo, che lì dove urta contro la di lui fronte

e contro il coperchio del bottino, aumenti la pressione e con essa il prescritto battente, e dove s' affaccia alla luce aperta per uscire, accresca la velocità oltre il dovere, vale a dire oltre il termine che corrisponder dovrebbe all' assegnato battente.

Un altro grave difetto, proprio dell' uso milanese, è il lasciare in arbitrio dell' acquistatore dell' acqua il sostituire il mentovato piano acclive al fondo orizzontale del bottino; imperocchè, oltre l'accennato effetto di rendere in tal guisa più angustiata la strettezza del bottino medesimo, questo piano forma al modulo una specie d' imbuto, il quale minora d' assai la contrazione della vena che si opera di giù in su, e che ha tutto il suo pieno effetto, allorquando sotto il modulo si lascia un'altezza, contro la quale venga ad appoggiarsi l' acqua che cerca di uscire: onde chi fu abbastanza accorto o fortunato per valersi di questa incauta condiscendenza della pratica milanese, estrae più acqua in parità di once dal suo modulo che altri, il quale attenendosi alla primaria regola fa costruire la tromba coperta col fondo orizzontale (*).

(*) Il sig. Professore Venturoli ne' suoi Elementi di Meccanica e d' Idraulica tom. 2. edizione terza pag. 257, mostra di non essere persuaso di questi difetti che il sig. Tadini attribuisce al metodo di derivazione secondo la pratica milanese, e ritiene che l' erogazione di queste bocche sia come se l' effusso fosse libero. Ecco in qual modo egli si esprima; *la caduta di un'oncia che si fa dalla soglia del modulo, l' inclinazione che si dà al fondo della tromba scoperta, a sopra tutto l' abbondante larghezza di questo canale a la divergenza della sue pareti somministrano così ampio sfogo all' acqua sgorgante, che ben può equivalere alla cascata libera*. Appoggia egli codesta sua oppinione ad una sperienza che il p. De-Regi ha inserita nel suo Trattato sull' uso della tavola parabolica ediz. 2. pag. 68, dalla quale risulta che l' erogazione effettiva di una bocca milanese è maggiore della teorica, mentre dovrebb' esser minore se sussistessero i difetti attribuiti dal sig. Tadini. Si rifleta però che codesta sperienza fu fatta con una luce dalla quale l' acqua cadeva nel vaso misuratore della erogazione a forma di getto, e che perciò non è già stata sperimentata dal p. De-Regi una bocca milanese nel modo in cui si fa uso nelle derivazioni, ma bensì una luce a libera cascata: onde non può sì fatta sperienza nè approvare, nè escludere i difetti attribuiti dal sig. Tadini alla pratica milanese. Che se codesti difetti si dovessero solo ripetere dalla circostanza che l' effusso dell' acqua per la bocche milanesi non è a libera cascata, io m' atterrei all' oppinione del signor Venturoli, quando non fosse smantita da sperienze eseguite con una luce, per la quale tutte le circostanze delle bocche milanesi, si verificassero. Piuttosto mi fa dubitare della poca esattezza di un tal metodo la breve lunghezza della *tromba coperta*, sembrandomi che l' acqua cui entra nella medesima, possa far sentire l' influsso delle sue agitazioni ad una distanza ben anche maggiore di metri 5,9494, qual è quella che esiste fra il modulo a la cateratta del canale maestro; per queste agitazioni o ondulazioni della tromba coperta, l' acqua si presenterà al modulo con qualche movimento, e da esso sgorgherà con una velocità dovuta ad un battente maggiore del prescritto. Questo è infatti ciò che dimostra col fatto il

106. Ma più non si parli di difetti di questo metodo, nè di que' d'altri paesi. Abbastanza si conosce da questa semplice esposizione, che nessuna delle pratiche usate in Italia (ed a peggiore condizione sarebbero per avventura le straniere) per la dispensa delle acque può dirsi all'uopo convenevole; e nessuna con veruna sorta di precauzioni e di artifizj è suscettiva di essere interamente perfezionata, quando non sia da capo a piè tutta cangiata nel modo che intraprenderemo di esporre.

CAPITOLO VI.

Della misura e dispensa d' acqua col Regolatore
= a piena doccia. =

107. L' ordigno che servirà a misurare l'acqua che si dispensa, sarà quind' innanzi da noi chiamato Regolatore in ossequio dell' inclito Bresciano, primo fondatore della idraulica scienza, che tal nome impose ad una macchina per simigliante uso immaginata. Esso, come ognuno può facilmente comprendere, dovrà generalmente regolare la giusta dispensa dell' acqua, facendo questa passare per una

---

sig. Tadini, nella sua ottava annotazione. Ond' è che mi par giusto il dubitare di una tal pratica, quando non venga aumentata la lunghezza della tromba coperta.

Il sig. Tadini in questa sua annotazione, calcola l'oncia d' acqua milanese, in ragione di metri cubi 2,1168 ad ogni sessantesimo minuto primo, e ciò forse perchè nel calcolo di codesta erogazione, avrà fatto uso del rapporto fra la sezione della luce e quella della vena contratta, cui egli deduce all' art. 134., dagli aperimenti di Michelotti. Le sperienze di Mariotte a di Bossut mostrano quanto sia lontano dal vero un tale rapporto, nel caso che le bocche di derivazione abbiano un battente piccolissimo, e se si prende un medio fra i risultamenti delle sperienze istituite da codesti autori sull' oncia d' acqua di Parigi, si trova che codesto rapporto viene calcolato con maggior precisiona facendolo eguale a 0,6727. Tutto questo risulta dal §. 19. della mia memoria, citata alla nota §. 67, Tav. I. sperienza I., e Tav. III. sperienza VIII. Ora per calcolare la portata dell' oncia milanese abbiamo la formola conoscinta

$$Q = \frac{2}{3} . k b t \left\{ (h+a)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\} \sqrt{2g}$$

in cui è $a =$ m.i 0,198312; $b =$ m.i 0,148734; $h = 0{,}099156$; $g =$ m.i 9,8058072; $k = 0{,}6727$; e $t = 60''$. Risulterà quindi

$$Q = \text{m.i c.i } 2{,}3221 .$$

La citata sperienza del p. De-Regi ci da un erogazione di 32 brente di milano al minuto primo, la quale corrisponde a metri cubi 2,4215 poco maggiore della precedente.

sezione di determinata grandezza e con una data velocità, perchè ne risulti la debita quantità del suo efflusso.

Secondo le cose dimostrate, il battente che si può dare all'acqua la quale si presenti ad un'apertura per sortire, somministra l'agevol modo per costrignerla a passare con quel grado di velocità che a noi piaccia di assegnarle per la più comoda sua misura. Supponghiamo adunque che l'acqua, che dovrà presentarsi al regolatore, abbia a formare un determinato battente elevandosi a certa altezza sopra il labbro supremo della sua bocca, avvertendo che il battente si desume dalla superficie libera dell'acqua, ove questa per effetto dell'opposto ostacolo abbia perduto ogni moto. L'acqua corrente nel canal maestro non è mai senza moto, sia alla superficie, sia in qualunque sito sotto essa; si può nulladimanco render tale, facendola con taglio della sponda penetrare in un cavo entro terra; ma l'acqua d'ogni fiume e d'ogni canale soggetto alle vicende delle stagioni essendo di livello incostante, e questa incostanza stendendosi eziandio a tutte le acque che in qualsivoglia modo da esso liberamente si diramano per cavi o rigagni entro campagna, piantando un Regolatore entro qualche rigagnolo dal canal maestro derivato, non sarà possibile l'ottenere un costante battente senza porre in pratica qualche artifizio: tale sarebbe, per esempio, il dare ad una sponda della gora che guida l'acqua al Regolatore quella sola altezza che corrisponde al battente, affinchè l'eccesso d'acqua versandosi per essa, tornasse nel canal maestro. Facilmente si scorge che, dando a questo versatore la convenevole lunghezza, si può ottenere tutta quella giustezza e costanza di battente che si desidera. Ma questo spediente non è sì agevole in effetto, com'è semplice in apparenza, dovendosi non solo costruire di muro e coprire di lastre di pietra tutta la lunga sponda di tal condotto, la quale serve di sfogatoio all'acqua eccedente, ma essendo inoltre necessario scavare un nuovo rigagnolo che la riceva, e lungi la riconduca nel canal maestro. Quindi è che volendo dare e mantenere invariabile al Regolatore un determinato battente, riescirà più semplice l'uso di una cateratta, la di cui luce si possa ampliare o impicciolire secondo le vicende del fiume, affinchè non dia passaggio all'acqua, se non se quanto basti a formare alla fronte del Regolatore il battente che si desidera; onde sarà da restrignersi la luce della cateratta quando l'acqua del fiume si alza, ed al contrario sarà quella da dilatarsi quando questa si abbassa, acciochè l'impiccinlita o ingrandita apertura della cateratta sia un'emenda dell'accresciuta o diminuita velocità e copia dello sgorgo. Verrà pertanto il Regolatore preceduto da due opere, l'una delle quali sarà la cateratta con imposta, per cui si piglia l'acqua dal canal maestro, e che noi quind'innanzi chiameremo col nome di cateratta

maestra; l'altra sarà la gora o tronco di rigagno posto fra essa ed il Regolatore, cui diciamo bottino. Gioverà parlare alquanto dell' una e dell' altra prima di ragionare della principale costruttura che risguarda il Regolatore.

108. L' ingresso dell' acqua per la cateratta maestra dovendo essere moderato, come vedremo, col mezzo della imposta, l'apertura di quella può farsi grande quanto piaccia, anche all' eccesso, senza pregiudizio del battente che deve darsi al Regolatore, e perciò senza sconcerto della misura dell' acqua. La grandezza adunque della cateratta maestra, non altrimenti che la sua forma, la sua situazione e l' alto o basso livello della sua soglia, potrebbe interamente abbandonarsi al beneplacito dell' acquistatore dell' acqua, salva solo la condizione che mediante l' aginstamento dell' imposta si venga a conseguire il prescritto battente d' acqua al sopracciglio del Regolatore. Nulladimanco essendo sempre desiderabile che l' imposta sia di facile ed esatto maneggiamento, e perciò giovando il dare ad essa ed alla cateratta quella minore ampiezza che comporti la quantità dell' acqua da dispensarsi, io aggiugnerò qui alcune avvertenze a questo scopo dirette.

La cateratta aperta in isponda del canal maestro con soglia orizzontale e con i due stipiti perpendicolari avrà l' architrave situato a tale altezza che l' acqua del fiume o canale non possa mai superarlo. Gli stipiti siano murati nel solido delle spalle, le quali spargendosi in forma di arco di cerchio, da descriversi con un raggio non minore di mezzo metro, formino imboccatura innanzi alla cateratta, la quale sia al suo ingresso due volte larga quanto questa, ed abbia un fondo orizzontale a guisa di platea a livello della soglia. L' imposta mobile che da una fessura incisa nell' architrave si cala al basso fra gl' incastri scolpiti negli stipiti, è quella che limita la luce della cateratta, per la quale si lascia il passaggio all' acqua. Il più basso livello, al quale discender giammai possano le acque del fiume o del canal maestro, ovvero quello che secondo i regolamenti o le convenzioni fosse il termine assegnato dal venditore dell' acqua per mantenere all' acquistatore intera la stipulata quantità, oltre il quale calando la corrente maestra mancar dovesse ancora o in parte o in tutto la derivazione del rigagno, si pigli per norma delle opere relative alla dispensa dell' acqua. Supponghiamo inoltre stabilita la misura del battente che deve avere, come tosto vedremo, il Regolatore; e figuriamoci l' imposta abbassata sotto quel livello di norma tanto quant' è questa tal misura. Dallo spigolo inferiore dell' imposta collocata a questo sito s' intenderà cominciare la luce della cateratta maestra. Nella costruttura adunque si dia a questa luce tutta quell' altezza che, secondo le circostanze de' luoghi, comodamente darle si possa maggiore.

Ciò posto, la sezione del Regolatore, che sarà la misuratrice dell'acqua, e che supporremo assegnata ed espressa in parti dal metro quadro, o più particolarmente in centesime di questo, si aumenti all'incirca di un sesto, poi si divida per l'altezza soprarreoata, ed il quoziente di questa divisione si piglierà per la larghezza da darsi alla cateratta. Sia, per esempio, la sezione del Regolatore di trentasei centesime parti del metro quadrato, che corrisponde ad una bocca di circa dodici once d'acqua magistrali di Milano; s'aggiunga il sesto, e faranno 42 centesime: suppongasi che la cateratta si possa senza difficoltà costruire sì alta che la descritta sua luce abbia d'altezza met. 1,40, la sua larghezza sarà $= \frac{0{,}42}{1{,}40} = 0^{met.},30$; e tale sarà la larghezza dell'imposta, eccetto quel piccol orlo che deve penetrare negl' incastri degli stipiti; nell'uso milanese questa larghezza d'imposta sarebbe sei volte maggiore.

E qui conviene avvertire che alla cateratta maestra si può sempre dare a beneplacito maggiore altezza di quella che abbia l'acqua corrente nel canal maestro, tenendo la sua soglia o platea più bassa del fondo di questo, e lasciando fra l'uno e l'altra un greggio piano inclinato. In tal maniera col dare alla cateratta tutta quell'altezza che più ci tornerà comodo per restringere la sua larghezza, noi potremo far uso d'una ristrettissima imposta che riuscirà sempre di più agevole e di più accurato maneggiamento che un'altra assai più spaziosa, quale fino ad ora si suole usare; e quando la variazione di livello nell'acqua del canal maestro non sia stragrande, sì che obblighi a dare troppo grande altezza anche all'imposta, questa si potrà fare di sottil piastra di ferro o d'altro metallo, perchè sia eterna, e facile e puntualissima a maneggiarsi; non essendo giammai necessario che l'imposta abbia tanto di sopravanzo in altezza da poter servire a chiudere in qualche caso tutta la luce della cateratta; poichè se talvolta accader dovesse di aver a serrare tutta la cateratta per ascingare la gora o il rigagno, mentre corre acqua pel canale maestro, qualunque tavola in tal caso può agevolmente supplire a quest'uso. Ma checchessia del genere di serrame che si adopera alla cateratta, avendo essa le spalle nel descritto modo arcuate, e la piccola platea orizzontale a livello della soglia, non permetterà alla vena dell'acqua di fare la solita contrazione nè ai fianchi, nè al fondo, ma soltanto alla sommità, la qual contrazione troverà abbondante compenso in quella sesta parte di maggior luce che le fu data in paragone di quella del regolatore. Onde, secondo la descritta costruttura, potendosi avere anche nel più basso livello di norma delle acque correnti nel canal maestro quel battente sopra il ciglio della cateratta che compete al Regolatore, la luce di quella basterà sempre

a somministrare la debita copia di acqua a questo, ed anche più del bisogno a cagione della velocità fluviale che in parte potrà ritenere l'acqua nell'imboccare la cateratta, e più ancora se si vorrà alzare l'imposta di questa fino al livello di norma ed oltre. Ciò sia detto del modo di costruire la cateratta maestra, quando si miri a rendere, quanto si possa più, agevole e puntuale il movimento della sua imposta.

109. Il bottino, ch'è la gora o tronco di rigagno che riceve l'acqua dalla cateratta e la trasmette al Regolatore, ad altro non deve servire che a dar campo di sedarsi alle onde ed a qualunque movimento tumultuoso ed irregolare dell'acqua che sgorga dal canal maestro, affinchè venendo essa con diretto e regolare corso a dare nel sopracciglio del Regolatore, e quivi dall'intoppo trattenuta, tranquilla e senza moto alla sua libera superficie formi il genuino e giusto battente da cui deve dipendere la misura dell'acqua. A tal uso altro non si richiede che la molta sua capacità; onde si potrà far lungo almeno trenta metri, essendo lecito abbondare nella lunghezza quanto piace, poichè essa non esige che il collocare il Regolatore entro il rigagno, che si suppone già preparato, a tale o tal altra distanza dalla cateratta maestra; e gli verrà assegnata per ampiezza una sezione che equivaglia almanco a dieci sezioni del Regolatore. Se, per esempio, la luce di questo, misuratrice dell'acqua, sarà di metro quadro 0,36, la sezione del bottino non dovrà essere minore di metri quadri 3,60, abbondando in essa il più che si possa in profondità, nè mai facendola minore di quella che si fosse assegnata alla soglia della cateratta maestra ed a quella del Regolatore.

L'asse longitudinale del bottino corrisponderà al mezzo della cateratta e del Regolatore; non giova fare per esso sponde murate, ma basta al più che siano fra loro parallele, e con quella uniforme scarpa che piacerà di conceder loro. In generale, salva l'ampiezza del bottino, e la scoperta e libera superficie delle sue acque innanzi al Regolatore, tutte le altre avvertenze servono più alla regolarità della forma, che alla giustezza della dispensa dell'acqua; onde senza apprezzabile divario di questa, se le circostanze lo consigliano, si possono leggermente sorpassare.

110. Il Regolatore, ch'è propriamente il misuratore dell'acqua, consiste in un ristretto e breve tronco di canale con fondo orizzontale, di sponde piane verticali, egualmente alte in tutta la lunghezza e parallele fra loro; noi da ora innanzi daremo a questo canale il nome di doccia. La sua sezione rettangola sarà il prodotto dell'altezza nella larghezza; ma l'una e l'altra di queste due dimensioni potrà stabilirsi a beneplacito, purchè il loro risultamento sia

quello che si domanda: per esempio, vuolsi una doccia che abbia di sezione trentasei centesime parti di metro quadro, ciò sono $0^{met.},36$; se fosse per tornarci comodo il tenerla larga soltanto $0^{met.},20$, la faremo alta $1^{met.},80$; se in vece ci mette conto il darle una larghezza $= 0^{met.},30$, sarà l' altezza $= 1^{met.},20$; e se ci piacerà recare quella a $0^{met.},40$, prenderemo questa $= 0^{met.},90$; e così dicasi di altre. Stabilita in tal modo l' altezza della doccia, come più ci aggrada d' usarla, faremo la sua lunghezza tripla dell' altezza, o poco più o poco meno, giacchè qualche divario in questa misura non altera l' uffizio al quale è destinata. Ma tanto il fondo, quanto le sponde del Regolatore saranno inoltre prolungate nella parte anteriore per formare alla doccia una specie d' imbuto. La linea pertanto dell' una e altra sponda dovrà verso il bottino degenerare in un arco di cerchio, che si descriverà sopra un diametro perpendicolare al piano della respettiva sponda, ed eguale a cinque larghezze della doccia; i due archi di egual misura saranno troncati là dove lasceranno fra loro un' apertura doppia della larghezza della doccia medesima, riuscendo perciò la lunghezza dell' imbuto eguale ad una e mezza detta larghezza. Il fondo della doccia sarà per questa lunghezza continuato, anzi si stenderà oltre tanto quanto sarebbe un *decimetro* o due, formando un piccol batolo innanzi l' imbuto.

111. L' imboccatura di questo sarà incisa in un piano verticale, al quale riesca perpendicolare l' asse del bottino, e sia in tal modo direttamente opposto al movimento dell' acqua; esso formerà il prospetto del Regolatore, all' approcciamento del quale le sponde del bottino, se per avventura fossero troppo fra loro distanti, potranno piegarsi per avvicinarsi l' una all' altra, purchè vengano ad incontrare il piano del prospetto in distanza di qualche *decimetro* dall' imboccatura dell' imbuto. A questo si soprappone un coperchio ben saldato sopra le curvilinee sue sponde. Le sponde della doccia e dell' imbuto, il loro fondo ed il coperchio dell' ultimo dovranno presentare al contatto dell' acqua una superficie liscia, vale a dire senza notabili scabrosità.

112. Noi prescriveremo nel seguente capitolo la misura del battente; qui frattanto si suppone determinata. Ciò posto, in fine della doccia si dovrà alzare sul suo fondo una traversa tale che, stando l' acqua a giusto battente innanzi la fronte del Regolatore, si sollevi colla sua corrente entro la doccia fino a pareggiare l' altezza delle sponde. Imperocchè è da avvertirsi in questo luogo che senza l' intervento di questo freno, posto allo sbocco dell' acqua, essa velocitandosi entro la doccia, si disporrebbe colla suprema superficie in un piano inclinato, il quale per consegnente lascerebbe un voto nella doccia medesima; la traversa adunque fa empire questo

vano, obbligando l'acqua a correre colla superficie sollevata fino al livello delle sponde.

113. Rimane così compinto il Regolatore, il quale perciò comprenderà quattro parti, che sono il prospetto, l'imbuto, la doccia e finalmente la traversa. Fra queste la vera misuratrice dell'acqua sarà la doccia, che verrà empiuta dalla corrente pel descritto effetto della traversa; quindi si fatta maniera di Regolatore e sì fatto modo di misurare e dispensare l'acqua viene da noi detto = a piena doccia. = Fabbricato dunque a sito il Regolatore, ed attendendo che l'acqua del canal maestro si trovi a quel livello che, secondo i regolamenti o il contratto, dovrà prendersi per norma della convenuta dispensa d'acqua, l'architetto dell'opera incaricato, coll'intervento delle parti, determina alla prova del fatto, quanto voglia essere abbassata l'imposta della cateratta maestra sotto il pelo della corrente, e quanto debba tenersi alta sopra il fondo della doccia la prescritta traversa, perchè si ottengano insieme le due condizioni dello stabilito battente e della pienezza della doccia; la quale operazione è speditissima e di nessun imbarazzo, potendosi in questo aperimento usare una qualunque traversa posticcia per determinare la dovuta altezza da assegnarsi a quella che in forma stabile si fa poscia costruire. Può anche l'architetto, premesso il conveniente sperimento, far saldare a giusto sito l'imposta e stabilmente adattare la dovuta traversa allo sbocco della doccia, per verificare poscia, coll'accesso in luogo delle Parti e colle solita formalità, essere il tutto puntualmente eseguito secondo le regole ed a norma del contratto.

114. La macchina del Regolatore, secondo la premessa descrizione, riuscirà sempre di poca estensione, e potrà farsi, secondo le circostanze, di legno, di muro, di pietra o di marmo, e similmente ancora la sua traversa; questa per altro, meriterebbe essere o di duro marmo o di ferro, a fine di poterla terminare alla sommità in sottil costa per lasciare più libera all'acqua la caduta: la piccolezza di questa traversa, che rare volte oltrepasserà l'altezza di uno o due *decimetri*, permette di eseguirla in quel miglior modo che ci aggrada: nulladimeno se piacesse ancora di costruire in vece all'estremità della doccia un massiccio zoccolo di qualsivoglia grossezza in sommità, ciò è indifferente alla giustezza della sua funzione; solo converrà in tal caso avere presenti dua piccole avvertenze; l'una è di aggiugnere alla prescritta lunghezza della doccia quel tanto di più che dovrà occuparsi dalla grossezza della traversa, affinchè quella non venga talvolta troppo per questa a restrignersi; l'altra sarà la cautela colla quale, nel far prova per avventura della traversa posticcia per determinare la sua altezza, si userà presso a poco di quella medesima grossezza in sommità che si farà conto di dare alla

traversa stabile; perchè altrimenti potrebbe passare qualche piccola differenza fra la prova della traversa posticcia e l'effetto della stabile.

115. Aggiustate così le cose al pelo o livello di norma che hanno le acque nel canal maestro, sotto il quale succedendo che si abbassino ancora, il venditore dell'acqua non tengasi più obbligato a mantenere intera la competente quantità al compratore, questi avrà il suo a giusta misura, finattanto che la corrente nel detto canale conserverà il medesimo livello; ma alzandosi essa per le solite vicende che in certa stagione fanno gonfiare le acque de' fiumi, farà parimente crescere il battente alla cateratta maestra, e quindi al Regolatore; e perciò s'aumenterà la copia della dispensa, quando si lascino le cose nello stato in cui furono da principio collocate.

Se l'acqua, che nelle stagioni d'abbondanza cresce nel canal maestro oltre un determinato livello, riesce inutile e superflua al suo proprietario, ovvero questi non si cura di trarne profitto, nulla a lui importa che una parte si scarichi per le bocche di derivazione, ed aumenti la convenevole copia delle loro dispense, venendo così i rigagni subalterni a partecipare dell'affluenza del canal maestro, com'è ben natural cosa: questo è ciò che si pratica nel Milanese, dove si aggiusta a sito l'imposta della cateratta, quando le acque del canal maestro si trovano ad uno stabilito livello di norma; e quivi si salda, nè più si smuove per qualunque aumento che succeda nel fiume (Vedi il *Ragguaglio matematico*, facc. 41). Altrimenti se colui che ha la proprietà del canale può trar profitto anche da quella copia d'acqua che, secondo le vicende delle stagioni, vi corre oltre l'ordinario, ovvero oltre quella che corrisponde al convenuto livello, e non vuole perciò permettere che si disperda negli altrui rigagni, egli farà conto (art. 107) che le cateratte di questi abbiano a restringersi al crescere del fiume, e nuovamente a dilatarsi al suo sgonfiare, il che si ottiene con movimento d'imposte. Si potrebbe per tal effetto immaginare un'imposta, che renduta mobile per mezzo di macchina galleggiante, alterni i suoi movimenti con quelli del pelo fluviale, abbassandosi quando questo si alza, ed alzandosi quando esso di nuovo si abbassa, in guisa che, data alla cateratta l'opportuna forma, la sua luce col meccanico ordigno ora ristretta ed ora ampliata non avesse, in qualunque gonfiamento e successivo sbassamento del fiume, a dar passaggio che a quella copia d'acqua che bastasse a mantenere costantemente il medesimo battente innanzi al Regolatore. Ma questa macchina, che non potrebbe eseguirsi che di legno, sarebbe sovente sgangherata, e la dispensa dell'acqua verrebbe, tratto per tratto, sospesa: oltre di che simile ordigno facilmente si potrebbe per malizia dell'uomo sconcertare. Ai medesimi, ed anche a maggiori inconvenienti andrebbe soggetta una macchina che

rendesse galleggiante il piano in cui è scolpita la cateratta, affinchè questa, secondando col suo moto le variazioni del fiume, si mantenesse invariabile il suo battente. L' uso adunque di simili ripieghi non potrebbe essere che un infelice arzigogolo di qualche malconsigliato ghiribizzatore. Il proprietario adunque dell' acqua non ha altro spediente che il far muovere, secondo il bisogno, l' imposta della cateratta maestra per mano dell' uomo, affinchè quella venga alzata al crescere del fiume, e poscia di nuovo abbassata al suo calare, in guisa da conservare sempre invariabile l' altezza dell' acqua nel bottino ed inalterata la dispensa del fluido che si fa col Regolatore. Questo maneggiamento dell' imposta, a seconda delle vicende del fiume, viene supposto da tutti quelli che di simil modo di dispensa d' acqua hanno ragionato; ed a renderne appunto più agevole ed accurata la pratica, ove convenga di farne uso, sono dirette le avvertenze da noi date intorno alla costruttura della cateratta maestra e della sua imposta.

116. Nel caso in cui si prescinda dal regolare per mano dell' uomo l' imposta nelle piene del canal maestro, gioverà a piccola distanza dall' interno orlo delle sponde della doccia formare qualche rilevato che impedisca il trabocco e dispergimento dell' acque sovrabbondanti alla consueta misura.

Di ciò che convenisse di fare nella supposizione che le acque del canal maestro potessero abbassarsi anche sotto il livello di norma, e che allora dovesse, secondo i patti, diminuirsi in certa proporzione la dispensa dell' acqua, più acconciamente si parlerà in altro luogo, dopo che avremo stabilita la misura del battente che dar si debba al Regolatore, come passiamo ora a dichiarare.

CAPITOLO VII.

Del battente che convien dare al Regolatore per la dispensa dell' acqua = a piena doccia. =

117. Rammenteremo in questo luogo che il battente che si tratta di assegnare al Regolatore, sarà la differenza di livello fra la superficie dell' acqua renduta immobile avanti la fronte del Regolatore e la superficie dell' acqua corrente nella doccia. Questa differenza da noi espressa all' art. 90 colla lettera *a* dovrà per la maggiore semplicità della misura dell' acqua esser tale che le corrisponda l' unità di velocità, cioè dovrà essere (art. 67)

$$a = \frac{1}{2g} = \frac{1''.1''}{2 \times 9{,}80549''},$$

$1''$ denotando un sessantesimo minuto secondo, e ϑ quel tempo che piace di assumere per unità di misura: per lo che si vede che il prescrivere il convenevole battente alla macchina della dispensa d'acqua dipende dallo stabilire qual tempo prendere si voglia per unità di misura del suo genere. Pigliando il secondo minuto sessantesimo per tale unità, cioè facendo $\vartheta = 1''$, avremmo $a = 0^{\text{met.}},050992$. Qui però convien fare due osservazioni: 1.° che giova per la maggiore puntualità della dispensa il non fare il battente soverchiamente piccolo, perchè quanto esso è più debole, tanto nelle sue variazioni cagionate dal diverso livello delle acque del fiume, o da qualche difetto nel maneggiamento dell'imposta, o da checchessia altro, produce più di sconcerto nella giusta misura dell'acqua; 2.° che l'unità naturale della misura del tempo, e quella, la quale ha eziandio una stretta connessione coll'uso delle acque, egli è il giorno; ma non potendosi nell'affare presente prendere la sua durata per unità di tempo, perocchè darebbe immenso battente, egli è forza pigliare almeno una sua frazione che abbia con essa un semplicissimo rapporto, e tale che si possa rappresentare colla sola cifra dell'unità agli zeri aggiunta. A questa condizione non soddisfa il sessantesimo minuto secondo, perchè esso torna $= \frac{\text{giorno}}{86400}$. Se in vece del sessantesimo piglieremo il centesimo minuto secondo usato nella nuova divisione decimale del giorno, ch'è appunto la centomillesima parte della media durata di questo, vale a dire $= 0^{\text{gior.}},00001$, esso, come si vede, avrà una semplicissima ragione all'unità naturale del tempo, e negli usi delle acque potrà facilmente essere ad essa equiparata. Stando poi il centesimo al sessantesimo minuto secondo come $86400 : 100000$, vale a dire essendo $\frac{\vartheta}{1''} (= n) = \frac{86400}{100000}$, il che rende la $g = 7,31969$, si troverà il battente

$$a = \frac{1}{2g} = 0^{\text{met.}},068308.$$

Esso è alquanto maggiore del precedente, ed è perciò secondo la prima osservazione da preferirsi anche per questo motivo: sarebbe stato desiderabile che potesse riuscire eziandio un pochetto più grande per la ragione sopra addotta; ma ciò non è possibile, poichè volendo pigliare in cambio del centesimo minuto secondo un altro tempo per unità di misura, converrebbe prenderlo almeno dieci volte maggiore del detto centesimo secondo, affinchè conservasse l'indispensabile semplicità di rapporto coll'immutabile unità naturale, ch'è il giorno; ma prendendo un tempo dieci volte maggiore,

si otterrebbe un battente cento volte maggiore del ritrovato, cioè $= 6^{met.}$,8308, il che è affatto impraticabile, come per contraria e più forte ragione sarebbe impraticabile il battente $= 0^{met.}$,000683, che corrisponderebbe all' unità di tempo, quando questa si volesse prendere dieci volte minore del centesimo minuto secondo. Questo battente adunque da noi descritto $= 0^{met.}$,068308 vuol essere assolutamente preso per fondamento d'ogni dispensa d'acqua = a piena doccia =, nè da esso si può declinare.

118. Per quei casi nei quali è giovevole l' uso d' un battente maggiore, noi troveremo un ben semplice rimedio senza abbandonare questa norma fondamentale. Imperocchè dove le circostanze de' luoghi, ed il livello de' terreni e delle acque lo comporteranno, basterà usare il Regolatore a doppia, a tripla ed anche a quadrupla o maggior misura, vale a dire disporlo in modo che la sezione della sua doccia vaglia pel doppio, pel triplo, pel quadruplo o più di grandezza; col dargli un battente valevole a generare due, tre, quattro e più volte tanta velocità, quanta ne richiede la macchina a semplice misura. Il Regolatore adunque = a doppia misura = avrà il battente quattro volte maggiore del battente fondamentale, cioè $= 0^{met.}$,273232; il Regolatore = a tripla misura = vorrà un battente nove volte maggiore del predetto, cioè $= 0^{met.}$,614772; e quello = di quadrupla misura = lo esigerà sedici volte maggiore, che risulterà $= 1^{met.}$,092928, e con quest' ordine si potrebbe fare il Regolatore a vie maggior misura, coll' ingrandire più e più il battente a beneplacito. La qual cosa, oltre il rendere la dispensa dell' acqua meno soggetta alle vicende del canal maestro, ed a que' difetti che possono derivare da poco esatto maneggiamento dell' imposta; serve ancora ad impicciolire la macchina del Regolatore, ed a renderne più comoda ed agevole la sua costruttura.

119. Quando il livello di norma del canal maestro non fosse da regolamenti o da convenzioni stabilito ad un infimo pelo, sotto al quale non possano mai le acque malgrado la loro magrezza abbassarsi, e dovesse talvolta venir meno il battente al Regolatore assegnato, e con esso ancora la destinata copia dell'acqua; se nell' alienazione di questa non si fosse stipulato quanto diminuire si dovesse il battente a misura che l' acqua del fiume si abbassa sotto il livello di norma, ma avesse in tal caso a lasciarsi l' imposta della cateratta maestra al suo sito, perchè il battente del Regolatore facesse spontaneamente quel calo che fosse consono allo sbassamento del canal maestro, e si considerasse che il meno di acqua in tale stato di scarsezza del fiume o canal maestro vada in compenso di quella che; oltre la conveniente misura, riceve l' acquistatore, quando per l' abbondanza del medesimo canale cresce il battente: siccome in tal caso mette sempre conto al

compratore dell' acqua l'usare il Regolatore a doppia, a tripla od a quella maggiore misura che le circostanze de' luoghi permettono, affinchè il forte battente gli renda bensì minori gli aumenti d'acqua nelle piene, ma gli faccia altresì meno discapitare nella magrezza del fiume, nel qual tempo ogni porzione d'acqua è assai più preziosa che nella stagione dell'affluenza; il venditore dal suo canto potrà avere ciò in considerazione nel contratto per concedere o negare il Regolatore a doppia o tripla misura, ecc., o vero per fissare in ogni supposizione il livello di norma tanto alto, che il più col meno dell'acqua che ne' varj stati di copia e di scarsezza del fiume si deriva, venga a suo giudizio a compensarsi non a stima di materiale quantità, ma a ragione di apprezzabile valore.

120. Diversamente se, prescritto da regolamenti o da contratti il livello di norma, fino al quale il venditore guarentisce la stipulata quantità d'acqua al compratore, si convenisse nel resto, che calando il canal maestro sotto il disegnato pelo, si dovesse coll' adattamento dell' imposta procurare una diminuzione tale di battente al Regolatore che facesse presssppoco calare l'acqua della doccia in proporzione dello scemamento che soffre la copia del canal maestro nell' abbassarsi sotto il pelo di norma, il che sarebbe più consentaneo ai generali principj di giustizia, allora si renderà necessario il dividere il battente di su in giù in dieci parti nel seguente modo: l'altezza sua si riporta su qualche regolo, e si divide in cento particelle eguali; poi notando zero alla sua sommità, e discendendo sotto di essa pel tratto di 19 particelle, quivi si segna n.° 1; calando a basso per altre 17 particelle, si noterà il segno 2, e sotto altre 15 si porrà il 3, poi il 4 sotto altre 13; e così seguitando a discendere secondo i numeri dispari 11, 9, 7, ecc. di tali particelle, si andrà segnando a sito i numeri 5, 6, 7, ecc. Questa scala di segnali 0, 1, 2, 3, 4, ecc. sarà ricopiata e descritta sul battente del Regolatore, discendendo per ordine d'alto a basso. Quando l'acqua del canal maestro abbassandosi sotto il livello fondamentale e di norma si stimerà indigrosso calata nella sua coppia a detto livello competente di una decima parte, si farà col maneggiamento dell' imposta discendere il battente del Regolatore al n.° 1 sotto lo zero; quando il calo del fiume sarà all'incirca reputato di due decimi, il battente si dovrà ridurre al segnale n.° 2; poi al n.° 3, al n.° 4. ecc. quando si considererà calata di tre, di quattro decimi, ecc. l'acqua del canal maestro in paragone di quella che ci corre quando il pelo si trova allo stabilito livello fondamentale. Al che si renderà necessario il porre nelle sponde del canal maestro i segnali corrispondenti alle considerate diminuzioni del corpo di acqua corrente: e qualora in questa determinazione si voglia seguire una regola meno soggetta a falli, la

almeno dove si tratti di acqua molto ne' suoi usi preziosa, si formerà al principio del canal maestro una specie di Regolatore pel tratto di otto o dieci metri con fondo orizzontale e sponde verticali e parallele, prolungate alquanto superiormente in forma arcuata per impedire la contrazione della vena; e verso l' estremità inferiore di questo tronco regolare di canale, a lato di una sponda si noterà il segno al quale corrisponde il livello di norma ovvero pelo regolatore dell' acqua, ponendovi lo zero; indi presa l' altezza di questo pelo sopra il fondo del canale, si praticherà ad essa la medesima operazione prescritta qui sopra pel battente del Regolatore, vale a dire, divisa quella in cento parti eguali, si segnerà n.° 1, discendendo per 19 di tali particelle sotto lo zero; poi n.° 2, calando altre 17; e così di seguito compiendo la scala, come venne suggerita per la divisione del battente. Questa meriterà il nome di *idrometro* del canal maestro, assai più che gli altri a simil uso destinati, poichè esso additerà la copia dell' acqua che corre pel canale, a misura che si va abbassando sotto il pelo di norma, con quella maggiore approssimazione del vero che la natura della cosa permette. Quando pertanto il sopracciò incaricato di regolare la dispensa dell' acqua vede calare il pelo del canal maestro al n.° 1 sotto lo zero, il che indica che gli manca incirca una decima parte della sua acqua, abbassando l' imposta della cateratta maestra, fa parimente discendere il battente del Regolatore al n.° 1 sotto il suo zero; quando la corrente del canal maestro segna il n.° 2 al suo *idrometro*, si fa similmente calare al n.° 2 il battente del Regolatore, e così del resto. Questa è l' unica maniera che si può porre in pratica, quando si cerchi di diminuire l' acqua che si dispensa in quella misura pressappoco in cui va scemando la copia del fluido nel canal maestro all' abbassarsi che fa sotto il convenuto pelo regolatore della dispensa.

Solo convien qui avvertire che almeno, mentre s' aggiusta a sito l' imposta, vuolsi con qualche aggiunta di traversa o di ostacolo a questa accoppiato far sì che l'acqua corrente empia la capacità della doccia; dico almeno mentre si aggiusta a sito l' imposta, poichè la maggiore accuratezza richiederebbe che si lasciasse alla traversa la nuova giunta d' altezza, affinchè l' acqua seguitasse a correre a piena doccia, ma in questa sorta di scompartimento la pratica può accontentarsi di una certa approssimazione alla vera misura, purchè questa sia la medesima per tutte le bocche che tirano acqua dal medesimo canale.

Questa specie di Regolatore da noi qui suggerita pel canale maestro meriterebbe di essere costruita su tutt'i grandi canali artificiali; poichè, qualunque sia l' uso della loro acqua, giova sempre il poter conoscere l' aumento o decremento della sua quantità; ed è sì

semplice la sua costruttura e sì poca la spesa, che anche a solo lume e soddisfazione dell' arte idraulica si dovrebbe almeno dai Governi far eseguire sopra le acque pubbliche che corrono per simili alvei. Tale provvidenza, lodevole per qualunque acqua, si rende per alcuni canali necessaria, quali per esempio sarebbero ne' nostri contorni la Muzza ed il Canal civico di Cremona, i di cui rigagni debbono essere in certe stagioni regolati secondo lo stato di scarsezza del canal maestro; ma sì belle opere non si possono sperare che al lungo volger degli anni (*).

(*) Quanto io trovo giusta la divisione dell' altezza del battente per formare l' idrometro del regolatore, altrettanto mi sembra erronee che si abbia da ripetere questa medesima divisione nell' altezza del livello di norma sopra il fondo del canale, per costruire l' idrometro di quest' ultimo.

L' acqua che scorre per la doccia del regolatore si muove in un canale di fondo orizzontale, e di sezione costante; e viene incitata al moto della pressione predotta da un battente formato dall' acqua contenuta nel bottine. Quindi è che la portata di questo regolatore dipende unicamente dalla velocità colla quale l' acqua scorre per la doccia, e questa è mai sempre dovuta all' altezza del battente. Ma l' acqua che ha corso nell' alveo del canale, benchè ridotto nel suo principio ad una specia di regolatore, e col fonde orizzontale, non si muove già in grazia della pressione di un battente, e non mantiene costante la sua sezione la quale varia col variare dell' altezza dell' acqua sopra il suo fondo. Come si potrà dunque dire che l' idrometro del canale debbe risultare dall' altezza delle sue acque, nel modo stesso che quelle del regolatore risulta dal suo battente? Come si potrà dimostrare, che abbassandosi l' acqua per $\frac{19}{100}$ dell' altezza del livello di norma, viene a diminuire di un decimo la portata del canale? Se la velocità dell' acqua che scorre per il medesimo fosse dovuta a quest' altezza, lo che non è certamente, si diminuirebbe la portata di un decimo per quell' abbassamento, ma richiederebbesi ancora che la sezione si rimanesse invariata, e invece essa varia coll' altezza del livello di norma.

Sembra a me di poter dimostrare, che per costruire l' idrometro del canale, ridotto già per un qualche tratto a fonde orizzontale e colle sponde verticali, si debba dividere l' altezza del pelo di norma sopra il fondo del medesimo in dieci parti eguali, ciascuna delle quali corrisponderà alla decima parte della quantità d' acqua che per esso scorre. Infatti dall' equazione (O) §. 39. della citata mia memoria risulta, che la velocità media dell' acqua per un alveo a fondo orizzontale, è sempre costante, ed indipendente dall' ampiezza delle sue sezioni, dunque la portata di quest' alveo sarà proporzionale all' area della sezione; e se di codesta sezione si mantiene costante la larghezza, essa portata varierà in proporzione dell' altezza dall' acqua sul fonde dell' alveo. Ecco pertanto dimostrato, che l' idrometro del sig. Tadini debbe dividersi in dieci parti eguali, notando zero nel punto cui corrisponde il livello di norma, e progredendo coi numeri naturali, 1, 2, 3, ec. come egli soggiunge.

Due sole osservazioni piacemi quivi d' aggiungere, a compimento della nota presente. La prima si è che la lunghezza di quel tratto di canale cui si dovrà

121. La fabbrica di cui parliamo, non dovendo cagionare nè alzata, nè caduta d'acqua, non è d'alcun impaccio alla navigazione. Per dire poi una parola anche di questa, ritornando sul proposito di scemare in certi casi il battente e la copia d'acqua ai rigagni quando cala la corrente nel canal maestro, se questo sarà navigabile e secondo i regolamenti, avrà a mantenersi perenne la sua navigazione in qualunque stato di magrezza d'acqua; a scapito ancora de' derivati rigagnoli si dovrà nell'ultimo tronco di quello segnare il minimo pelo dell'acqua alla navigazione necessaria; e quando nelle siccità cominciasse la corrente a calare sotto tal livello, il custode di tutte le superiori bocche de' rigagni, maneggiando le imposte, fa calare a tutt'i loro Regolatori il battente al primo segnale del n.° 1; se ciò non basta all'intento della navigazione, lo fa discendere al n.° 2, al 3, al 4, ecc., secondo che esige la perennità della navigazione fino all'ultimo tronco del canal maestro.

122. Nel terminare questo capitolo osserveremo che noi abbiamo espresso la misura del battente con sei cifre decimali, ma solo per metodo, perchè è dedotta dalla caduta de' gravi, anzi dalla lunghezza del pendolo che batte i centesimi minuti secondi alla latitudine di Milano, la qual lunghezza si determina fino alla precisione di sei cifre decimali; per altro nell'affare delle acque basta al più giugnere alle millesime parti del metro, onde il battente si potrà esprimere $=0{,}068$; e quando piacesse la massima di abbondare alquanto nella pratica, si potrebbe recare al numero rotondo $=0{,}070$, nel qual caso il compratore avrebbe per l'accresciuto battente il vantaggio di un settantasettesimo circa di acqua più della rigorosa misura, il quale gli servirebbe di abbondante compenso per quell'inevitabile discapito che soffre per un movimento di palpitazione o di ondeggiamento, che si scopre sempre nell'acqua corrente la più regolare, e che facendole perdere alquanto di velocità, produce qualche lievissimo scapito nella quantità del suo efflusso.

---

formare col fondo orizzontale e colle sponde verticali, debb'esser tale per cui venga spenta affatto la velocità cagionata dalla pendenza dell'alveo superiore, e debbe procurarsi che l'acqua per esso scorra con moto uniforme e permanente, e col livello paralello al fondo. La seconda è, che non sarà necessario che le divisioni dell'idrometro progrediscano oltre il livello del lembo superiore della luce del regolatore, perchè giunto quivi che sia il pelo del canale maestro, cessa di per se stessa l'erogazione della doccia a bocca piena.

CAPITOLO VIII.

Si rende ragione della costruttura del Regolatore = a piena doccia =, e si dà a conoscere la sua perfezione, additandosi ancora i varj usi di simil macchina.

123. Dei suggerimenti dati per la costruttura della cateratta maestra e del bottino che precedono la macchina del Regolatore abbiamo a suo luogo renduta ragione, ove questa per avventura non fosse stata per sè stessa abbastanza palese; rimane adunque a doversi dimostrare la convenienza di quanto è stato prescritto per la fabbrica del Regolatore, ed a dire della sua perfezione e degli usi ai quali simil arnese può servire.

Il prospetto del Regolatore affronta il movimento che ha l' acqua nel bottino, affinchè questa dando nell' opposto ostacolo perda in superficie ogni moto e formi il giusto battente; e conciossiachè può giovare il segnar questo a fianco dell' imboccatura nel Regolatore aperta, anzichè a piombo sopra di essa; per essere ivi l' acqua meno soggetta a commovimento, le sponde del bottino si tengono alquanto distanti dai labbri di quella. L' imbuto impedendo in parte la contrazione della vena, ed in parte correggendola entro il suo recinto, guida la corrente a secondare col suo moto le sponde della doccia. Le sponde dell' imbuto sono formate in archi di cerchio, perchè questa figura è facilissima a disegnarsi; per altro qualunque linea di dolce ed uniforme curvità può servire all' uopo, anzi tanto meglio quanto avrà men rapida curvezza; e perciò la circolare medesima, parlando a rigore, riuscirà tanto migliore, quanto sarà con maggiore diametro descritta, salva la condizione di prolungare gli archi a segno che formino abbondantemente larga imboccatura all' ingresso dell' acqua, e di descriverli in modo che, dove si uniscono colle sponde della doccia, la linea di queste sia ad essi tangente. Noi pertanto volendo bensì largheggiare in queste misure, ma senza dar troppo nel soverchio, abbiamo assegnato all' imboccatura dell' imbuto la doppia larghezza della doccia, e diamo ad esso $\frac{3}{4}$ di tale imboccatura per sua lunghezza; onde la larghezza della doccia essendo = 1, la lunghezza dell' imbuto si piglia = $1\frac{1}{2}$, e la sua larghezza all' ingresso dell' acqua = 2; il che si ottiene descrivendo nell' indicato modo l' arco con un diametro eguale a cinque larghezze della doccia. Se taluno non avesse in mira di usare nella dispensa dell' acqua tutto quel grado di esattezza che l' arte può procurare, ma si accontentasse di quella precisione che, senza essere scrupolosissima, non fosse però aliena da una pratica plausibile, potrebbe

formare l' imbuto a sponde rettilinee; ma allora si renderebbe necessario l' allungarle tre o quattro volte più della suggerita misura.

124. L' imbuto si cuopre per impedire che l' acqua trabocchi, e per determinarla a prendere in superficie una direzione orizzontale qual è quella dal coperchio, correggendosi così l' inclinazione di su in giù, che all' ingresso soffre per effetto di contrazione di vena che su questo verso le viene permessa. Essendo il fondo dell' imbuto piano ed orizzontale, ma più alto del cupo fondo dal bottino, succederà contrazione di vena anche in questa parte, pigliando i fluidi fili al loro entrare nell' imbuto un piegamento all' insù; ma ben tosto al restringersi dell' uscita saranno costretti a ripiegare verso il fondo, ed a lambire col loro movimento il piano di questo; nulladimeno si prolunga alquanto il fondo dell' imbuto oltre il piano del Regolatore, non tanto per dare qualche maggior campo al raddirizzamento de' fluidi capelli, quanto perchè quell' onda o salto dell' acqua che lo precede, segua fuori dell' imbuto, ed entri il fluido in questo, ed indi nella doccia con movimento più tranquillo e regolare, condizione importante per la giustezza della sua misura.

125. La doccia ha fondo orizzontale e sponde piane perpendicolari d' eguale altezza e parallele fra loro per maggior semplicità di sua forma e facilità di misura della sua corrente, come tosto vedremo.

126. La parte in certa guisa principale del Regolatore può dirsi che sia il più piccolo suo pezzo, cioè la traversa. Essa obbliga l' acqua ad alzarsi nella doccia tanto quanto basta per empirla, operando in opposto modo a questo vaso quel che fa la rasiera allo staio; poichè questa levando il colmo, e quella il voto, rendono ambedue la misura piena e rasa: qui però non si mira soltanto ad ottenere questa pienezza di vaso, ma a far prendere ancora alla corrente in superficie un movimento di direzione orizzontale e parallela al fondo della doccia. E conciossiachè a piccola distanza dalla traversa l' acqua è costretta a sollevarsi alquanto, e formare un piccol dosso per la piega che prendono le fluide vene vicino al contatto dell' ostacolo, affinchè nel rimanente della doccia la superficie dell' acqua rimanga spianata e senza sensibile inclinazione, si dà alla doccia medesima un' abbondante lunghezza, tripla cioè della sua altezza, mentre potrebbe bastare anche una sola metà, non arrecando apprezzabile spesa, nè disturbo il largheggiare in sì piccola cosa.

La traversa non servendo che d' intoppo all' acqua sgorgante dalla doccia, affinchè questa venga dalla corrente empiuta, egli è chiaro che qualunque altra foggia di ostacolo posto al confine della doccia, potrebbe prestare il medesimo servigio.

127. Mercè di questa meccanica noi ottenghiamo nella doccia una corrente compresa fra quattro superficie piane, che sono due sponde

perpendicolari e paralleie fra loro, e fondo e superficie suprema orizzontali; quindi si avverano in essa le condizioni negli articoli 86, 87, 88 e 89 dichiarate: e poichè nel far uso del battente $a = \frac{1}{2g}$ noi le abbiamo conciliato la velocità eguale all' unità di misura del suo genere (art. 90. e 117), non solamente essa si moverà nella doccia a guisa di solido parallelepipedo squadrato (art. 91.), di cui non vi ha forma più semplice e più acconcia alla facile e puntual misura, ma questa inoltre ci verrà distintamente significata dall' ampiezza medesima o sezione della doccia, di modo che se la sezione della doccia in metri quadri espressa sarà per esempio = $0^{met.}$,36, vale a dire trentasei centesimo di metro quadrato, la quantità dell' acqua che si dispensa con questa doccia ogni centesimo minuto secondo (ch' è l' assunta unità di tempo), sarà in metri cubi = $0^{met.}$,36, che voglion dire 36. migliaia di metri cubi al giorno, ch' è l' unità naturale di tempo a tutti notissima e famigliare. Egli non è possibile immaginare altro modo di dispensa e di misura d' acqua più semplice ed insieme più puntuale e più certo di quello che si ottiene col descritto Regolatore = a piena doccia = dall' esatta geometria suggerito.

128. Ma diamo qualche occhiata ancora alle felici circostanze che si combinano in questo uso. Esso lascia in nostro arbitrio il dare alla doccia più o meno d' altezza o di larghezza, secondo che o per la condizione de' siti, o per la maggiore facilità della costruttura, ci tornerà più comodo l' abbondare nell' una, anzichè nell' altra di queste due dimensioni, salva sempre la geometrica certezza della giusta misura dell' acqua che ne risulta; il che non è in verun' altra pratica permesso. Esso, più che qualunque altro usato modo riesce opportuno pe' luoghi di scarsissima declività, a motivo del piccol battente o caduta d' acqua di cui si accontenta; nè gli arreca pregiudizio o imbarazzo il ringorgo delle acque inferiori, poichè questo coopera anzi a facilitare l' empimento della doccia, facendo in parte la funzione della traversa. Dove poi la declività de' terreni lo acconsente, usando il Regolatore a doppia, e tripla, ecc. misura, eccoci in vece un battente forte quanto ci piaccia per rendere la dispensa dell' acqua poco o nulla soggetta alle vicende del canal maestro, anche nel caso che non si maneggi all' uopo l' imposta della cateratta maestra, o il suo maneggiamento fosse per avventura meno esatto, e per ridurre la macchina del Regolatore, per sè stessa sempre piccola, ad un grado vie maggiore di piccolezza e di più agevole fabbrica.

La sezione della doccia, ch' è quella che determina la misura della dispensa, si piglia al suo principio, vale a dire al confine dell' imbuto, e qualche piccola disuguaglianza di grandezza, che avesse in

più o in meno nel rimanente suo corpo, farebbe soltanto che l'acqua alla superficie prendesse tanto o quanto di declività o di acclività per avvallarsi fra le sponde o per superarle, formando perciò un angolo coll'orizzonte, il quale avrà per tangente una piccola quantità *m* positiva o negativa; ma questo non altera in modo alcuno apprezzabile la quantità della dispensa (art. 89). Per la medesima ragione, il tenere la traversa alquanto più alta o più bassa del dovere, sì che ne derivi qualche piccol grado d'inclinazione nelle superficie della corrente, non produce sensibile divario nella misura dell'acqua; il che mostra che in questa macchina tutto cospira alla giustezza del suo uso.

Questo genere di misura non solo è soddisfacente pel rigido geometra che apprende la forza di sua dimostrazione, ma esso appaga ancora l'occhio del compratore idiota, perchè questi vedesi dato il suo a piena e rasa misura, come si compra il grano a raso staio, e conosce che non vi ha tanta puntualità e sicurezza nel misurare i liquori che si vendono a boccali o a metadelle, quanta nella dispensa della sua acqua si usa. Egli può ancora con facilità, se gli piace, far prova colla sperienza della velocità che un tal battente genera nell'acqua, eseguendo lo sperimento nel suo gabinetto con un piccolo e manesco Regolatore che versi l'acqua in un ampio vaso; imperocchè questo genere di sperienze riesce egualmente esatto coll'uso di una grande, che di una piccolissima macchina. Egli inoltre al Regolatore, che serve per la sua dispensa d'acqua, osservando i galleggianti sommersi a diverse profondità nella corrente della doccia, può assicurarsi col testimonio de' proprj occhi che il corso dell'acqua è il medesimo da cima a fondo, e che perciò il fluido si muove a guisa di un corpo solido e di forma parallelepipeda.

129. E non è qui da passare sotto silenzio che la sezione medesima del Regolatore, la quale esprime da sè stessa la quantità dell'acqua che tramanda, rappresenta ancora al coltivatore l'estensione dell'adacquamento dei campi cui può in un giorno servire. Imperciocchè da diverse osservazioni da me fatte o da altri raccolte risulta, che ne' terreni che offrono all'acqua un'ordinaria penetrabilità mille metri cubi di quella, quando se ne lasci disperdere men che si possa negli scoli, bastano ad irrigare una superficie di dieci mila metri quadri, che formano appunto una metrica *tornatura*. In fatti uno strato di fluido alto un *decimetro* penetrando tosto un letto di terra alto due *decimetri*, lo inzuppa talmente che lo rende poltiglioso e liquido; onde esso diffonde poscia l'umidità anche a profondità maggiore, il che ne' nostri climi è sufficiente a mantenere per quindici giorni nella state il necessario umore alle novelle biade, rinnovandosi secondo il solito l'adacquamento due volte al mese. E in vero talvolta nel

euore della state piove quanto basta per risparmiare ai campi gli artifiziali innaffiamenti, pure o non mai, o radissimamente accade che in un mese estivo tanta acqua venga dal cielo, che pareggi un'altezza di due decimetri; nè il calore estivo giugne a succhiare tanta copia di umore dall'acqua medesima esposta ai raggi del sole. Ora la sezione del Regolatore per ciascheduna centesima di metro quadro rende mille metri cubi di acqua al giorno, conseguentemente quante centesime essa contiene, tante metriche *tornature* al giorno si possono irrigare coll' acqua che somministra; per esempio la sezione del Regolatore sia = o$^{met.}$,36, e metriche *tornature* 36 si potranno in un giorno colla sua acqua innaffiare; onde la sezione medesima del Regolatore significa al suo possessore l'estensione del praticabile adacquamento. Il coltivatore, attenendosi a questo semplicissimo principio, e facendo ancora, ove occorra, a' suoi risultamenti quelle modificazioni che fossero alle particolari circostanze degl' irrigui campi consentanee, troverà sempre in esso una norma fondamentale che lo renderà accorto sopra il suo interesse, affinchè non permetta che nell' irrigare i terreni una parte preziosa della sua acqua venga inutilmente dissipata.

In generale poi la più esatta cognizione della quantità de' campi che con una certa copia d' acqua si possono innaffiare secondo la qualità de' climi, de' terreni e del genere di coltura, compresa anche quella de' risi che addimanda una innondazione perenne, non a riprese come le altre, non si potrà conseguire se non dopo che verrà posto in uso il descritto Regolatore a piena doccia, il quale dà sempremai a conoscere con certezza la vera e puntuale misura della copia d' acqua che si tramanda pel rigagno e che da esso si diffonde sopra le irrigue terre; il che non si ottiene con verun' altra pratica di dispensa d' acqua finora usata, come abbiamo a suo luogo dichiarato.

130. Quanto si dice dell' uso dell' acqua per irrigare i campi, vale per qualunque altra sua adoperazione dipendente dalla maggiore o minore sua massa, come per muover macchine in ogni sorta d' idraulici edifizj; di maniera che il Regolatore solo potrà con accertatezza dirci la copia d' acqua che in qualsivoglia circostanza bisogna impiegare pel movimento di qualunque macchina, a fine di farci risparmiare il superfluo che inutilmente andrebbe perduto, onde esso potrà divenire la norma generale d' una vantaggiosa e saggia economia delle acque.

131. Per parlare d' altri vantaggi del Regolatore, faremo osservare che l' utilità sua non si stenderà solamente a que' rigagni, la cui dispensa d' acqua si faccia d' ora innanzi con tale ordigno, ma potrà altresì facilmente accomunarsi a tutti quelli, la cui derivazione si

pratica cogli imperfetti moduli che abbiamo descritti, i quali lascino generalmente ignorare ai proprietarj la vera quantità dell'acqua che posseggono. Imperocchè ciascun di questi per conoscere con tutta puntualità la vera copia dell'acqua che gli viene dispensata col modulo milanese, cremonese, mantovano o altro, non ha che a fare un momentaneo sperimento, adattando in qualche sito un posticcio Regolatore di legno al suo rigagnolo, ed applicando al confine della doccia l'un sopra l'altro diversi piccoli legnetti finchè quella si empia; poichè allora osservando fin dove si alza e si mantiene costante il battente dell'acqua, da questo e dalla nota sezione della doccia ricava sul momento in metri cubi la giusta quantità dell'acqua che a lui rende la bocca modellata secondo la tale o tal altra pratica del paese; atteso che, data l'altezza del battente in metrica misura, e pigliata la sua radice quadra, che noteremo (B), segnando S la sezione della doccia, sarà $\frac{(B)S}{0{,}26135} = 3{,}8262\,(B)\,S$ la quantità d'acqua espressa in metri cubi che il suo rigagno riceve dal modelo milanese o altro che sia nel tempo di 1'' centesimo: il numero rotto 0,26135 è la radice quadra del battente 0,068308 dovuto alla velocità = 1. Per esempio la sezione del posticcio Regolatore collocato sopra il rigagnolo è di dodici centesime, cioè S = 0,12, l'acqua alla fronte della macchina si alza a segno di formarvi un batente = 0,36, la cui radice (B) = 0,6; la quantità dell'acqua che corre pel rigagno in 1'' sarà di metri cubi $3{,}8262 \times 0{,}6 \times 0{,}12 = 0{,}2754$ (prese quattro sole cifre decimali), vale a dire il rigagno, e conseguentemente la bocca rispettiva all'uso del paese modellata somministrerà ogni giorno 2754 metri cubi di acqua.

In questa guisa si può con facilità sapere la vera quantità d'acqua che rende ogni modulo secondo le diverse pratiche di dispense d'acque, e conoscere in conseguenza gli svarj ai quali può essere soggetto per la diversa grandezza e forma or più, or meno bislunga che gli viene data, e per tutte le varie circostanze in cui si trova secondo la diversa copia dell'acqua che vuol dispensarsi e giusta la pratica di ciascun paese. Egli è questo il modo di venire in cognizione di tutte le ineguaglità a di tutti i falli che nelle dispense d'acqua ora in più, ora in meno, ed a danno quando di chi compra e quando di chi vende l'acqua; si commettono cogli usi difettosi che altrove abbiamo descritti. Un Regolatore di certa grandezza può servire alla misura di poca e di molt'acqua, secondo che le circostanze del rigagno, per cui discorre, permetteranno di dargli più o men forte battente; se questo può ottenersi di circa sei decimetri, che corrisponde a quello della macchina a tripla misura, un Regolatore capace di 36 centesime d'acqua, che equivarranno circa a dodici once d'acqua

del modulo milanese a libera cascata, può rendersi portatile ad un uomo. Ne' paesi ove si fa grande e prezioso uso d'acqua pei bisogni civili e campestri, il Perito non dovrebbe trovarsi sfornito di una o due di tali macchine per usarle ovunque si richiegga a lume de' possessori dell' acqua.

132. Questa macchina non solo si rende giovevole ai proprietarj delle acque col dar loro a conoscere la vera quantità di queste e col renderli accorti sull' economico e vantaggioso loro uso, ma apre inoltre un vasto campo agl' idraulici sperimentatori per eseguire d'ora innanzi in grande e con molta facilità le sperienze intorno alla velocità e copia d'acqua che si tramanda o per via di cateratte diverse di forma, di grandezza, di battente, o per mezzo di canali di varia altezza d'acqua, e di fondo o di superficie comunque inclinati, ed in ogni altra qualunque circostanza che alterar possa il corso dell' acqua ed indurre differenza nella quantità del suo efflusso. Imperocchè se fino ad ora questo genere di sperimenti si rende difficilissimo, perchè obbliga a formare un grande catino che riceva tutta la copia dell' acqua dalla cateratta o dal canale versata, ed a misurarne con esattezza la capacità, ed a dover inoltre ripetere più e più volte la medesima sperienza per emendare quegli errori che nascono dall' essere or più or men concertato ed esatto il tempo con cui si dà e si toglie l'acqua alle bocche, il che pone in necessità di far ad ogni ripresa votare a braccia d' uomini e colle pale il grande bacino, quando la situazione dei luoghi non offra all' acqua una spontanea uscita dal profondo vaso, accidente assai raro a verificarsi; quind' innanzi, senza aver punto bisogno di scavare ampj bacini e senza tante faccende, basterà in un solo sperimento far che l' acqua sgorgata dalla cateratta o dal canale che si vuol mettere alla prova, passi per un posticcio Regolatore, formando battente alla sua fronte; poichè da questo e dalla data sezione di quello si ritrae nel sopraricato modo (art. 131) con somma accuratezza la quantità dell' acqua che trapassa: sicchè per ogni variata misura o circostanza di cateratta o di canale non si richiede che un solo sperimento di pochi minuti, a fine di determinare la giusta copia di fluido che si ottiene, e con essa gli accidenti che soffrir deve la sua velocità. Onde coll' uso di tal machina verremo in cognizione del come e quanto ogni diversa circostanza di cateratte e di canali influisca sopra il corso dell' acqua e ne temperi il suo efflusso.

133. Dalle cose finora dette si comprende quanto l' arnese, di cui parliamo, e nell' uso delle dispense d' acque, e nell' arte di esprimentare possa rendersi dell' idraulica conoscenza benemerito; esso lo sarebbe assai più ancora se si avesse il coraggio di applicarlo al corso di qualche fiume per assoggettare a certa misura la sua portata in

paragone dell' ampiezza e qualità, non che del clima del paese che gli tributa le sue acque; per esplorare tutte le sue vicende, e per determinare ogni accidente del suo corso ne' diversi stati di maggiore o minore altezza d' acque; cognizioni che somministrano fondamentali documenti della scienza de' fiumi. Noi abbiamo già parlato altrove di una specie di Regolatore adattabile ai grandi canali artifiziali; tal sarebbe pressappoco da applicarsi anco a qualche fiume: la sua fabbrica consisterebbe nel ridurre un brevissimo tronco di canale ad una forma stabile e regolare con fondo piano ed orizzontale, con sponde verticali e fra loro parallele, le quali con dolce ed opportuna curvità all' insù prolungate formando imbuto, andassero ad unirsi alle ripe naturali del fiume; quando l' edifizio del Regolatore non restringesse d' assai l' alveo di questo, ed il fondo dell' uno fosse a livello pressappoco dell' altro, come supporremo, la superficie della corrente sarebbe naturalmente abbastanza piana ed orizzontale, onde non farebbe mestieri della traversa allo sbocco della gran doccia: non sarebbe praticabile il coperto dell' imbuto, ma non è tampoco necessario, correndo qui le acque da loro medesime spianate in superficie senza pericolo di trabocco. Qualche ostacolo che si sporgesse alquanto fuori di una sponda, e presentasse al corso dell' acqua, che gli viene a dar dentro, una resistenza tale da farle perdere al suo contatto ogni movimento in superficie, servirebbe a dare a conoscere il battente da cui dipende la velocità della corrente: anche l' uso della canna ricurva di Pitot, munita al suo angolo di una lastretta di metallo, la quale non lasci l' ingresso all' acqua che per un piccolo forellino, escludendo così ogni ondeggiamento di quella, basterebbe a somministrare il genuino battente: dato il quale, e data l' altezza dell' acqua nel Regolatore, e quindi la sezione della corrente nella gran doccia fluviale, mediante l' espressione additata all' articolo 131 rimane determinata la quantità di fluido che trascorre pel fiume in tale stato d' acqua; e così tanto in acque scarse, quanto in abbondanti ed in ogni piena si potrebbe avere la giusta misura della fluida copia che scorre per l' alveo fluviale; dico la giusta misura, poichè sebbene l' acqua, che lambe il fondo della doccia, potrebbe partecipare alquanto di quel piccolo ritardo che soffrisse nell' alveo naturale, questo in simil genere di osservazioni serebbe di poco sprezzabile valore in acque scarse, e di nessuna considerazione in acque copiose. Non tralasceremo qui di dire che quando la lunghezza e le circostanze del Regolatore permettessero di determinare immediatamente per mezzo di galleggianti la velocità della corrente in superficie, la cognizione di questa supplirebbe alla ricerca del battente, come ognuno può facilmente comprendere.

Anche una sola di queste macchine sopra qualche fiume costruita

sarebbe il più utile arnese che l'arte idraulica potesse in suo sussidio desiderare. Se Vitruvio fosse stato architetto idraulico come fu sommo architetto civile, e conoscendo la vasta utilità di tale edifizio avesselo proposto ad un Giulio Cesare o ad un Augusto come opera degna delle loro imprese, questi saggi e potentissimi Principi, e massimamente il primo, vero domatore de' fiumi, avrebbero avuto cuore di farla eseguire non che sul Tevere, ma sul Po; nè questa sarebbe stata che una delle piccole fra le opere romane da essi intraprese; e forse ne' tempi dai nostri men remoti il Veneto Senato, splendido e magnifico negl' idraulici intraprendimenti, sarebbe stato abbastanza coraggioso per piantare questa macchina sopra i suoi fiumi, se un Montanari gliel' avesse raccomandata come assai giovevole, mercè dei lumi che può fornire per una saggia e generale direzione delle acque. Ma lasciamo da canto queste intempestive idee, e supponendo ancora che niuno fosse stato in grado di assoggettare le grandi acque correnti al giogo di un Regolatore, non è colpa o difetto di questa macchina se i fiumi della natura sono vasti, e ristretti i modi o il cuore dell' uomo. Questa è l'unica misuratrice perfetta di ogni acqua corrente e di ogni fiume, e dove questa manchi, non si può usare che una maniera imperfetta di misura di cui abbiamo altrove favellato.

CAPITOLO IX.

Del Regolatore = a libera cateratta. =

134. Quantunque nell' uso del Regolatore = a piena doccia = tutto secondo le premesse cospiri alla semplicità, certezza e giustezza, non che alla felicità della dispensa dell' acqua, di modo che non possa soffrire paragone o scontro con alcun' altra pratica, esso solo essendo per ogni conto convenevole e perfetto; nulladimeno nel capitolo terzo di questa seconda parte per largheggiare abbiamo indicato che ci sarebbe altra maniera di dispensare le acque = a libera cateratta =, come noi la diremo, quando con un *coefficiente* costante, che venisse dalla sperienza somministrato, si potesse correggere l'effetto della contrazione di vena, moltiplicando cioè con esso il prodotto parabolico che esprime la quantità dell' efflusso. Abbiamo anche geometricamente dimostrato, come ciò debba valere per qualche caso, ed insinuammo che alcune sperienze ce lo danno a credere per altri casi, comechè limitati. In tale supposizione, giacchè per una pratica convenevole di dispensa d' acque è indispensabile, come abbiamo dichiarato, che la vera ed assoluta quantità dell' acqua che si dispensa, venga rappresentata dalla grandezza medesima della cateratta

per cui il fluido sgorga, converrà secondo l' osservazione dell' art. 97 combinare talmente fra loro l' altezza della cateratta colla grandezza del battente, prese queste due quantità costanti per qualunque varia larghezza di luce, che il prodotto parabolico denotante la quantità dello sgorgo indi risultante, modificato con quel tale *coefficiente* costante, sia sempre rappresentato dalla sezione medesima della cateratta.

Pongasi L la larghezza variabile della cateratta, A la sua altezza, B il battente; sarà, com' è noto, il prodotto parabolico di cui parliamo

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(2g)} \, L \left[(A+B)^{\frac{3}{2}} - B^{\frac{3}{2}} \right],$$

g denotando il doppio spazio passato da un corpo in 1'' centesimo colla libera caduta, di cui altrove abbiamo dato il valore. Segnando dunque *k* quel *coefficiente* costante, dovremo secondo le premesse fare

$$\frac{2}{3} \sqrt{(2g)} \, L \left[(A+B)^{\frac{3}{2}} - B^{\frac{3}{2}} \right] k = AL,$$

AL essendo la sezione della cateratta.

Pel valore del *coefficente k* facciamo uso della ragione fra la vena contratta e la vena lata che ci danno gli *Sperimenti Idraulici* del signor Michelotti (vol. 1, fac. 91.), la quale viene espressa per $\frac{265}{432} = 0,61342$, ponendo questo valore nell' equazione, ed avvertendo essere $g = 7,31969$, essa si trasformerà nella seguente:

$$1,5647 \left[(A+B)^{\frac{3}{2}} - B^{\frac{3}{2}} \right] = A.$$

135. Infiniti valori diversi della A e della B, ciò sono dalla A = 0 fino alla A = 0^met.,40844, o dalla B = 0^met.,18153 fino alla B = 0, possono quadrare a quest' equazione; ma senza inciampare in alcun vizioso estremo noi piglieremo l' altezza A = 0^met.,30, che sarà mezzana fra quelle dei moduli milanese e cremonese, e pressochè eguale a quella del veronese. Il che posto, si troverà che alla precedente equazione dovrà in pratica soddisfare il battente

$$B = 0^{met.},0418 .$$

Nella fatta supposizione adunque del *coefficiente k* costante dando sempre l' altezza di 0^met.,30, col battente di 0^met.,0418, e variando soltanto la larghezza secondo la quantità dell' acqua che si vuol derivare, si otterrà l' intento che la cateratta medesima colla sezione ci

dica l' assoluta quantità di fluido che si dispensa; abbia, per esempio, una bocca la larghezza di quattro *decimetri*, sarà la sua sezione $= 0^{met.},12$, e ci dirà che ogni 1'' centesimo versa metri cubi d' acqua 0,12, ciò sono 12 mila metri cubi al giorno; e che si possono con essa ogni giorno irrigare 12 metriche *tornature* di campi.

136. Io qui non ripeterò quel ch' è già detto in fine dell' art. 97. intorno ai difetti di tal maniera di dispensa; ma aggiungerò che richiedendosi per essa una caduta non minore di met. 0,3418, accaderà non di rado che ne' luoghi di poca declività non sia praticabile, ovvero che sia la misura dell' acqua alterata pel ringorgamento delle acque inferiori, come più volte succede nel Veronese, il di cui modulo poca maggior cascata richiede. Nè si potrebbe andar incontro a questo inconveniente coll' assumere un' altezza A minore di $0^{met.},36$, stabilendo, per esempio, che l' altezza costante del modulo esser dovesse come il milanese $= 0^{met.},20$, ed aggiustando a questa il battente, perchè venga soddisfatto alla premessa equazione; imperocchè allora la forma del modulo diverrebbe in pratica troppo schiacciata e bislunga, il che renderebbe più incerto e fallace il *coefficiente k* sperimentato soltanto nelle figure quadre o rotonde: si può vedere che dica su ciò il mio *ragguaglio matematico*, *fac.* 42 (*). Si può inoltre osservare che in questa ed altre simili pratiche, ove occorra di diminuire l' acqua alle bocche in una certa proporzione, secondo che vien meno la corrente del canal maestro, non si può dividere il battente con quella semplice scala che abbiamo additato all' art. 120; imperocchè la velocità dell' acqua e la sua copia non dipendendo qui dal solo battente d' acqua che si alza sopra il labbro della bocca, ma dalla profondità ancora sotto di esso, alla quale passa ogni fluida vena capillare, riuscirebbe la scala di divisione più intricata ed irregolare, e perciò men sicura. Non pertanto, malgrado tutti questi difetti ed altri che si passano sotto silenzio, se si usasse questo modo di dispensa = a libera cateratta = colle avvertenze da noi altrove suggerite pel bottino e per la cateratta maestra, sarebbe una tal pratica senza paragone migliore degli usi correnti, e massimamente del Milanese, perchè esso gioverebbe a farci conoscere l' assoluta quantità dell' acqua riferita alla sua unità di misura, il che con questi in nessuna maniera si ottiene; e senz' avere nè *trombe* coperte, nè calici scoperti, nè piani acclivi, nè piani declivi, nè altri requisiti che sono tante vere prove della imperfezione dell' edifizio milanese, ma con un semplice modulo scolpito in un piano che lasci d' intorno alla luce una fascia di due o tre *decimetri* di larghezza, che serva alla

(*) Veggasi pure l' annotazione quarta in fine.

totale contrazione della vena, fornirebbe una misura dell' acqua più giusta e più regolare di quella che ci dà la pratica di Milano o d' altri paesi.

137. E poichè questo modo di dispensa d' acque = a libera cateratta = quanto è superiore alle altre pratiche finora usate, tanto è inferiore all' uso da noi suggerito = a piena doccia =; non crederei che d' ora innanzi un abile architetto potesse quello a questo preferire; tuttavia se ciò avesse giammai per combinazione di circostanze ad accadere, io avvertirò che là dove l' abbondante declività de' luoghi lo permetta, si potrà utilmente usare il Regolatore anche sotto questa forma a doppia, a tripla ecc. misura come abbiamo suggerito in simili casi pel Regolatore = a piena doccia =, e sarà pel Regolatore a doppia misura il battente

$$B = 0^{met.},5753;$$

e pel Regolatore a tripla misura avremo

$$B = 1^{met.},4770, \text{ ecc.},$$

come senza molta difficoltà si può ricavare dalla premessa equazione fondamentale, facendo il secondo termine $= 2A$, $= 3A$, ecc. Anche questo solo ripiego, opportunamente posto in pratica ne' correnti usi, gioverebbe non poco a perfezionarli.

CAPITOLO X.

Sperienze fatte in piccolo col Regolatore = a piena doccia =

138. I fluidi sono i corpi della natura più gelosi che si risentono d' ogni ancorchè fievolissima virtù motrice che gli stimoli, e perciò obbedientissimi alle leggi del moto dipendenti dalle forze sollecitatrici, ed ai dettati del calcolo, ch' è la fedel loro espressione: ove però del loro movimento parla l' esatta geometria, è inutile interrogare la sperienza. Nulladimeno è natural vaghezza che sovente ci spigne a voler vedere in effetto quel che la matematica a voce ci esprime, ed a mettere così al cimento della prova il valore o il difetto dell' arte sperimentale nell' imitare l' impareggiabile giustezza della geometria. Cercai per questo ancor io di sperimentare l' effetto del Regolatore = a piena doccia = facendo costruire la macchina in piccolo, vale a dire colla doccia di sezione quadra, che aveva un *decimetro* di lato. Era dunque la sezione della doccia $= 0,01$; e la sua lunghezza fu circa quadrupla della sua altezza; l' imbuto ed il suo coperchio era esattamente secondo il prescritto dall' art. 110.

La macchina fu applicata ad un canale di acqua corrente che aveva otto o nove volte più di capacità che il Regolatore; e l'acqua da questo si versava con notabile caduta nell'inferiore rigagnolo. Per ricevere e misurare l'acqua che sboccava dalla doccia feci preparare una bigoncia capace di un volume di acqua $= 0^{met.},0849$; essa si teneva galleggiante nell' inferiore rigagno, ed al momento che si voleva cominciare lo sperimento, si spingeva colle mani sotto la grondaia della doccia. Per misurare il tempo che l'acqua della doccia impiegava ad empiere la bigoncia, usava il pendolo che batte i secondi centesimi, la cui lunghezza alla latitudine di Milano è di $0^{met.},741640$; io teneva il pendolo rimosso dalla linea verticale; e nell' atto che il servo a ciò addestrato spingendo la bigoncia sotto la stroscia dell' acqua cadente, dava segno con un grido, io lasciava in libertà il pendolo perchè cominciasse a fare le sue vibrazioni, che io noverava finchè il famiglio gittava un altro grido al momento che vedeva tutta ripiena la bigoncia di acqua; la situazione verticale del pendolo mi segnava i mezzi minuti secondi, ed a certa discrezione o pratica notava ancora i quarti.

Io non poteva schivare alcune piccole variazioni che faceva il rigagnolo, di cui mi serviva in queste sperienze, onde al cominciare di esse il battente, ancorchè fosse stato avanti aggiustato all'esatta misura di $0^{met.},0683$, si trovava alquanto alterato, e faceva qualche piccolo cangiamento durante la loro esecuzione; io perciò notava il battente alla prima sperienza ed all'ultima, onde prendere il mezzano fra i due, per far poscia la conveniente riduzione del tempo in ragione permutata delle radici di questo battente e dell' esatto $= 0^{met.},0683$.

Allo sbocco della doccia posi una piccola traversa alta sopra il fondo di quella $0^{met.},021$, volendo a bello studio usare un' altezza alquanto eccedente, perchè sapeva che non recava alcun sensibile pregiudizio alla sperienza. La doccia fu in tal modo riempiuta, e tanto o quanto soverchiata stendendosi un sottil velo di acqua corrente anche sopra le sponde; ma senza che al confine dell' imbuto, cioè al principio della doccia si sollevasse punto l' acqua a formare alcun contrario battente.

139. Dopo aver lungamente esercitato il famiglio alla pronta e destra operazione, nel dar principio alla prima sperienza osservai essere il battente alto $0^{met.},072$; e siccome alla fine delle sperienze, che qui sotto descrivo, lo trovai disceso a $0^{met.},0705$, considero il mezzano battente di tutti questi sperimenti $= 0^{met.},0712$. Ciò premesso, ecco la tavola delle sperienze.

TAVOLA I.

Sperienze del Regolatore = a piena doccia = di sezione eguale ad una centesima (= $0^{met.},01$) con battente = $0^{met.},0712$.

Avverti che si nota il tempo in centesimi minuti secondi speso a riempiere un vaso capace di un volume di acqua = $0^{met.},0849$.

Numero delle sperienze.	Tempo speso nel riempiere il vaso.	Numero delle sperienze.	Tempo speso nel riempiere il vaso.	Numero delle sperienze.	Tempo speso nel riempiere il vaso.
1	8'',50	17	8'',00	33	8'',00
2	8 ,00	18	8 ,00	34	8 ,00
3	8 ,00	19	7 ,75	35	8 ,00
4	8 ,00	20	8 ,00	36	8 ,00
5	7 ,75	21	8 ,00	37	8 ,25
6	8 ,00	22	8 ,00	38	8 ,00
7	7 ,75	23	8 ,00	39	8 ,00
8	8 ,25	24	8 ,00	40	8 ,00
9	8 ,00	25	8 ,00	41	7 ,50
10	8 ,25	26	8 ,75	42	8 ,00
11	8 ,00	27	8 ,25	43	8 ,00
12	8 ,25	28	8 ,00	44	8 ,00
13	8 ,00	29	8 ,00	45	8 ,25
14	8 ,25	30	8 ,00	46	8 ,50
15	8 ,00	31	8 ,25	47	8 ,00
16	8 ,00	32	8 ,00		

Da questa tavola si ricava che il tempo mezzano speso nel riempiere il vaso fu di 8'',05. Misurando il pendolo dopo terminata la sperienza, mi accorsi che la sua lunghezza era $=$ 0$^{met.}$,744 in vece della prescritta $=$ 0$^{met.}$,74164. Facendo dunque la dovuta doppia correzione al tempo per adattarlo al giusto battente 0$^{met.}$,0683. ed alla giusta misura del pendolo, si trova

$$\frac{\sqrt{0{,}0712}\times\sqrt{0{,}744}}{\sqrt{0{,}0683}\times\sqrt{0{,}74164}}\,8'',05 = 8'',232.$$

In questo tempo adunque $=8'',232$ il Regolatore ridotto a giusto battente $=$ 0,0683 ha versato un solido d' acqua $=$ 0$^{met.}$,0849; onde sta la faccenda in questi termini, cioè:

Sezione della doccia.	Quantità dell' efflusso in 1'' cent.° secondo il calcolo.	secondo la sperienza.	Errore della sperienza.
0,01.	0,01.	0,0103.	0,03.

L' errore della sperienza è preso in paragone della giusta quantità considerata $=1$.

140. Ben si vede non essere questo che un piccolo saggio imperfetto di sperimenti; il vaso che riceveva l' acqua era troppo piccolo in paragone della doccia che la versava, quindi troppo breve il tempo per empier quello; e non potendo ben adocchiare le frazioni del minuto secondo, come la tavola medesima ne fa fede, gli errori di queste divenivano sensibili nella corta durata di quello. Nulladimeno simili svarj tendono a compensarsi fra loro, e l' errore della sperienza, se non in tutto, in gran parte almeno trae origine da altro fonte. La grondaia dell' acqua che piombava sopra il fluido già versato nella bigoncia, produceva nella superficie di questo una cavità; onde al momento che il famiglio vedendo soverchiare le sponde del vaso, dava il convenuto segno del suo riempimento, il vaso in realtà non era pieno; anche l' ondeggiamento dalla medesima cagione prodotto nell' acqua del vaso concorreva ad accrescere il medesimo errore. Si può pertanto ritenere che senza il disfavore di questa circostanza lo svario della sperienza, che per altro non è se non di tre centesime parti della giusta quantità, sarebbe riuscito di assai minore considerazione.

141. Per mostrare quanto poco influisca sopra la quantità dello sgorgamento il dare alla traversa della doccia alquanto abbondante altezza, come noi facemmo, aggiungeremo qui che il predetto sperimento fu per curiosità cinquanta fiate ripetuto colla traversa alta 0$^{met.}$,40, cioè doppia della precedente, e l' avvenimento fu, che in

parità di battente si ebbe la copia dell'acqua versata $= 0^{met.},0101$, vale a dire calò soltanto di due centesime parti. L'acqua sormontava le sponde della doccia assai più che nella precedente sperienza, ma al confine dell'imbuto non vi era che $0^{met.},001$ di contrario battente.

CAPITOLO XI.

Sperienze del Regolatore = a piena doccia = eseguite più in grande.

142. Dopo il piccol saggio delle descritte sperienze m'invogliai a farne altre in grande e meno ad errori soggette. Fu perciò costruito un Regolatore con doccia alta $0^{met.},4233$ e larga $0^{met.},1973$, vale a dire di sezione $= 0^{met.},0835$, e le si diede la lunghezza di met. 1, 46. Il suo imbuto e tutto il resto era secondo il prescritto degli articoli 110. e 111. La traversa posta allo sbocco della doccia si alzava sopra il suo fondo $0^{met.},10$ ed anche più, poichè colla talvolta alquanto a capriccio variata, sperimentando il nessun effetto che le piccole variazioni producevano sopra la quantità dell'efflusso. La macchina fu piantata in isponda di una fontana, le cui acque si usano ad irrigare le campagne; la minima larghezza del ruscello avanti il Regolatore era di met. 2,70, ma su la direzione alquanto obbliqua dell'asse della doccia essa riusciva di met. 3,40; la sua profondità avanti il Regolatore non era minore nel mezzo di met. 0,70, e la velocità di sue acque in vicinanza di quello non era mai maggiore di un metro in dieci secondi sessantesimi.

Per ricever l'acqua che dovea scaricarsi dalla doccia, si formò una cava quadrilatera e rettangola nel terreno di natura cretoso ed impenetrabile all'acqua. Per misurare con esattezza la sua capacità, da cui dipender doveva la giusta misura dell'acqua dalla doccia versata, furono prese a diverse altezze ottanta misure de' suoi lati; fu così determinata la mezzana sua larghezza di met. 2,2137, e la mezzana lunghezza di met. 6,5182, che danno l'ampiezza della cassa eguale a metri quadri 14,4293; alla quale aggiungnendo quella del tronco di canale posto fra la doccia e la cava, ch'era $= 0^{met.},8658$, si ha l'intera ampiezza o media sezione orizzontale del vaso eguale a metri quadrati 15,2951. Tal era la mezzana capacità di questa cassa entro i confini di quell'altezza ch'era occupata dall'acqua nelle sperienze. Il fondo della cassa si lasciava coperto di acqua fino al livello di un segnale, affinchè si avesse una superficie orizzontale.

143. Il ruscello era attraversato da un piano verticale con cateratta nel mezzo munita d'imposta, la quale serviva per regolare, secondo il bisogno, l'altezza dell'acqua avanti la macchina. Pel lungo

corso del ruscello ed anche per le frequenti piccole variazioni cui era soggetto, non essendo possibile l'ottenere almeu con discreta prontezza l'altezza precisa 0,0683 del battente, e facendo esso ancora qualche cangiamento durante il tempo di ciascuna sperienza, io regolava in modo il corso dell'acqua col maneggiamento dell'imposta sopra mentovata, che quando il battente era poco più o poco meno di 0,0683, il suo crescere o calare fosse lentissimo; e quando trovava le cose in questo stato, ordinava che fosse chiusa coll'imposta la cateratta del ruscello, ed immantinente, essendo armata d'imposta anche la bocca del Regolatore, dava segno perchè questa fosse alzata, e nell'atto medesimo lasciava scattare dalla mano il pendolo per misurare colle sue vibrazioni il tempo a centesimi minuti secondi.

Io contava le vibrazioni ad alta voce, e quando giugneva alla 70.ma, il famiglio a ciò ammaestrato calava in un attimo l'imposta, levando l'acqua al Regolatore. Per determinare il battente colla giustezza che si poteva maggiore, il famiglio alla 10.ma vibrazione segnava su la fronte del Regolatore ove giugneva il pelo dell'acqua stagnante conficcandovi la punta di uno spillo; ripeteva la stessa operazione con altro spillo alla 35.ma vibrazione, poi altra col terzo spillo alla vibrazione sessantesima. La media fra queste tre altezze, contando due volte la seconda, mi dava il mezzano battente di ciascheduna sperienza: assai rare volte la massima differenza fra il mezzano battente e qualunque delle tre altezze segnate cogli spilletti è giunta a met. 0,003, e per lo più il divario non arriva alla metà di questa. Terminato lo sgorgamento dell'acqua, si misurava l'altezza di questa nella cassa, e si determinava l'esatta quantità dell'efflusso.

144. Io osservai che nel calare l'imposta del ruscello, e nell'alzare quella del Regolatore si eccitava nella massa dell'acqua avanti di questo un sensibile ondeggiamento che durava alquanti minuti secondi, e fu questa una delle ragioni per cui il primo spillo non si collocava a posto se non se alla decima vibrazione del pendolo. Nel chiudere all'acqua il passaggio per la cateratta del ruscello, e nel dargliela in vece pel Regolatore, il battente ora cresceva ed ora calava di qualche *millimetro*, secondo che le piccole variazioni del rigagno l'acqua di questo era ora tanto o quanto più, ed ora tanto o quanto meno di quella che versava il Regolatore. Al primo levarsi dell'imposta alla bocca di questo l'acqua precipitandosi nella vota cavità dell'imbuto e della doccia, s'inclinava colla superficie all'ingiù, ed andando a percuotersi nella traversa, balzava con impeto e gorgoglio in alto formando un cavallone soverchiante non poco le sponde della doccia, talchè la superficie della corrente entro la doccia era disposta in forma concava, con una estremità toccando il cielo

del imbuto, e coll'altra sollevandosi fino alla sommità del cavallo; questa cavità lasciava un voto nella doccia, ma tosto il cavallo si abbassava, e questa si empieva; non si vedeva però bene spianata la superficie della corrente entro la doccia, se non dopo sette od otto vibrazioni del pendolo, ed in tale stato poi si manteneva durante il tempo della sperienza. Benchè la superficie dell'acqua nello stato suo permanente fosse ridotta lungo la doccia ad un piano orizzontale, ognuno s'immaginerà quel ch'è in fatti, vale a dire che la corrente vicino al contatto della traversa dovesse alquanto gonfiarsi per la piega all'insù che prendono i fluidi fili presso al contatto dell'ostacolo per superarlo; in effetto la corrente per l'innanzi piana, giunta ch'era a met. 0,20 circa dallo sbocco, formava un piccol colmo, soverchiando le sponde coll'altezza all'incirca di met. 0,02; indi cadeva velocitandosi, ed alla distanza di met. 0,10 dalla traversa pareggiava di nuovo le sponde, sotto il livello delle quali si trovava finalmente avvallata met. 0,02 quando era sopra la traversa in procinto di sgorgare.

145. Premesse queste cose, soggiungo qui la tavola delle sperienze, che sarà abbastanza chiara per non aver bisogno di altra spiegazione.

TAVOLA II.

Sperienze del Regolatore = a piena doccia = di sezione $0^{\text{met.}}$,0831.

La durata del tempo speso in ogni sperienza è di 70^{di} *centesimi.*

Numero delle sperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell'efflusso secondo il calcolo.	Quantità dell'efflusso secondo la sperienza.	Errore della sperienza in ragione del tutto.
	metri.	metri cubi.	metri cubi.	
1	0,0677	5,8191	5,9344	+ 0,0198
2	0,0687	5,8620	5,7968	— 0,0111
3	0,0702	5,9256	5,7050	— 0,0372
4	0,0680	5,8320	5,8274	— 0,0007
5	0,0692	5,8832	5,7968	— 0,0146
6	0,0686	5,8577	5,9192	+ 0,0104
7	0,0695	5,8960	5,7203	— 0,0298
8	0,0690	5,8747	5,8886	+ 0,0023
9	0,0690	5,8747	6,2556	+ 0,0648
10	0,0685	5,8534	6,2709	+ 0,0711
11	0,0690	5,8747	5,8580	— 0,0028
12	0,0687	5,8620	5,8274	— 0,0059
13	0,0665	5,7673	5,8121	+ 0,0077
14	0,0693	5,8875	5,9344	+ 0,0079
15	0,0690	5,8747	5,8886	+ 0,0023
16	9,0723	6,0136	5,7509	— 0,0436
17	0,0711	5,9635	5,9803	+ 0,0028
18	0,0702	5,9256	5,9803	+ 0,0092
19	0,0696	5,9002	6,3015	+ 0,0680
	Somme .	111,7475	112,4485	
	Differenza . . . = 0,7010			
	Errore mezzano della sperienza . . . . = 0,0062			

146. Si vede che le sperienze sono migliorate non poco in paragone del precedente saggio, poichè dove prima l'errore mezzano degli sperimenti era del tre per cento, ora giunge a poco più del mezzo per cento; nulladimeno anche in queste seconde prove si può desiderare qualche maggiore uniformità fra le une e le altre, poichè ve ne ha tre, ciò sono le 9, 10, 19, che fallano del sei ed anche del sette per cento. Ogni sperienza reca sempre seco un multiplice seme di errore; tali sono nell' affare presente gli accidenti motivati nel art. 144, e la più o men lenta opera di chi alza e di chi abbassa l' imposta al principio ed al fine d'ogni sperimento, ed altre piccole circostanze che talvolta sfuggono l' occhio anche di un diligente osservatore; tuttavia non credo che eziandio il concorso di tutte queste minute cagioni di fallo potessero bastare a rendere sì errate, come sono, le tre mentovate sperienze; io perciò ripeto in gran parte il loro fallo da un' altra cagione, ch' è un' onda eccitata nell' acqua della cassa dalla fluida vena che in essa si versava, la quale sembrava percorrere la lunghezza della cava; in fatti il famiglio che, appena abbassata l' imposta del Regolatore, prendeva sul momento con un regolo la misura dell' altezza dell' acqua sgorgata nella cassa, mi ha più d' una volta accusato un' onda che non gli lasciava ben discernere la precisa altezza suddetta; ed io ho poscia riconosciuto che questa poteva cagionare uno svario sensibile in qualche sperienza.

147. Checchessia di ciò, che per altro sconcerta di poco, come vedemmo, la totalità delle sperienze, io fui vago, poichè ebbi tempo, di ripigliare questo divertimento, e di recarlo ancora a maggiore perfezione; il che dipende massimamente dal poter aggrandire il vaso destinato a ricever l' acqua che si versa dalla doccia, affinchè la sperienza durar possa più lungo tempo. Imperocchè tutte le sorgenti de' suoi errori sono risposte nelle circostanze che accompagnano il cominciamento ed il termine d' ogni sperimento; quanto adunque la durata e l' effetto di questo risulta maggiore, tanto meno in esso riescono sensibili i piccoli falli inseparabili dal suo principio e dal suo fine. Volendo adunque con tale idea intraprendere novelle prove in sito opportuno poco distante dal primiero, feci scavare nel terreno una cassa per ricever l' acqua sgorgante dalla macchina molto più capace della prima: essa fu di forma quadra, co' lati che variavano dai metri 4,907 ai 5,008. Fu pure adattata aggiustatamente la macchina, di cui mi era servito nelle passate sperienze, rifatta essendosi di nuovo la sua imposta coi corrispondenti incastri, affinchè con agevolezza si aprisse e si serrasse, e serrata che fosse, chiudesse quanto si poteva più l' ingresso all' acqua.

Per conoscere l'esatta capacità della cava, dalla quale dovea dipendere la giusta misura dell' acqua, furono ad ogni lato di essa

collocati otto legnetti verticali disposti ad eguali distanze fra loro, lunghi un metro e divisi ciascuno in dieci parti eguali; poi con un regolo lungo intorno a met. 4,50, ed un altro poco più lungo di mezzo metro, che sopra il primo si faceva scorrere innanzi e indietro secondo il bisogno, si pigliarono le misure della larghezza del vaso per ogni verso a ciascun legnetto ed a ciascun *decimetro* di sua altezza, in guisa che furono tolte censessanta misure. Fu separatamente determinata la solidità del vaso per ciascun *decimetro* di altezza, a fine di poter valutare la giusta misura dell' acqua che conteneva secondo la varia elevazione del fondo da cui si volesse cominciare l' empimento della cassa, e secondo la varia altezza sopra tal orizzontale cui poteva giugnere l' acqua versata, la quale non batteva che intorno ai sette od otto *decimetri*.

Avvegnachè in queste sperienze io abbia fatto uso del Regolatore di cui mi sono servito nelle antecedenti, pure essendosi nel suo acconciamento alquanto alterata la sezione della doccia, fu di questa fatto nuovo e diligente misuramento sì in altezza che in larghezza; ed essendosi ritrovata la mezzana fra venti larghezze essere di met. 0,19760, e la mezzana fra dieci altezze di met. 0,41285, venne stabilita la grandezza della sezione, o capacità della doccia al confine del imbuto di met. quad. 0,08157.

148. La profondità del cavo essendo maggiore dell' ordinaria altezza d' un uomo, era penetrata in un letto di ghiaia, donde scaturiva acqua; questa però non si alzava che fino intorno a due *decimetri* sopra il livello del segnale, da cui cominciavano le nostre misure dell' acqua sgorgata, ed era sì lento il suo crescimento, che mentre pareggiava il segnale, ci metteva più di 100'' centes. a sormontarlo con un' altezza di met. 0,002; il quale aumento andava più e più ritardandosi e scemandosi a misura che l' altezza dell' acqua cresceva, finchè diveniva $=0$, quando l' acqua era giunta all' indicata altezza di met. 0,2 sopra il segnale. All' opposto, allorchè versando acqua nel vaso si faceva salire sopra tal confine della sorgente, questa in certo modo diventava negativa, ed il fondo ghiaioso in vece di tramandare acqua, la assorbiva: l' assorbimento in 100'' appariva di met. 0,001, quando l' acqua nella cava era alta met. 0,5 sopra il fissato livello, e di met. 0,0026, quando era alta met. 0,7. A queste piccole alterazioni si aggiugneva ancora quella di alquanta acqua, che dopo calata l' imposta del Regolatore passava feltrandosi fra questa ed i suoi incastri, staccato essendosi nel aprimento della cateratta il mastice di terra, col quale suggellavasi all' intorno ogni commessura.

Per valutare tutte queste benchè lievi alterazioni della vera quantità d' acqua sgorgata dalla doccia durante il tempo della sperienza,

oltre le generali osservazioni dell' aumento o scapito dell' acqua della cava fatto secondo le diverse altezze del suo livello, usava altro avvertenze in ciascheduna sperienza: imperocchè presa che si era la misura dell' acqua sgorgata (la quale soleva pigliarsi 100″ circa dopo di aver chiusa coll' imposta la cateratta, affinchè avessero campo di sedarsi le onde dall' impeto dello sgorgamento nella cassa eccitate), con replicate o triplicate osservazioni si notava quanto il livello dell' acqua medesima nel vaso si alzasse o si abbassasse in ragione di 100″ di tempo; o col sussidio di queste particolari indagini e delle osservazioni generali si faceva a ciascheduna sperienza la conveniente correzione, il massimo della quale non eccede la quantità di met. 0,0010 sottratta alla altezza dell' acqua misurata, allorchè questa per le mentovate cause accidentali nel vaso cresceva, e di met. 0,0037 aggiunta, quando in vece calava, com' era l' ordinario.

149. La traversa posta al confine della doccia erasi e bello studio collocata un centimetro circa più alta del bisogno, di modo che l' acqua cominciava a gonfiarsi, ed a superare alquanto le sponde ad una distanza di met. 0,3 dall' imbuto, non soverchiandole però in tal sito che coll' altezza di pochi *millimetri*; questa inondazione delle sponde cresceva gradatamente fino alla sommità del descritto cavallo, discendendo poscia la corrente nel modo pressappoco dichiarato nelle antecedenti sperienze; pel mentovato piccolo soverchiamento delle sponde nessuna porzione di acqua si dispergeva per essere la doccia incassata nel terreno.

La durata delle prime due sperienze fu di 200″ centes., o di 240″ quella delle rimanenti. Per seguare il battente nelle prime due sperienze i tre spilli erano collocati al polo dell' acqua nel seguente modo, cioè il primo a 20″, il secondo a 100″, il terzo a 180″; nelle altre sperienze poi il primo era messo a posto a 20″, il secondo a 120″, e finalmente il terzo a 220″.

Pel rimanente le nuove sperienze sono state eseguite ne' modi e colle cautele usate nelle precedenti. Ogni sperienza mi obbligava a far votare la cassa a braccia d' uomini, non avendo l' acqua alcuno sfogo. Ecco pertanto il successo di questi sperimenti espresso nella seguente tavola.

TAVOLA III.

Nuove sperienze del Regolatore = a piena doccia =
Sezione della doccia = 0$^{met.}$,08157.

Durata delle sperienze di 200'' centes. per le prime due, e di 240'' per le altre.

Numero delle sperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell' efflusso secondo il calcolo.	Quantità dell' efflusso secondo la sperienza.	Errore della sperienza in ragione del tutto.
	metri.	metri cubi.	metri cubi.	
1	0,0687	16,363	16,340	— 0,0014
2	0,0740	16,983	16,915	— 0,0040
3	0,0636	18,893	19,219	+ 0,0172
4	0,0690	19,679	19,533	— 0,0074
5	0,0622	18,684	19,031	+ 0,0185
6	0,0670	19,392	19,332	— 0,0030
7	0,0635	18,878	19,106	+ 0,0120
8	0,0667	19,348	19,470	+ 0,0063
9	0,0678	19,507	19,407	— 0,0051
10	0,0657	19,202	19,131	— 0,0036
11	0,0565	17,808	17,840	+ 0,0018
12	0,0661	19,261	19,400	+ 0,0072
13	0,0669	19,377	19,450	+ 0,0037
14	0,0686	19,622	19,525	— 0,0049
15	0,0680	19,536	19,600	+ 0,0032
16	0,0685	19,607	19,788	+ 0,0092
17	0,0794	21,110	20,629	— 0,0227
18	0,0680	19,626	19,650	+ 0,0012
19	0,0655	19,173	19,475	+ 0,0151
20	0,0657	19,210	19,425	+ 0,0111
	Somme.	381,259	382,266	
	Differenza = 1,007			
	Errore mezzano della sperienza = 0,0026			

150. Il confronto di questa tavola colla seconda fa chiaramente vedere quanto le presenti sperienze siano più accurate delle antecedenti, imperocchè non solo il mezzano errore di queste è minore della metà del fallo di quelle, ma dove nelle precedenti vi erano diversi sperimenti, il cui errore montava al sei ed al sette per cento, in queste ve ne ha un solo che falli di due per cento, e questo è il diciassettesimo; ma simile svario mostra non l'error suo, ma la sua giustezza; imperocchè essendo l'altezza della traversa, come si è avvertito, alquanta più del dovere, cioè più di quella che convenga al fondamentale battente 0,0683, l'effetto di quest'accesso, che non è sensibile per un tal battente, divenir deve di qualche considerazione ad un battente più forte, perchè questo è più intollerante d'un'alta traversa. Ora la sperienza diciassettesima fu in questo caso, poichè ebbe un massimo battente $=0,0794$, cioè 0,0111 più del fondamentale; per l'opposta ragione la sperienza undecima, ch'ebbe il minimo battente $=0,0565$, cioè 0,0118 minore del fondamentale suddetto, fu una delle più conformi alla precisione del calcolo, perchè l'altezza della traversa, ch'era abbondante pel battente 0,0683, diveniva più moderata e più giusta per essa. Noteremo ancora in questo luogo, che se alle altezze dell'acqua versata nella cassa non si fossero fatte le dovute piccole correzioni, l'errore mezzano sarebbe riuscito eziandio minore, e negativo.

151. Paragonando insieme tutte tre le tavole, si può osservare quanto si perfezionino le sperienze a misura che la loro durata è più lunga, perchè gli sconcerti o falli che succedono solo al cominciare ed al finire degli sperimenti, diventano in questi più e più insensibili a misura che sono per più lungo tempo continuati; dal che si può ricavare che nella dispensa perenne delle acque fatta col Regolatore a piena doccia la misura loro deve riuscire sommamente esatta.

CAPITOLO XII.

Sperienze del Regolatore = a piena doccia = ma colla dispensa ridotta = a mezza misura. =

152. Nel genere di sperienze, di cui parliamo, si cercherebbe eccessiva squisitezza volendole recare ad un grado maggiore di precisione e di conformità col calcolo, di quello che abbiamo ottenuto; nulladimeno ciascun può a suo talento proceder oltre sulla via che abbiamo additato, e può recare gli sperimenti a quantunque maggior perfezione sia per piacergli, usando più e più diligenza nella costruttura della macchina e nell'addestrarsi al suo maneggiamento; e soprattutto ampliando a beneplacito il vaso in cui deve sgorgare

l'acqua, affinchè si possa vie più prolungare la durata d'ogni sperimento, ch'è quella che ingoia, per così dire, e fa sparire gli errori. Io dunque, senza curarmi di progredire più oltre nelle descritte sperienze, era in vece curioso di far prova del Regolatore a doppia misura, vale a dire col battente quattro volte maggiore dello stabilito = 0,0683, il quale raddoppia la dispensa dell'acqua, e fa in conseguenza che la sezione della doccia vaglia pel doppio; ma questo mi obbligava a profondare di troppo la cava, dal che nascevano due grandi inconvenienti, l'uno per la copia delle acque sorgenti che avrebbe disturbato le operazioni, l'altro per la maggiore difficoltà nel fare ad ogni sperienza gettar l'acqua colle pale per votare la profonda cassa. Pensai dunque di sperimentare in vece il Regolatore a mezza misura, cioè di battente $= \frac{0,0683}{4} = 0,01707$, il quale conferisce all'acqua mezza velocità, cioè quella per cui si passa mezzo metro in un minuto secondo della nuova divisione del tempo. In questo modo la sezione della doccia non si conta che per la metà; onde la dispensa è = a mezza misura. =

Le sperienze precedenti rispetto a queste sono a doppia misura, onde sperimentare il Regolatore a mezza misura mi vale quanto il provarlo a doppia misura, come desiderava: se non che la sperienza si rende così più gelosa, e vuol essere maneggiata con più cautela, perchè un piccolo errore nel battente diviene ben sensibile nell'esito di quella; ed io la rendetti ancora più difficile, perchè volli a posta tenere la traversa tanto alta che l'acqua della doccia a tergo del coperchio dell'imbuto formasse alquanto di contrario battente, il quale si dovesse sottrarre all'apparente segnato su la fronte del Regolatore per avere il genuino battente attivo, avendo in mira di mettere anche questo accidente al cimento della prova. La traversa per tanto era posta sì alta allo sbocco della doccia, che la sua sommità non era che met. 0,19 sotto il livello delle sponde. Io poi con ripetute osservazioni mi assicurai che quanto il battente alla fronte del Regolatore segnava l'altezza di met. 0,017, la superficie dell'acqua della doccia a tergo dell'imbuto formava un contrario battente = 0,003; e questo diveniva = 0,007 quando la suddetta altezza avanti il Regolatore saliva a met. 0,025, di modo che la differenza = 0,008 del primo battente dava fra i detti limiti un divario di 0,004 nel contrario battente, ch'è la sua metà; ed ebbi facilmente a conoscere che fra i medesimi confini, o in poca loro distanza gli aumenti del contrario battente erano pressappoco proporzionali agl'incrementi del battente che appariva segnato sul prospetto del Regolatore, vale a dire un *millimetro* d'aumento in quest'ultimo produceva mezzo millimetro d'incremento in quello. Con questa regola

sperimentata abbastanza giusta io riduceva l' apparente altezza del battente segnata co' soliti spilli sulla fronte del Regolatore alla vera e genuina altezza del battente attivo in ciascheduna sperienza; e questo è quello che si troverà descritto sotto il consueto nome di battente mezzano nella seguente tavola delle sperienze.

153. La durata di ciascuno sperimento era di 240'' centes. come ne' precedenti, e parimente gli spilli per notare il battente segnato dall' acqua su la fronte del Regolatore erano posti a luogo, il primo alla 20.ª vibrazione dal pendolo a secondi centes., il secondo alla 120.ª, ed il terzo alla 220.ª vibrazione. Furono inoltre usate le cautele praticate nelle antecedenti prove. L' esito delle sperienze fu quale è indicato nella tavola che soggiungo.

TAVOLA IV.

Sperienze del Regolatore = a piena doccia = di dispensa ridotta a mezza misura.

Sezione della doccia = met. qu. 0,08157. Durata d' ogni esperimento = 240" cent.

Numero delle sperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell' efflusso secondo il calcolo.	Quantità dell' efflusso secondo la sperienza.	Errore della sperienza in ragione del tutto.
	metri.	metri cubi.	metri cubi.	
1	0,01563	9,3662	9,6111	+ 0,026
2	* 0,01500	9,1755	9,3780	+ 0,022
3	0,01488	9,1387	9,3002	+ 0,017
4	0,01633	9,5883	9,4298	— 0,016
5	0,01650	9,6233	9,4039	— 0,022
6	0,01450	9,0213	9,0411	+ 0,002
7	0,01588	9,4408	9,3585	— 0,008
8	0,01500	9,1755	9,3780	+ 0,022
9	0,01500	9,1755	9,2225	+ 0,005
10	0,01738	9,8766	9,6111	— 0,026
11	0,01938	10,4294	9,9480	— 0,046
12	0,01345	8,6885	8,9634	+ 0,031
13	0,01563	9,3661	9,3520	— 0,001
14	0,01713	9,8053	9,5852	— 0,022
15	0,01555	9,3422	9,3002	— 0,004
16	0,01475	9,0987	9,1966	+ 0,010
17	0,01655	9,6379	9,4557	— 0,018
18	0,01805	10,0652	9,8[illegible]02	— 0,019
19	0,01535	9,2910	9,3780	+ 0,009
20	0,01805	10,0652	9,8443	— 0,022
21	0,02025	10,6583	10,1293	— 0,049
22	0,01775	9,9810	9,8184	— 0,016
23	0,01425	8,9432	9,9670	+ 0,013
24	0,01544	9,3091	9,3261	+ 0,001
25	0,01370	8,7689	8,9893	+ 0,025
26	0,01412	8,9023	9,0411	+ 0,015
27	0,01413	8,9054	9,1707	+ 0,029
28	0,01468	9,0771	9,1318	+ 0,006
29	0,01488	9,1387	9,1707	+ 0,003
30	6,01781	9,9981	9,6630	— 0,033
Somme	0,47700	283,0535	282,1352	
	Differenza . . . . = 0,9183			
	Errore mezzano della sperienza			= — 0,0032

* In altro manoscritto questo battente fu per isbaglio posto = 0,01600, che dava l' errore della sperienza = — 0,010 in vece di + 0,022; donde risultava in fine l' errore mezzano = — 0,0043 in cambio di — 0,0032.

154. Dalla somma dei battenti divisa pel numero delle sperienze risulta che il medio fra tutti fu di met. 0,01590, vale a dire un *millimetro* circa minore del battente 0,017, che corrisponde all' esatta dispensa = a mezza misura =; non essendo possibile pei variabili accidenti del rigagno il cogliere nel preciso punto di tal battente, il che è poi del tutto inutile, giacchè il calcolo è applicato al vero e genuino battente di ciascheduno sperimento.

I massimi errori di queste sperienze sono quelli della 11.ª e della 21.ª, i quali giungono quasi al cinque per cento, ch' è più del doppio del massimo errore della precedente tavola; la qual cosa è ben consentanea a quanto abbiamo avvertito intorno alla maggiore difficoltà del geloso sperimento cagionata dalla molta piccolezza del battente: ed è degno di osservazione che in queste non meno che nelle precedenti sperienze i massimi svarj corrispondono ai maggiori battenti, e sono negativi; il che mostra che in entrambe è ciò derivato dall' avere a bello studio tenuto la traversa più alta del bisogno, come già venne notato parlandosi della precedente tavola. E si potrà di più nella presente osservare che tutti gli errori negativi, i quali giungano al due per cento, corrispondono a battenti non minori di 0,01650, ed ai battenti minori di questo non s' accoppiano che errori o assai più piccoli o positivi; il che tutto collima a mostrare ciò ch' era in fatti, vale a dire che l' altezza abbondante della traversa riusciva più eccedente pei maggiori che pei minori battenti. Per altro sebbene l' altezza della traversa fosse qua più, là meno, ma sempre soverchia per tutti i battenti (così avendo voluto a bella posta sperimentarla), pure in ultimo l' errore mezzano della totalità degli sperimenti non ha potuto giugnere che soltanto ad un terzo per cento, il che mostra evidentemente che alquanto soverchio nell' altezza della traversa (e lo stesso per contraria ragione dicasi di alquanto scemo) non pregiudica in alcun modo sensibile alla giustezza della dispensa.

CAPITOLO XIII.

Delle Sperienze del Regolatore = a libera cateratta. =

155. In queste sperienze volli far uso di una cateratta che avesse di luce una decima parte di metro quadrato, e che fosse di forma quadra; essa era scolpita in un piano verticale ed abbastanza ampio per lasciare intorno alla bocca una fascia piana abbondantemente sufficiente per la consueta contrazione della vena; il contorno della cateratta era formata con quattro lastre di ferro, la cui grossezza era

di met. 0,002, la precisa larghezza della sua luce era di met. 0,3155, e la precisa altezza di met. 0,3166, le quali davano l'esatta sezione di met. quad. 0,09988. L'altezza di questa cateratta era pressappoco quella già da noi assegnata pel Regolatore a libera cateratta (art. 135); nel battente ho largheggiato alquanto più, perchè in queste sperienze non poteva regolare l'affluenza del rigagno in modo d'ottenere in ciascheduna sperienza un battente pressochè eguale a met. 0,0418 suggerito nel citato articolo, e di rendervelo poco men che costante (come richiede la maggior esattezza della sperienza, e come fu perciò sempre osservato in questi ed in altri sperimenti) senza consumarvi troppo lungo tempo; e non valeva la pena il prendersi tal cura, poichè in queste sperienze alquanto divario di battente conta assai poco, atteso che qui tutta l'altezza della cateratta fa funzione di battente; oltre di che, come abbiamo altrove osservato, per lo scopo delle sperienze è del tutto indifferente l'usare o questo o quel battente, poichè il calcolo e lo sperimento sono sempre adattati al vero e genuino battente di ciascheduna prova.

Queste sperienze furono istituite dopo quelle della tavola seconda, e si fece uso della medesima cava per ricevere e misurare l'acqua sgorgata. La durata d'ogni sperimento era di 60'' centes. (si rammenta essere 1'' centes.° $= \frac{\text{giorno}}{100000}$). Per segnare il battente i tre soliti spilletti erano appuntati a sito alle vibrazioni 10.ª, 30.ª, 56.ª del pendolo che notava i detti secondi. Nel resto si sono usate le avvertenze praticate nelle anzidette sperienze.

156. Il prodotto d'ogni sperienza è posto al paragone del prodotto parabolico modificato col *coefficiente* costante $= \frac{265}{432}$ secondo le osservazioni del capitolo IX, nè ad altro che a questo confronto mirano le presenti prove, delle quali si vede l'avvenimento nella seguente tavola.

TAVOLA V.

Sperienze del Regolatore = a libera cateratta. =

Forma della cateratta quadra, luce = met. quad. 0,09988.
Durata d'ogni sperienza = 60″ centes.

Numero delle sperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell'acque sgorgata. Prodotto	
		Parabolico.	Sperimentale.
	metri.	metri cubi.	metri cubi.
1	0,0664	6,5144	6,7180
2	0,0658	6,5048	6,5760
3	0,0640	6,4757	6,5445
4	0,0745	6,6428	6,5918
5	0,0968	6,9814	6,8441
6	0,0649	6,4903	6,6549
7	0,0980	6,9991	7,0176
8	0,0885	6,8578	6,7811
9	0,0883	6,8547	6,8599
10	0,0770	6,6818	6,9545
11	0,0810 ½	6,7444	6,6391
12	0,1008	7,0402	6,9230
13	0,0808	6,7406	6,7022
14	0,0700	6,5718	6,7811
15	0,0708	6,5845	6,5445
16	0,0713	6,5925	6,5760
	Somme	107,2768	107,7083
	Differenza . . . . = 0,4315		
	Svario mezzano . . . . = 0,0040		

157. Non si pone in questa tavola l' errore della sperienza, perchè il calcolo parabolico non essendo di sua natura esatto, rimane incerto se lo svario che passa fra il suo prodotto e quello della sperienza sia errore dell' uno, anzi che dell' altra, o di ambedue.

Le maggiori luci, nelle quali il signor Michelotti ha sperimentato la ragione della vena contratta alla vena lata $= \frac{265}{432}$ da noi assunta per *coefficiente* costante nel calcolo del prodotto parabolico, furono di nove pollici quadri del piede di Parigi, che corrispondono a met. quad. 0,00659; onde la nostra cateratta fu di una luce quindici volte maggiore di queste; nulladimeno essendosi trovato meno di un mezzo per cento di divario fra il prodotto delle precedenti sperienze ed il risultato del calcolo modificato con tal coefficiente costante, convien dire che la contrazione di vena nelle mie sperienze eseguite in grande sia stata eguale o pochissimo discrepante da quella osservata dal Fisico Piemontese ne' suoi sperimenti in piccolo; la qual cosa darebbe peso alla supposizione altrove da noi motivata, vale a dire che la dimostrazione della costante contrazione di vena, quando questa si faccia su due lati soli, ovvero a due sole variabili, e sia compresa fra superficie piane, non curve, vaglia ancora per la contrazione fatta su quattro lati, e però a tre variabili e con superficie curve, quali sono le contrazioni de' mentovati sperimenti. Sembra adunque che sopra l' autorità della sperienza si possa credere costante questo coefficiente che esprime l' effetto della contrazione di vena, e si possa quindi, malgrado qualunque allargamento della cateratta da noi descritta nel capitolo IX, salva la sua altezza e salvo il battente, ottenere sempre inalterabilmente la debita misura dell' acqua in giusta proporzione della grandezza della luce, e per la medesima sezione di questa rappresentata, nel che sta la prima condizione di una pratica per dispensa d' acqua, che dire si possa convenevole.

Ma senza notare che comunemente i risultamenti delle sperienze lasciano sempre desiderare qualche cosa dal canto della certezza, della puntualità e della generalità, onde non sono mai da porsi al paragone de' risultamenti del calcolo, noi faremo particolarmente riflettere che tutti gli sperimenti, compresi ancora i miei, ne' quali sembra riscontrarsi una costante contrazione di vena, sono stati eseguiti con luci quadre o rotonde, e perciò di due dimensioni uguali; volendo dunque attenerci all' autorità della sperienza, converrebbe fare tutte le bocche di derivazione di forma quadra; ed allora non si può più conservare costante la loro altezza, e la determinazione di questa diventa in pratica un affare intricato, nè più si ha uniformità di metodo, nè si può mai sempre ottenere la indispensabile condizione che la grandezza della luce esprima essa medesima la quantità dell' acqua

che si dispensa. All' opposto poi se vorremo, come fu suggerito, conservare invariabile l' altezza, adattando la larghezza alla quantità or maggiore, or minore dell' acqua che si vende, facendo in conseguenza le bocche or più, or meno bislunghe secondo il bisogno, rinunzieremo del tutto all' appoggio della sperienza, e rimarrà per lo meno affatto incerto se nelle varie forme bislunghe delle cateratte si possa considerare invariabile la contrazione della vena, e conseguentemente sarà incerta la fedeltà della dispensa dell' acqua. Altri difetti di questa pratica abbiamo altrove rammentati, ed aggiungeremo quì per ultimo, che se gli spigoli della cateratta rivolti contro il corso dell' acqua non sono ben taglienti, per poco che abbiano del rotondo o dello smussato, lo smusso, facendo funzione d' imbuto, può sensibilmente alterare la misura dell' acqua, il che apre la via a non indifferenti frodi. Ma troppo ancora abbiam detto per mostrare l' imperfezione di somigliante modo di dispensa d' acque anche nella supposizione che mercè dei nostri suggerimenti si cercasse di renderla assai meno viziosa di quello che sia in pratica (*).

CAPITOLO XIV.

Delle sperienze del Regolatore a doccia non piena.

158. Avanti di por fine agli sperimenti che aveva intrapresi, io volli fare alcune prove ancora del primo mio Regolatore senza la traversa, vale a dire a doccia non piena, e colla corrente a superficie inclinata.

Quando il battente dell' acqua alla fronte del Regolatore segnava intorno a 0,080 sopra il livello delle sponde della doccia al suo principio, l' acqua che all' uscire dall' imbuto, ed al primo entrare nel canale della doccia lo empieva del tutto pareggiando l' altezza delle sponde, andava poi più e più abbassandosi sotto il livello di queste, finchè allo sbocco si trovava circa met. 0,20 sotto di esso. La

(*) Io ritengo che si possa considerare invariabile la contrazione della vena, anche per le luci rettangolari, purchè abbiano un battente considerevole. Imperocchè se gli sperimenti addimostrano che per le luci circolari e quadrate la contrazione ha sempre luogo, presso a poco, nella stessa proporzione, perchè si dovrà dubitare, che sperimentando luci rettangolari, debba il fenomeno avvenire in un modo differente? Abbiamo già un' esperienza di Bossut fatta con luce rettangolare, la quale posta al confronto di quelle fatte da esso lui con luci circolari e quadrate, si vede che la contrazione della vena può aversi per costante. Un tale confronto è posto in chiaro nella tavola 3. art. 19. della mia memoria più volte nominata, nella quale l' esperienza 9 è quella di cui si ragiona.

superficie della corrente al principio ed al fine della doccia era visibilmente curva; ma fra questi due estremi, cioè nel mezzo la curvità sua era all' occhio insensibile, e potevasi trattare qual piano inclinato. Alla precisa metà della doccia, vale a dire a met. 0,72 dal confine dell' imbuto, la tangente dell' angolo d' inclinazione più volte misurata fu ritrovata = 0,13. Il variare di alcuni *millimetri* del battente non porta divario sensibile in questa misura.

Nel adattare il Regolatore rimase al fondo della doccia una piccola inclinazione a seconda del corso dell' acqua, la cui tangente misurata si rinvenne = 0,026. Avveguachè questa non porti che un divario di qualche millesima parte nel calcolo, nondimeno se ne tiene conto.

159. Abbiamo pertanto nella doccia una corrente compresa nel descritto sito fra quattro superficie piane, due delle quali radono le sponde, e sono perciò verticali e parallele fra loro, e le altre due, ciò sono la suprema e l' infima, hanno un' inclinazione pel verso della corrente, la di cui tangente segneremo m per la prima, e n per la seconda. Essa perciò si trova alla condizione contemplata nell' art. 86, ed avremo in conseguenza la quantità dell' acqua che passa dalla sua sezione in ciascun minuto secondo della nuova divisione, mercè della formola

$$Q = \frac{L\chi}{n-m}\left[\textit{Arc. tang. } n - \textit{Arc. tang. } m\right],$$

nella quale $m = 0{,}13$; $n = 0{,}026$; e la larghezza costante L di questa sezione della doccia distante met. 0,72 dal confine dell' imbuto $= 0{,}199$.

Nel valore della χ non entra il tempo, atteso che la corrente si trova in uno stato permanente; onde per determinare la χ, avremo l' equazione dell' art. 66

$$\chi = a\,(v)\,\sqrt{(1 + m^2)};$$

a denotando l' altezza verticale della corrente, e (v) la sua velocità in superficie. Potendosi da questa superficie risalire ad un punto dove l' acqua alla fronte del Regolatore è stagnante, si troverà per l' art. 69

$$(v) = \sqrt{(2gb)},$$

b indicando la differenza di livello fra la superficie dell' acqua stagnante avanti il Regolatore e la superficie dell' acqua corrente nella doccia all' indicato sito: dunque

$$\chi = a\,\sqrt{(2gb)}\,\sqrt{(1 + m^2)};$$

conseguentemente

$$Q = 0{,}199 \frac{a\sqrt{(2gb)}\sqrt{(1+m^2)}}{n-m}[\textit{Arc. tang. } n - \textit{Arc. tang. } m].$$

160. La quantità Q moltiplicata pel numero de' minuti secondi centes. che in ciascuna sperienza misura la durata dello sgorgamento dell' acqua, esprime in metri cubi l' intera massa dell' acqua in ogni sperimento sgorgata. L' altezza a della corrente, e la differenza b di livello fra la sua superficie e quella dell' acqua stagnante variavano alquanto dall' una all' altra prova, onde a ciascheduna sono nella seguente tavola notati i corrispondenti valori. In ogni sperienza era segnato coi soliti tre spilli il battente dell' acqua osservato alla fronte del Regolatore, ed il mezzano fra i tre pochissimo fra loro discrepanti è quello che viene descritto nella tavola. Ecco pertanto l' avvenimento di questi sperimenti.

TAVOLA VI.

Sperienze del Regolatore = a doccia non piena = con superficie e fondo inclinati.

Larghezza della corrente alla metà della doccia = 0,199.
Tangente m *d' inclinazione della superficie* = 0,13.
Tangente n *d' inclinazione del fondo* = 0,026.
La durata del tempo è misurata a minuti secondi centesimi.

Numero delle sperienze.	Durata del tempo.	Battente mezzano.	Altezza a della corrente.	Differenza b di livello.	Quantità dell' efflusso secondo il calcolo.	Quantità dell' efflusso secondo la sperienza.	Errore della sperienza in ragione del tutto.
		metri.	metri.	metri.	metri cubi.	metri cubi.	
1	199''	0,0786	0,2981	0,2122	20,832	20,265	— 0,0272
2	176	0,0806	0,2990	0,2133	18,530	18,115	— 0,0229
3	174	0,0744	0,2898	0,2163	17,880	17,508	— 0,0208
4	174	0,0762	0,2925	0,2154	18,009	17,583	— 0,0236
5	168	0,0765	0,2929	0,2153	17,408	17,563	+ 0,0089
6	163	0,0857	0,3057	0,2117	17,480	17,951	— 0,0302
7	163	0,0870	0,3077	0,2110	17,565	17,142	— 0,0240
8	164	0,0777	0,2948	0,2146	17,076	17,760	— 0,0185
				Somme	144,780	141,887	
				Differ.ª	. . = 2,893		

Le quantità mezzane risultanti dalle otto sperienze sono come qui sotto, cioè:

Tempo.	Battente.	Altezza. a	Differenza b di livello.	Quantità dell' efflusso secondo il calcolo.	Quantità dell' efflusso secondo la sperienza.	Errore mezzano della sperienza:
172'',6	0,0796	0,2975	0,2137	18,097	17,736	— 0,0199

161. Conviene osservare che, posta da canto la quinta sperienza, la quale, sebbene sembri la più esatta, io considero come la più errata, tutte le altre si accordano nel dare una quantità alquanto difettiva, ed il massimo svario che passa fra loro non eccede 0,012, come non eccede che di un solo centesimo il massimo errore di queste sperienze paragonato coll' errore mezzano, nel che debbono reputarsi più regolari questi sperimenti che quelli della seconda tavola, e di altri ancora. Ma dalla costanza del piccolo errore negativo veniamo avvertiti che intervenne qualche errore nella osservazione e nelle misure (il che tutto appartiene alla parte sperimentale), ovvero che ci fu nelle sperienze qualche cagione atta a diminuire alquanto la dispensa dell' acqua. Ora il primo dei due inconvenienti era assai facile a succedere, ed il secondo era inevitabile. Imperocchè, quanto al primo, si può credere che alla precisa metà della doccia la superficie del fluido avesse un grado di curvità sensibile alla sperienza, benchè insensibile alla vista; in fatti si potrebbe facilmente mostrare che il preciso punto, in cui la superficie dovea essere più spianata che altrove, avea a trovarsi non nel mezzo, ma alquanto più vicino al principio che al fine della doccia. Oltre di che la superficie della corrente, che nei primi sperimenti fatti colla traversa ed a piena doccia all' uscire dall' imbuto (ove prendevasi la misura della sezione) era perfettamente piana e tranquilla, ne' presenti, tolta la traversa, ed acquistata perciò dall' acqua novella caduta entro la doccia medesima, si vedeva palpitante ed ondeggiante; era pure alquanto ineguale la sua altezza dall' una all' altra sponda; quando però al dato sito, distante 0,72 dall' imbuto, calando dal livello delle sponde un regolo largo quanto la doccia per misurare l' abbassamento della corrente sotto le sponde medesime, onde dedurne la sua altezza segnata *a* e la differenza *b* di livello a tal sito corrispondenti, io teneva l' istrumento immobile alla medesima altezza, la corrente ora vi batteva dentro in qualche parte o in tutta la sua larghezza, ed ora vi passava sotto senza punto toccarlo, tale incostanza era per così dire costantissima, e regnava rispettivamente su tutti i punti della corrente presi a traverso della doccia. Questa specie adunque di vacillamento nella superficie dell' acqua può con tutta facilità introdurre qualche piccolo errore nelle misure delle quantità *a*, *b*, come ognun vede.

Quanto poi al secondo inconveniente, è agevole il persuadersi come debba necessariamente derivare dalla medesima sorgente, vale a dire dall' ondeggiamento cui soggiace la corrente; imperocchè in ogni sorta di agitazione eccitata in una corrente, oltre che rendonsi obblique le vene capillari, si diminuisce la copia dell' acqua di ciaschedupa tramandata, e si va distruggendo quella parte di

movimento ch' è in onde convertita; conciossiachè le onde fra loro contrastando e colle sponde, non si premono solamente, ma in verità si percuotono, non altrimenti che facciano i corpi solidi, come ne dà a divedere il romoreggiamento che ne viene; e colla percossa si estinguono a vicenda il movimetto. Simil perdita di moto si è fino ad ora da poco attenti osservatori attribuita alla difficoltà o resistenza che prova il fluido nello strisciarsi lungo le pareti de' canali; difficoltà che punto in ciò o poco suole avere di colpa.

Le due descritte origini d'errore hanno potuto peravventura accoppiarsi per dare lo svario negativo e quasi costante del due per cento in tutte le sperienze.

162. Applicando il calcolo parabolico allo sbocco dell'imbuto, dove $a = 0{,}41285$, $L = 0{,}1976$, e secondo i risultamenti mezzani della tavola $b = 0{,}0796$, tempo $= 172'',6$, la quantità dell'acqua sgorgata in ciascheduna sperienza si troverebbe di met. cub. 28,113. Considerando poi l'obbliquità della superficie qual contrazione di vena che si operi su d'uno dei quattro lati (giacchè per la forma della macchina gli altri tre ne vanno esenti), e facendo alla detta somma la deduzione che corrisponda alla quarta parte dello sqapito che suole dalla contrazione cagionarsi, si avrebbe tuttavia un eccessivo prodotto parabolico = met. cub. 25,396. Si troverà similmente un considerabile eccesso, applicando il calcolo parabolico colla medesima modificazione alla sezione situata alla metà della doccia, computando sopra gli elementi dalla tavola somministrati. La ragione di queste eccedenti somme in confronto della giusta quantità = 18,097 dipende dal non essere la contemplata sezione a libera cateratta: e ciò conferma il difetto generale delle pratiche nelle quali l'acqua dai moduli non esce a libera cascata.

ANNOTAZIONI.

ANNOTAZIONE I.ª

(Alla prefazione per gli Accademici.)

Innanzi di essa potrete chiamare la poca discretezza di quello Straniero già da Voi in altro tema additato, ecc.

La Società dei Quaranta propose nel 1804 un premio „ a chi meglio ed interamente si farà ad investigare quanto siano solidi e giusti i principj ai quali appoggia le sue nuove teorie idrauliche l' autor recente dell' opera intitolata Nouveaux Principes d' Hydraulique par Bernard, 1787, ecc. „ Dall' esatto calcolo che abbiamo dato pel movimento delle acque apparisce, che questo dipende non solamente dalla forza *acceleratrice*, di cui è animata ogni fluida stilla, ma eziandio dalla forma dell' esteriore superficie, a seconda della quale è obbligata muoversi la corrente; ma l' autore di cui si parla è alienissimo dall' avere tal cosa in considerazione; ciò basta per la sua confutazione; se non che a questo difetto, che gli è comune con altri scrittori, egli aggiunge altri errori suoi particolari.

Imperocchè considerando ripieno d' acqua un vaso che abbia forma di prisma e sia pertugiato al fondo, supponghiamo in guisa che l' orifizio occupi due parti di tutta l' ampiezza, ed il sodo del fondo ne occupi tre, egli pretende che questo regga tre quinte parti del peso dell' acqua nel vaso contenuta, e non vuole che siano due le altre parti del medesimo peso, le quali rimangono operose per dar moto al fluido, ma quattro; poichè immagina che il fondo equivaglia ad un piano inclinato, il quale operando la *decomposizione* d' un peso o forza $=5$, e distruggendone per supposizione colla sua resistenza una $=3$, deve lasciar libera ed attiva, come ognun sa, altra forza $=\sqrt{(5^2-3^2)}=4$, non riflettendo che questa forza $=4$ per essere secondo il supposto affatto libera d' intoppo, verrebbe tutta impiegata nel moto dell' acqua, e conseguentemente produrrebbe nel fluido una quantità di moto $=\frac{4}{5}$ di quello che sarebbe dalla gravità generato nella fluida massa, se questa cadesse liberamente nel voto, il che si oppone alla manifesta verità, trovandosi in effetto minore di $\frac{4}{5}$. Ma lasciando ancora ciò da canto, se il fondo colla

parte solida sostenta tutto il peso della fluida colonna ad essa soprapposta, esso non fa l'uffizio di piano inclinato; e se all'opposto fa le veci di piano inclinato, più non s'intende perchè sostenga tutto il peso del corpo d'acqua che posa sopra la soda sua base, o un peso a questo equivalente. In effetto poi nelle parti superiori del vaso tutta l'acqua discende perpendicolarmente, e nelle parti inferiori affacciandosi all'orifizio per sortire, tutte le fluide stille si muovono sopra infiniti piani d'inclinazione estremamente diversi, correndo orizzontalmente quelle che rasentano il fondo, e cadendo a piombo quelle che discendono per l'asse del vaso; tanto al vero eterogenea è l'idea immaginata dall'autore d'un solo piano inclinato, che operi ad un modo la *decomposizione* del peso di tutta la fluida massa.

L'autore applica somiglianti principj anche al movimento dell'acqua ne' canali di fondo orizzontale; e supponendo che, mentre l'acqua alla loro estremità sgorga a libera caduta, venga sempre nei canali medesimi mantenuta alla medesima altezza fino all'estremo orlo dello sbocco (condizione strana e ben difficile ad accoppiarsi coll'assunto dell'autore), ne ricava, contro l'evidenza della geometrica verità, che la velocità ragguagliata della vena sgorgante non è che la metà di quella che rendono le tavole paraboliche. Egli deduce altresì da' suoi principj che, collocando sul fondo di un canale qualche traversa, l'acqua che giace sotto il livello della sua cresta rimane stagnante, mentre l'altra che supera l'altezza dell'ostacolo seguita il suo corso, la qual cosa è totalmente opposta alle nostre dimostrazioni ed alle sperienze del nostro Regolatore = a piena doccia. =

Non lascerò tuttavia di dire che l'autore in mezzo a questi ed altri molti suoi garbugli, che sarebbe troppo lungo il descrivere, ha talvolta riconosciuto i falli nei quali sono incorsi gli Scrittori Italiani. La nostra geometria serve a dare un retto giudizio sopra l'uno e sopra gli altri, ed a risolvere compiutamente l'analogo problema dell'Accademia.

Il nostro calcolo somministra la soluzione di altro quesito proposto nel 1781 dall'Accademia di Mantova ne' seguenti termini: „ Stabilirsi la vera teoria delle acque uscenti da fori aperti ne' vasi, e mostrare in quali circostanze possa ella applicarsi alle acque correnti negli alvei naturali „. Il signor Coccoli di Brescia coraggiosamente cimentando le sue forze colla difficoltà del problema, s'accinse ad integrare l'equazione de' fluidi a due variabili. Ma egli diede un' espressione imperfetta dell'integrale, e conseguentemente delle due velocità p, q d'ogni fluido elemento, come si riconoscerà dal confronto dei valori ch'egli (Dissertazione ecc., facc. 22.) assegna alle V, v equivalenti alle nostre p, q cogli esatti valori delle medesime

quantità da noi rappresentati all' articolo 41, nel qual errore egli fu preceduto da altri, come si osserverà nelle *Lezioni di Calcolo differenziale* di Cousin, facc. 311 e 312. Oltre di che non avendo il nostro autore potuto determinare le funzioni arbitrarie che entrano nell'integrale, fu costretto a confessare (facc. 25) che *tali e tante sono le difficoltà da superarsi, che fanno disperare di mai poter giungere al caso di applicare alla pratica questo rigoroso metodo:* quindi per la prima parte dell'accademico problema risguardante il movimento dell'acqua ne' vasi pertugiati fu costretto a ricorrere all'usato metodo vizioso, che a dispetto del vero suppone animate d' un medesimo movimento tutte le particelle fluide che formano uno strato orizzontale. E quanto alla seconda parte concernente il corso delle acque negli alvei naturali, ch'è la ricerca più nobile e più importante, l'autore, dopo alcuni poco accurati ed infruttuosi tentativi, finì col professare (facc. ultima) saper egli soltanto mostrare che il problema *non potrà mai essere sciolto*. Nulladimeno l'onorata e saggia Accademia di Mantova coronò col premio il suo scritto, e meritamente, poichè anche il solo sforzo dell'ingegno in tal genere di ardue ricerche è degno di ricompensa.

La dottrina del movimento delle acque sia ne' vasi, sia ne' canali è la medesima, ogni vaso essendo un canale, ed ogni canale un vaso; ed il problema dichiarato insolubile nella Memoria di Cocoli è quello che si scioglie nella mia. Onde può a ragione dirsi che questa serve a risolvere tre problemi accademici, vale a dire i due del 1804 e del 1813 proposti dalla Società di Verona, e quello del 1781 saviamente messo in campo dall'Accademia di Mantova, i quali altrimenti erano lasciati insolubili.

ANNOTAZIONE II.

(*All' art.* 19.)

Potrebbe sembrare che in virtù dell'equazione di condizione $N=0$ il termine $-\sigma DN$ ch' entra nella prima equazione dell'art. 19 fosse $=0$, e però eguale allo zero o ad una quantità costante il suo integrale. Ma questa equazione di condizione, come qualunque altra di tal genere, si riferisce alle ordinate x, y, z di ciaschedun punto della massa, ed alle respettive variazioni δx, δy, δz ch' esse fanno per un movimento al medesimo punto conferito, le quali variazioni per soddisfare all' equazione di condizione debbono esser tali che rendano $\delta N=0$. Ben diversa è la cosa, se in vece delle variazioni δx, δy, δz dovute al movimento di un punto, si considerino le differenze Dx, Dy, Dz che passano fra le ordinate x, y, z, x',

y', z' di due punti diversi: queste differenze non avendo alcun legame colla condizione del moto e colla sua equazione, possono avere qualunque diverso rapporto fra loro; onde la differenziale DN che da esse risulta può ottenere qualsivoglia valore. Un esempio chiarirà la cosa.

La condizione del moto generalmente espressa per $N = o$ sia la seguente:

$$\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]} - C = o$$

C denotando una costante. Questa condizione è quella di un corpo solido, un punto del quale che abbia le a, b, c per ordinate, sia fisso ed immobile. Notiamo L il primo termine di questa espressione, che rappresenterà la distanza che giace fra un punto il quale abbia le x, y, z per ordinate, ed il centro del moto, ovvero il punto immobile che ha le ordinate a, b, c; sarà $N = L - C$. Intendasi conferito un movimento qualunque al punto cui appartengono le ordinate x, y, z; dovendo per l'equazione di condizione rimanere invariabile nel moto la distanza L del punto mobile dal punto immobile, le variazioni δx, δy, δz avranno ad essere tali che ne venga

$$\frac{x-a}{L}\delta x+\frac{y-b}{L}\delta y+\frac{z-c}{L}\delta z=\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)\delta x+\left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)\delta y+\left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)\delta z=\delta L=o;$$

e quindi $\delta N = \delta L = o$.

Ma se invece risguarderemo due diversi punti della massa, uno de' quali abbia le ordinate x', y', z', e l'altro le x, y, z, talchè sia $x' = x + Dx$, $y' = y + Dy$, $z' = z + Dz$, le due distanze L', L di questi punti dal centro del moto non saranno eguali; onde

$$\frac{x-a}{L}Dx+\frac{y-b}{L}Dy+\frac{z-c}{L}Dz=\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)Dx+\left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)Dy+\left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)Dz=L'-L=DL$$

non sarà più $= o$; onde essendo $DN = DL$, non si avrà $DN = o$.

Ognun vede che la ragione di questa discrepanza fra le δN, DN sta nell'essere le δx, δy, δz assoggettate all'equazione di condizione $N = o$ relativa al movimento, e nell'essere le Dx, Dy, Dz dalla medesima indipendenti. Si può per altro di qua ricavare che sebbene l'uso permetta d'indicare generalmente le equazioni di condizione per $M = o$, $N = o$, ecc.; esse tuttavia più convenientemente si esprimono per $\delta M = o$, $\delta N = o$, ecc.

Ritornando adunque all'equazione dell'art. 19, si conoscerà non dover essere $-\sigma DN = o$, e perciò l'integrale di questo termine sarà una quantità variabile, il cui valore dipenderà dal valore delle x, y, z, delle quali è funzione. L'osservazione della presente nota,

qui collocata per maggior chiarezza, appartiene ancora all' art. 18. §. *Allora le tre espressioni* ecc.

ANNOTAZIONE III.ª

(*All' art.* 23.)

Inoltre le sperienze che si fanno intorno all' acqua, l' uso squisito delle bilance idrostatiche, *il livello costante al quale si conforma la superficie tranquilla de' grandi laghi e del mare, obbligano a dover considerare l' acqua come dotata di gelosissima e perfetta fluidità ecc.*

Secondo le sperienze di Rumford, eseguite con gelosa bilancia *idrostatica*, un corpo che presenti al contatto dell' acqua una superficie di pollici quadri 368 (mis. ingl.), perde di peso un grano più che non è il peso di egual volume di acqua; e questo eccesso di peso perduto sarebbe effetto della coerenza o viscosità delle fluide particelle che sostengono il corpo immerso. Se questo, qualunque sia la sua natura, sperimenta, come par ragionevole il supporre, una medesima resistenza per la tenacità del fluido in cui s' immerge; un globo di acqua che ha pollici 10,8233 di diametro, e pollici quadrati 368 di superficie (mis. ingl.), il quale pesa 168060 grani (peso di Troy), perderebbe una cento sessantotto mila sessantesima parte del suo peso a cagione della tenacità delle parti acquee che lo circondano; quantità estremamente piccola, che può mostrare l' eminente grado di fluidità che ha l' acqua. Ma potendosi dubitare ancora che lo sperimentato svario di peso venga se non in tutto, in parte almeno da qualche difetto della bilancia o della minuta sperienza, egli riesce meglio consultare su di ciò i grandi fenomeni della natura.

Io dirò a questo proposito delle osservazioni fatte nel 1810 e nel 1811 per più mesi sul livello dell' acqua, e sopra le sue variazioni alle estremità del Lario o lago di Como. Questo lago riceve l' Adda, che gli dà principio al confine della Valtellina, ove ha Gera alla destra, e Colico (Caput lacus) alla sinistra; a Bellaggio (Bivium lacus) si divide in due rami, l' uno piegando a dritta si volge a Como, donde l' acqua non ha uscita, l' altro si stende in dirittura del tronco fino a Lecco, ove di nuovo manda fuori l' Adda: noi non parleremo che del corpo diritto del lago che giace fra Colico e Lecco.

Due movimenti in esso si osservano, l' uno di semplice bilancio, quale si farebbe in due canne comunicanti di un sifone, e l' altro di corso fluviale. Col primo l' acqua tende a mantenersi bilanciata dall' una all' altra estremità del lago; coll' altro il lago a guisa di fiume

seguita a muoversi, benchè lentamente, dall' un capo verso l'altro: ambedue questi movimenti debbono essere comuni a tutti i laghi ne' quali entra, e da cui sorte un fiume.

Quanto al primo movimento, le osservazioni danno a conoscere che all' alzarsi o abbassarsi del lago ad una estremità, si alza o si abbassa nel medesimo tempo anche all' altra con poco divario or di più, or di meno, dipendente dall' effetto incostante de' venti, o da qualsivoglia altra cagione particolare, ed anche da qualche errore delle osservazioni. E siccome tale corrispondenza di variazioni osservate ad una medesima ora del giorno non si deve fare per salti, ma gradatamente e con andamento continuato, talchè a mano a mano che cresce o cala l'altezza dell' acqua ad una estremità, cresca o cali parimente su tutta l' estensione del lago fino all' altra estremità, converrebbe credere che ogni nuova sottilissima falda o nastro sottilissimo di acqua che si sopprapponga alla superficie del lago là dove ha principio, basti col momento lievissimo dell' impercettibile suo peso ad agitare tutta la gran mole dell' acqua nel lago contenuta, forzandola a ristrignersi nelle sue file per potersi sollevare in altezza, finattanto che si pareggi col livello della sopraggiunta fluida falda; il che mostrerebbe una sensibilità o fluidità nell' acqua senza limiti. Ma poichè questa considerazione per essere appunto illimitata non può mettersi in figura di computo aritmetico, noi centeremo in vece sopra il secondo movimento, col quale il lago imita, benchè da lungi, il corso de' fiumi; ed il conto verrà presso coloro i quali avranno sufficiente pratica delle idrauliche cose per conoscere la giustezza del discorso.

La pendenza del lago, da cui sola dipende il movimento perenne delle sue acque, è sì piccola, che sebbene nelle piene crescer debba necessariamente a più e più doppj, come vedremo, pure dalle diligenti osservazioni fatte per più mesi mentre cresceva o calava il lago agl' *idrometri* collocati nelle sue estremità, non si può ricavare alcun certo indizio di qualche vantaggio di pendenza che vada il lago acquistando al crescer delle sue acque, o perdendo al calare. Per farsi adunque qualche idea della pendenza che può avere, conviene ricorrere a qualche osservazione di altr' acqua, e quindi farne induzione al lago. A tal fine cade in acconcio quanto ha osservato M. de la Condamine intorno alla pendenza del fiume delle Amazoni. Questo gran fiume, il massimo tra i fiumi del globo, dal forte Panxis al mare, viaggio per acqua di 600. nostre miglia geografiche, non avrebbe di pendenza, secondo le osservazioni del matematico francese, che circa dieci piedi Parigini, vale a dire o$^{met.}$,0000094 per ogni metro; prendiamola più che tripla, e facciamola o$^{met.}$,000003 per allontanare ogni sospetto di errore che l' abbia renduta minore

del vero. La larghezza del fiume è di una lega, quella del lago si può qui valutare di mezza lega: quanto alla profondità, si sa soltanto che nel fiume non si trovò fondo a 103 braccia, sono metri 167, e che nel più profondo del lago si è trovata l'altezza di 400 braccia di Milano, ciò sono metri 237; ma si consideri anche la profondità ragguagliata del lago eguale soltanto alla metà di quella che abbia il fiume; le sezioni dell' uno e dell' altro in tal caso saranno simili, e quel che chiamasi dagl' Idraulici raggio medio, che qui si confonderà colla profondità, sarà pel lago $= 1$, e pel fiume $= 2$. Per tale divario, secondo la stima più sfavorevole al nostro conto, la pendenza del lago, supponendo eguali le velocità, sarebbe il doppio della pendenza del fiume; ma per largheggiare di vantaggio facciamola tripla, anzi contiamola $= 0^{\text{met.}},00003$.

Il fiume corre almeno tre miglia geografiche all' ora; il lago quando è nella massima piena ed ha la massima velocità, prescindendo dall' azione dei venti, non percorre un miglio al giorno; ponghiamo dunque la sua velocità nel tempo di grande piena $= \frac{1}{72}$ della velocità fluviale. Nelle acque più scarse, facendo un conto moderato, si trova che il lago non versa dal suo emissario che circa la ventesima parte delle acque che sgorgano nelle maggiori piene; dunque in tale stato di acque magre la velocità del lago sarà circa un ventesimo della mentovata, in conseguenza verrà ad essere $= \frac{1}{1440}$ della descritta velocità fluviale. E supponendo, in grande nostro disfavore, che la pendenza cali soltanto nella semplice ragione della velocità, e non già nella ragione del suo quadrato, si troverà la pendenza del lago $= \frac{0^{\text{met.}},00003}{1440} = 0^{\text{mét.}},000000021$ per ogni metro.

Di più il lago nel discendere, com' è solito sul finire dell' inverno, allo stato di sua massima bassezza, va facendo d' un giorno all' altro sempre minori decrementi, finchè negli ultimi giorni l' abbassamento che succede in 24 ore è minore di un punto, vale a dire di $0^{\text{met.}},0041$. L' Adda che sorte dal lago soffre presso a poco un eguale abbassamento; e siccome quivi la sua altezza suol essere maggiore di $0^{\text{met.}},82$, il suo sbassamento in 24 ore non sarà maggiore di $\frac{1}{200}$ della sua altezza. Ponghiamo ora che quanto cala in altezza, altrettanto cali in velocità, com' è più conforme ai fenomeni del corso fluviale, benchè qui torni a nostro scapito, ne verrà di conseguenza che la quantità dell' acqua mandata fuori per l' emissario non calerà in 24 che di un centesimo; quindi sarà di un centesimo diminuita la corrente del lago. E giacchè la sua altezza è costante, essendo

per essa insensibili le piccole variazioni che succedono, dovrà parimente scemare di $\frac{1}{100}$ la sua piccola velocità; e perciò nell' intervallo di 24 ore avrà corrispondentemente a calare la descritta pendenza. Supponghiamo ora che la pendenza non abbia già a calare, come altrove fu assunto, nella semplice ragione della velocità, ma come il quadrato di questa, giacchè qui tal ragione torna in nostro disfavore; e si conoscerà che il decremento della pendenza del lago nello spazio di 24 ore riuscirà intorno ad un cinquantesimo della totale; onde essendo questa, come abbiamo detto, $= 0^{met.},000000021$, tornerà il suo decremento $= 0^{met.},00000000042$.

Ma questo calo giornaliero di pendenza, come quello dell' altezza del lago non si fa a salto dall'un giorno all' altro, ma continuatamente e per gradi insensibili; ponghiamo solo che si faccia d' ora in ora; il decremento di pendenza in ciaschedun' ora sarà una ventiquattresima parte del giornaliero, conseguentemente riuscirà per ogni metro lineare $= 0^{met.},0000000000017$, che per comodo di calcolo diremo $0^{met.},0000000000020$.

E poichè il movimento del lago è sensibile, come si vede, a questa pendenza, se noi segneremo g la gravità terrestre, dovrà l' acqua del lago essere sì slegata e sciolta nelle sue parti, e sì libera e lubrica al moto, che a lei si renda sensibile una forza $= \frac{g}{50000000000}$.

Largheggiando sempre nel conto, diamo qui al lago metri 3000 di larghezza ragguagliata, e metri 150 di ragguagliata profondità; la sua sezione sarà di metri quadri 450000. Confrontiamo sì grande ampiezza di alveo con un canale ristrettissimo, il quale salva la simiglianza della forma, non abbia di sezione che la diecimillesima parte di un metro quadrato; e ritenendo che gl' impacci sofferti dall' acqua nel suo moto crescano come il perimetro della sezione diviso per la sezione, vale a dire in ragione inversa del raggio medio, che qui potrà senza sensibile errore pigliarsi per la profondità del canale, siccome la profondità dell' augusto canaletto per la supposta somiglianza di figura sarà alla profondità del lago come la radice della piccola sezione dell' uno alla radice della grande sezione dell' altro, gl' impacci del moto nel piccolo canale in paragone di quelli che soffre l' acqua nel vasto catino del lago cresceranno nella ragione di 67082 : 1; conseguentemente anche la pendenza in quello dovrà crescere altrettanto per dare all' acqua forza bastevole a vincere tali impedimenti. Quindi si troverrà che in questo canaletto, il quale per la supposta piccolezza di sua sezione e somiglianza di figura colla sezione del lago non sarà largo che metri 0,044, e non avrà che metri 0,002 di altezza d' acqua, altezza assai minore del diametro

di una goccia, l' acqua sarà sensibile ad una forza $= \frac{6}{745371}$.

Volendo pertanto supporre che tutta la resistenza, la quale si soffre dall' acqua nel suo moto, vale a dire tutta la perdita che fa delle sue forze provenga dalla tenacità o viscosità delle sue parti, la forza di questa viscosità, colla quale si supponessero legate insieme fra loro le fluide particelle ed attaccate al fondo del canaletto, non giugnerebbe ad eguagliarsi colla settecentomillesima parte della gravità; poichè se ciò fosse, l' acqua non si muoverebbe. Laonde anche in una sottilissima falda di acqua che appena si striscia sul fondo di un angusto canaletto, l' effetto della viscosità sarebbe sì piccolo, che di gran lunga eccederebbe i limiti d' ogni più minuta osservazione; e sarebbe del tutto qual non fosse. Ma questa viscosità se esiste non può essere che la più debole fra le cagioni della resistenza che l' acqua soffre al moto, vale a dire dello scapito che fa delle sue forze; poichè questo, come altrove indicammo, necessariamente deriva dalle onde che le ineguaglianze sparse sul fondo e lungo le sponde del canale sogliono in questo eccitare, le quali col loro contrasto agli occhi visibile distruggono il moto; onde la stima della viscosità si deve di molto ancora abbassare; ma questo è poco, poichè noi nel nostro computo abbiamo a bello studio posti tutti gli elementi in nostro disfavore, e massimamente ciò che risguarda la proporzione della pendenza alla semplice velocità, non al suo quadrato: talchè si conoscerà che pigliando le cose tutte a dovere, la piccolezza della forza di tenacità render si deve cento e cento volte ancor minore, andando così al di là d' ogni confine della nostra immaginazione.

Non vale qui recare in campo l' osservazione di una gocciola di acqua che si regge sopra la sua base o pende sospesa dall' estremità di un fuscelletto, poichè l' esempio proverebbe troppo, e concluderebbe che l' acqua non ha punto di fluidità. Tal fenomeno adunque deve manifestamente attribuirsi ad altra particolare cagione che non è la viscosità; in fatti appena si presenta un listello di carta bagnata al contatto della goccia, che questa rapidamente ed in un attimo scorre per esso mostrando la perfetta sua fluidità.

Dal fin qui detto adunque si conchiude che l' acqua possiede in sommo grado la fluidità, ed è quindi estremamente sensibile e pieghevole al più debole impulso d' ogni immaginabile tenuissima forza, il che la rende sommamente fedele ed obbediente alle leggi del calcolo, che sono le leggi della forza motrice. Ho creduto appunto di dover dare idea, siccome ho fatto, della perfettissima fluidità dell' acqua, per mostrare la somma conformità che deve passare fra il prescritto matematico del calcolo e l' effetto reale della natura.

ANNOTAZIONE IV.ª

(*Agli articoli* 28, 29 e 30.)

Il signor Laplace reputa molto esteso il caso in cui abbiasi $p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz =$ differenziale esatto (*Mecc. Cel. tom.* 1, *facc.* 95). Lagrange dopo aver cercato di mostrare una grande generalità di tale combinazione, ha creduto potersi forse da taluno dubitare se si desse giammai alcun movimento ne' fluidi senza che in esso si verificasse la condizione di quell' esatto differenziale (*Mecc. Anal. tom.* 2, *facc.* 310); onde a torre tal dubbio ha stimato di recare l'esempio del movimento di rotazione, qual è quello del mare, il quale non ammette l'*integrabilità* di $p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz$. Qualche altro matematico seguendo l' autorità di questi, ha similmente opinato essere in natura molto diffusa simile combinazione. Dopo aver preso in qualche particolare esame questa proprietà, su cui è fondata l'equazione cui suole ridursi quella de' fluidi, io ho creduto soggiugnere in questo luogo qualche rischiarimento di tal materia, studiandomi tuttavia di non uscire dai limiti di una semplice annotazione.

Richiamiamo un momento l' idea astratta di questa *integrabilità* alla fisica e reale sua nozione. Siano p, q, r forze *acceleratrici* che incitano al moto ciascun punto della fluida massa; $p\,Dx$, $q\,Dy$, $r\,Dz$ saranno le medesime forze appartenenti alle lunghezze Dx, Dy, Dz differenziali della massa, e $p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz$ esprimerà la somma delle forze delle quali è animata la massa nella diagonale $= \sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ in direzioni parallele ai rispettivi assi delle x, y, z, poichè a questa diagonale corrispondono le Dx, Dy, Dz. Quando il moto è impedito, le forze acceleratrici p, q, r in vece di velocitare premono, e le $p\,Dx$, $q\,Dy$, $r\,Dz$ non meno che la loro somma $p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz$ diventano elementi di pressioni. Allora quest' ultima espressione rappresenta la pressione che la diagonale $\sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ esercita sopra il punto che segneremo P, situato alla sua estremità opposta all' origine delle forze, la qual pressione, per le cose nella Memoria dimostrate, opererà egualmente per ogni verso: quindi la somma $\int(p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz)$ presa da un punto qualunque della massa fino al determinato punto P della medesima esprimerà l' accumulamento delle pressioni fatto lungo la linea che risulta dalla somma $\int\sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ delle diagonali cui appartengono le Dx, Dy, Dz; il quale accumulamento di pressioni sarà l' azione della massa sopra il punto P propagata per tal linea.

Quando $p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz$ è integrale esatto, vale a dire quando $\int(p\,Dx + q\,Dy + r\,Dz)$ è *integrabile*, l' accumulamento di pressioni,

ch'è l'integrale, ad un punto determinato P della massa deve riuscire il medesimo, qualunque sia la linea lungo la quale s'intenda fatto, ovvero l'azione della massa sopra il punto P deve trovarsi la medesima, qualunque sia la linea per cui si propaghi. Ciò si verifica nell'equilibrio, poichè altrimenti la pressione che prevale lo rompe inducendo movimento. Nell'equilibrio adunque la $\int(p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z)$ è integrabile. Ma ogni volta che la $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$ può in tutta la massa accumularsi e convertirsi totalmente in pressione, vi potrà essere equilibrio nella massa medesima, poichè le forze p, q, r saranno in tale supposto impiegate a premere soltanto, non a velocitare. L'essere dunque integrabile la $\int(p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z)$ consiste nel potersi assolutamente accumulare in tutta la massa le forze $p\mathrm{D}x$, $q\mathrm{D}y$, $r\mathrm{D}z$ convertendosi in pressioni. Allora adunque ad ogni punto determinato P della massa corrisponderà una determinata pressione che noteremo π; la quale esprimerà l'azione di tutte le forze *acceleratrici* p, q, r della massa sopra il punto P, e similmente la contraria azione di tal punto sopra tutta la massa.

Se ora nelle p, q, r in vece di semplici forze *acceleratrici* sostituiremo delle velocità, egli è chiaro che avrà luogo il medesimo discorso; ma poichè dove la forza *acceleratrice* si trasforma in pressione, la velocità si cangia in percossa, in vece di essere $\int(p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z) = \pi$, π denotando una pressione, sarà $\int(p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z) = \Phi$; Φ significando una percossa. Parlando adunque di velocità p, q, r, il differenziale $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$ sarà esatto ed *integrabile*, quando le forze per esso espresse potrano accumularsi convertendosi in percosse. Allora la Φ riferita ad un punto qualunque P della fluida massa esprimerà la percossa che tutte le parti del fluido, in virtù delle velocità delle quali sono animate, imprimono su tal punto, e parimente il ripercotimento che questo esercita contro tutta la massa in virtù della contraria sua azione. Così è ridotta all'evidenza di un fatto palpabile una delle più astratte nozioni della matematica, qual è quella della *integrabilità* di una forma differenziale.

Passando per tanto una perfetta analogia tra la pressione π e la percossa Φ, sarà possibile la $\int(p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z) = \Phi$, nel che sta l'integrabilità della formola differenziale di cui parliamo, quando cangiando la velocità p, q, r in forze *acceleratrici*, si troverà possibile la $\int(p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z) = \pi$.

In natura considerando i corpi fluidi ed omogenei posti alla superficie della terra, sappiamo che la risultante delle forze *acceleratrici* p, q, r non è che la gravità, la quale si deve qui risguardare come costante di forza e di direzione; onde fassi

$$p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z = g\,\mathrm{D}z = \textit{differenziale esatto},$$

g denotando la gravità ed s la linea della sua direzione; quindi in essi è sempre possibile l'equilibrio, altro non richiedendosi per ottenerlo in effetto, se non che la superficie libera del fluido rendssi orizzontale, affinchè riuscendo ad essa perpendicolare la direzione della forza, si abbia su tutta la sua estensione $\int(p\mathrm{D}x+q\mathrm{D}y+r\mathrm{D}z)=0$, essendo ivi per necessità $\pi=0$. Ma ne' fluidi in movimento la risultante delle velocità p, q, r può variare all'infinito, e parlando a rigore, essa in natura si ravvisa sempre varia nelle diverse parti del fluido che si muove. Da ciò si può comprendere che l'equilibrio delle velocità rappresentato dalla φ dev'essere in natura un accidente ben raro in paragone dell'equilibrio delle forze *acceleratrici* espresso per la π, cioè a dire che il caso di $p\mathrm{D}x+q\mathrm{D}y+r\mathrm{D}z$ *differenziale* esatto sarà in natura assai raro per le velocità, comunque frequente per le forze *acceleratrici*.

Oltre di che parlando di queste ultime forze, il loro rapporto e la direzione della loro risultante sono indipendenti dalla forma del vaso, vale a dire dalla posizione e curvità delle superficie che lo contengono; all'opposto il rapporto scambievole delle velocità p, q, r e la direzione della loro risultante dipendono dalla forma delle superficie che sono secondate dal movimento del fluido. Ciò rende sì raro il caso del differenziale esatto, che supponendo la corrente compresa fra quattro superficie piane ed inclinate soltanto a seconda o a ritroso della corrente, che sono le più favorevoli a tal accidente, sarà malagevolissimo l'ottenerlo, eccetto che nella supposizione che sia

$$\frac{n-m}{\lambda}=\frac{v-u}{\pi},$$

n, m indicando le tangenti degli angoli che le due sponde fanno col piano delle x, y, e λ la larghezza del fiume; v, u denotando parimente le tangenti degli angoli che le due superficie infima e suprema fanno col piano delle x, z, e π la profondità della corrente, la qual combinazione è tanto singolare che può dirsi strana, e quindi difficilissima ad ottenersi in effetto. Tutto ciò cospira colla grandissima difficoltà di trovare giammai avverato il caso in cui si veggano concorrere insieme le tre particolari condizioni espresse per le equazioni

$$\left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}y}\right)=\left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}x}\right),\ \left(\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}z}\right)=\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}x}\right),\ \left(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}z}\right)=\left(\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}y}\right),$$

le quali non hanno fra loro alcun legame, e sono tuttavia necessarie, come si sa, tutte e tre per rendere esatto il differenziale di cui si ragiona.

Dopo queste premesse che mostrano quanto esser debba raro

l'accidente di tal differenziale, vediamo quali e quanti siano i casi ne' quali secondo i matematici ottenersi debba il suo riscontro. Il sommo geometra Lagrange è quegli che ne ha parlato più a lungo (*Mecc. Anal. tom.* 2, *facc.* 307 *e seg.*), onde basta che a lui ci attenghiamo. Egli dimostra che il differenziale $pDx + qDy + rDz$ sarà sempre esatto, quando sia tale per qualche istante di tempo; cioè è vero, ma la difficoltà sta appunto nel poter esser esatto per qualche valore del tempo t; il valore grande o piccolo di questa quantità o di qualunque altra (giacchè corre per tutte una medesima ragione) è affatto indifferente alla forma di una funzione, e da questa sola dipende l'essere o non essere un differenziale esatto. Si passa quindi nel citato luogo a far osservare che il differenziale sarà sempre esatto, quando il movimento partirà dallo stato di quiete; poichè allora in sul cominciare del moto, vale a dire $t=o$, si ha $p=o$, $q=o$, $r=o$, donde s'inferisce che per questo primo istante di tempo $pDx+qDy+rDz$ è un differenziale esatto, e che però secondo il premesso principio sarà tale anche in processo. Ciò non potrebbe dirsi in generale, essendo possibile che parta dalla quiete anche un movimento di rotazione, nel quale cotal differenziale non è esatto: e in vero un fluido contenuto, per esempio, in un cilindro può essere messo in giro per mezzo di un diaframma volubile attorno al suo asse per l'azione di un contrappeso che pende da una carrucula posta all'estremità dell'asse medesimo, qual diremo essere quello delle z, e che comincia il suo movimento dallo zero. Nel qual caso si avrà $p=\theta y$, $q=-\theta x$, $r=o$, θ significando la velocità angolare, che sarà funzione del tempo che impiega il contrappeso nel cadere; quindi $pDx+qDy+rDz=\theta(yDx-xDy)$ che non è integrabile. Parlando a rigore, quando $p=o$, $q=o$, $r=o$, la differenziale diviene $=o$, e nello zero si confondono indifferentemente i differenziali tanto esatti che non esatti; così al vertice, per esempio, di una curva ove sia $x=o$, $y=o$, si trova eguale allo zero tanto il differenziale $xdy+ydx$, quanto il differenziale $xdy-ydx$, benchè il primo sia *integrabile*, non il secondo.

Per poter inferire l'*integrabilità* del differenziale dal cominciare che fa il moto dalla quiete, convien supporre che le forze *acceleratrici*, dalle quali è sospinta al moto ogni fluida particella, derivino, come la gravità, da attrazioni proporzionali a funzioni delle distanze de' centri, dalla quale supposizione è dedotta la dimostrazione di Lagrange. In fatti allora, come noi abbiamo a suo luogo mostrato, si ha $dpDx+dqDy+drDz$ differenziale esatto; onde essendo al principio del moto $p=dp$, $q=dq$, $r=dr$, in questo primo istante di tempo $pDx+qDy+rDz$ è differenziale esatto, e perciò tale si mantiene in progresso.

Ma questo caso, in cui il movimento di una fluida massa parta dallo stato di riposo, io credo sia ben raro assai. Parliamo di un fluido che venga animato dalla gravità, affinchè un corpo, per esempio, di acqua, una stroscia, una corrente alle prime sue mosse partir possa dallo stato di quiete, cominciando cioè nel primo istante dallo zero la sua velocità, e negl' istanti successivi gradatamente aumentandola, convien supporla costituita pensile in aria o nel voto, ed abbandonata a se stessa ed al suo peso; il qual caso, oltre l' essere puramente ideale, non suffraga punto la presente ricerca del movimento de' fluidi, giacchè allora la fluida massa si muove a guisa di corpo solido. Dico che convien supporre tal corrente pensile in aria, perchè se altrimenti la fluida massa in qualche maniera è sostenuta, onde le parti superiori aggravandosi sopra le inferiori producano in queste una pressione π, ed al medesimo livello vi abbia un' apertura, dove la superficie del fluido sia libera, e dove perciò divenga $\pi = o$, quivi il fluido dovrà essere animato da una velocità v corrispondente a tale pressione, onde rendasi $\frac{1}{2} v^2 = \pi$, come altrove abbiamo mostrato.

Io so bene essersi introdotta fra i matematici l' opinione che la pressione non possa produrre una velocità finita se non per gradi, e cominciando dalla velocità $= o$, del qual espresso sentimento egli è pure il medesimo Lagrange, sommo geometra e sommo maestro delle meccaniche scienze (*Mecc. Anal. tom.* 2. *facc.* 280.): nulladimeno io confesso che dopo molta riflessione io non so persuadermene; poichè considerando che uno stantuffo, il quale con una forza costante calchi la superficie della colonna d' acqua contenuta in una tromba o in uno schizzatoio, non caccia fuori l' acqua che per mezzo della sola pressione, e riflettendo che supposta sempre eguale l' azione dello stantuffo, lo schizzo dell' acqua sortir deve invariabilmente col medesimo impeto dal primo istante fino all' ultimo, io mi convinco che la pressione anche nel primo momento di sua operazione è valevole a generare una velocità finita, e che perciò eziandio nel nostro caso si avrà, come fedelmente il calcolo ci addita, $\frac{1}{2} v^2 = \pi$. Laonde in una massa d' acqua che sia in qualche modo e in qualche lato sostentata da fondo, da sponde e simili, esercitandosi sempre qualche pressione, non si comincerà giammai il movimento dalla quiete: tali pertanto essendo universalmente in natura ed in ogni genere di artifiziale sperienza le masse di acque correnti, ad esse per tal titolo non apparterrà la proprietà del differenziale esatto competente al movimento che principia colla velocità $= o$, o come suol dirsi infinitamente piccola. E qui è da avvertire che si parla del movimento che in un dato qualunque punto dello spazio, cui corrispondono le ordinate determinate $x = a$, $y = b$, $z = c$, cominci

nel primo istante dallo zero, e vada poi crescendo al medesimo sito negli stanti successivi, non già di una velocità che sia $= 0$ in un luogo, e divenga quantità finita in un altro, come succede alle acque che sortono dai laghi, le quali nel grande catino sono stagnanti e prive di sensibile moto; ed all' emissario non meno che nel susseguente alveo del fiume hanno vivace corso; al qual caso non è punto adattabile il presente canone del differenziale esatto.

Il signor Lagrange passa a dire di un' altra condizione valevole a rendere la $pDx + qDy + rDz$ differenziale esatto, la quale consiste nell'essere la velocità iniziale del fluido prodotta da un' impulsione qualunque datagli alla superficie, come, per esempio, si farebbe coll' azione di uno stantuffo. Ed arreca di ciò la ragione, perchè le velocità p, q, r impresse al fluido in ogni suo punto in virtù dell'impulso conferito alla superficie debbono essere tali, che se venissero distrutte coll' imprimere ad ogni punto del liquore contrarie ed eguali velocità, tutta la massa del fluido resterebbe in equilibrio; onde sarebbevi equilibrio in virtù dell'impulso dato alla superficie, e delle velocità $-p$, $-q$, $-r$ applicate a ciascun punto nell'interno della massa, ora l'equilibrio richiede che le forze siano tali da render esatto il differenziale $pDx + qDy + rDz$; dunque la condizione dell' impulso comunicato alla superficie del fluido importa mai sempre tale proprietà di differenziale esatto.

Da quanto abbiamo detto nel principio di questa annotazione si riconosce la ragione per cui convenga all' equilibrio tale proprietà, perchè là dove il movimento è impedito, come succede nell' equilibrio, se le parti del fluido sono tutte animate da forze *acceleratrici*, conviene che si puntellino le une contro le altre, il che fa che le forze si convertano in pressioni, e che le $pDx + qDy + rDz$ vadano accumolandosi le une colle altre, il quale accumulamento è in termini matematici la loro *integrazione*, donde nasce la pressione π, ch' è però integrale esatto. Nell'equilibrio pertanto le diverse parti del corpo, ovvero le loro forze sono in un continuo contrasto fra loro, e questa continua ed egual lotta delle forze di una parte contro le forze dell' altra è quella appunto che tiene in bilancia tutte le diverse parti del corpo. Ma ben diversa è la cosa nel proposito nostro, poichè le velocità $-p$, $-q$, $-r$ impresse a ciascun punto della massa non mettono in contrasto fra loro le diverse parti del fluido, nè le forze p, q, r, delle quali si suppongono animate, ma altro non fanno che annientare ciascheduna di queste al suo posto, sicchè il corpo rimanga senza alcuna forza che al moto lo solleciti, e senza alcuno scambievole contrasto fra le varie parti che lo compongono.

Ora questo stato non è che una privazione di forze sollecitanti al moto, la quale non altrimenti che per un equivoco può confondersi

coll' equilibrio, il quale suppone un costante combattimento tra forze e forze, e si di tutte contro ciascuna, come di ciascuna contro tutte: nè quindi si può inferire che ci abbia o aver ci possa accumulamento delle medesime forze, nel che consiste l' *integrabilità* o condizione dell' integrale esatto di cui si tratta. E in vero coll' imprimere queste contrarie velocità $-p$, $-q$, $-r$ alle acque stesse del mare si farebbe cessare il giornaliero suo movimento di rotazione; nulladimeno questo è incompatibile colla proprietà del differenziale esatto, come si può ricavare dalla espressione testè addotta pel movimento di rotazione, facendo in essa costante la velocità angolare per θ espressa.

Ma immaginiamo per maggior chiarezza un vaso in forma di cuneo, il quale sia volubile attorno all' asse che passa per l' acuta sua estremità, e sia ripieno d' un fluido che ci figureremo privo d' ogni forza *acceleratrice*: il fondo del vaso sospinto da qualche forza al moto comunicherà un' impulsione alla superficie del fluido colla quale è in contatto, ed obbligherà la liquida massa a muoversi in giro attorno all' asse di rotazione; prescindiamo da quella piccola forza che concepirà per iscappare dal centro del moto, o fingiamola distrutta con una contraria forza, onde il fluido rimanga ognora entro il vaso. Le parti del liquido più lontane dal centro del moto concepiranno maggiore velocità, minore le più vicine, ed al centro sarà la velocità $=0$. Supponghiamo ora conferite in un istante a ciascun punto del fluido le contrarie velocità $-p$, $-q$, $-r$, rimarrà in quell' istante il fluido senza alcuna forza; se nell' istante successivo saranno di nuovo colla impulsione data alla superficie posteriore impresse ad ogni elemento del fluido le velocità p, q, r, e di nuovo siano queste estinte colle contrarie velocità $-p$, $-q$, $-r$ ad ogni punto comunicate, verrà di nuovo restituito quello stato d' inerzia o di nessuna azione che era tolto mercè delle conferite forze p, q, r; e tante volte si rinnoverà questo stato di semplice mancanza d' azione, quante fiate intenderemo essere prima comunicate le velocità p, q, r, poi distrutte colle contrarie forze $-p$, $-q$, $-r$ ad ogni punto applicate. Ed ognuno può conoscere che in tale giuoco non si farà giammai alcun aggravamento di parti sopra parti del fluido, verun accumulamento di forze, niuna pressione, niuna percossa, in una parola niun equilibrio, quando equivocare non si voglia, chiamando equilibrio lo stato di nessuna forza, e la sola e semplice privazione d' ogni azione e d' ogni conato.

All' opposto, se estinte che siano le velocità p, q, r colla impressione delle contrarie $-p$, $-q$, $-r$, avrà l' azione di queste a seguitare, supponendo che il fondo del vaso resti saldo al suo posto per far ad esse contrasto colla sua resistenza, e per obbligare in tal

modo, s'è possibile, le parti fluide a caricarsi le une sopra le altre, e tutte sopra sè, e conseguentemente per costrignere le forze ad ammontarsi, allora il fluido anzichè rimanere in equilibrio, scagliandosi impetuosamente verso l'asse del moto, si lancerà tutto fuori del vaso; poichè le velocità non potranno accumularsi e convertirsi in una percossa Φ contro il fondo, come non potrebbero formare equilibrio, e trasformarsi in una pressione π le $-p$, $-q$, $-r$ se fossero forze *acceleratrici*, poichè crescendo la forza da esse risultante in proporzione della distanza dal centro del moto, il fluido più distante da questo sarebbe più pesante che il più vicino, il che rompe l'equilibrio, e fa sì che venga a generarsi moto in cambio di pressione.

L'essere adunque il movimento di un fluido prodotto per via di impulsione data alla sua superficie non rende *integrabile* la $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$. Qualunque sia l'origine del moto, l'*integrabilità* di questo *differenziale* deriva dalla qualità delle funzioni che esprimono le p, q, r; e questa dipende dalla natura di quella curva che, secondo l'equazione di condizione, il liquido è costretto a dover nel suo moto secondare, la qual curva può in mille modi variare, ancorchè si supponesse generato il moto mediante un impulso comunicato alla superficie del fluido.

Prendendo pertanto in considerazione tutte le premesse dichiarazioni, ci persuaderemo che radissime volte accader possa di trovarsi nel movimento de' fluidi verificata a rigore la condizione del differenziale esatto di cui si tratta. Nulladimeno noi passeremo a mostrare, come parlandosi delle acque correnti e de' fiumi sia generalmente adattabile al loro movimento il calcolo su tal base fondato, e come con questo si possano senza alcun sensibile errore determinare i principali fenomeni del loro corso.

Consideriamo una corrente o un fiume, nel movimento del quale siano variabili tutte le ordinate x, y, z. L'asse delle x sia orizzontale e diretto secondo il corso dell'acqua, l'asse delle z sia parimente orizzontale, ma a traverso della corrente, mentre l'asse delle y sia verticale. Ciascheduna sponda del fiume abbia per sua proiezione sul piano orizzontale delle x, z una curva qualunque, e similmente il fondo e la superficie suprema abbiano ciaschedune qualsivoglia curva per sua proiezione sul piano verticale delle x, y. Per ciascheduna di queste quattro curve, fra le quali si muove la corrente, abbiasi la rispettiva equazione $\mathrm{D}y = m\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y = n\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}z = u\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}z = v\mathrm{D}x$, m, n, u, v essendo quantità variabili e funzioni della sola x. Supponghiamo, com'è permesso, che i tre assi abbiano una comune origine, onde sia $y = 0$, $z = 0$, dove $x = 0$; si noti a l'altezza del fiume all'origine degli assi, e b la sua larghezza; sia poi λ

l'altezza variabile, e π la larghezza parimente variabile del medesimo corrispondente a qualsivoglia ordinata x. Ben si scorge che in tal modo si suppone muoversi il fiume fra quattro comunque fra loro diverse superficie curve, la cui curvatura non sia fatta che pel verso della corrente.

Cercando in tale assunto la Φ a tre variabili coll'integrare l'equazione (g) dell' articolo 26, la quale suppone la condizione della $pDx + qDy + rDz =$ *differenziale* esatto, e quindi cavando il valore di ciascheduna velocità p, q, r senza oltrepassare il loro primo termine, si trova essere.

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\chi}{\lambda\pi}, \\ q &= \frac{\chi}{\lambda\pi}\left(m\frac{a}{\lambda} + \frac{n-m}{\lambda}y\right), \\ r &= \frac{\chi}{\lambda\pi}\left(u\frac{b}{\pi} + \frac{v-u}{\pi}z\right). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (A).$$

Ma questi tre primi valori delle p, q, r si ottengono medesimamente e senza alcuna disparità, eccetto quella d' un calcolo più prolisso, anche per mezzo della equazione (c) dell'articolo 24 la quale non è limitata dalla condizione del *differenziale* esatto, e s' integra sviluppandola in serie coi noti metodi.

Passando inoltre a cercare il secondo termine della p col supporre, a fine di rendere più semplice il calcolo, la curvità delle quattro superficie sì poca che queste possano considerarsi come piane e come costanti le m, n, u, v, si trova nel primo assunto del *differenziale* esatto.

$$\left.\begin{aligned} p = {} & \frac{\chi}{\lambda\pi} \\ & - \frac{\chi}{\lambda\pi}\Big[m^2\frac{a^2}{\lambda^2} + \tfrac{1}{2}m^2\frac{v-u}{n-m}\cdot\frac{a^2}{\lambda\pi} - \tfrac{1}{6}(n^2+nm+m^2)\frac{v-u}{n-m}\cdot\frac{\lambda}{\pi} \\ & \quad + u^2\frac{b^2}{\pi^2} + \tfrac{1}{2}u^2\frac{n-m}{v-u}\cdot\frac{b^2}{\lambda\pi} - \tfrac{1}{6}(v^2+vu+u^2)\frac{n-m}{v-u}\cdot\frac{\pi}{\lambda} \\ & \quad + \left(2m\frac{n-m}{\lambda} + m\frac{v-u}{\lambda}\right)\frac{a}{\lambda}y + \left(\frac{(n-m)^2}{\lambda^2} + \tfrac{1}{2}\frac{n-m}{\lambda}\cdot\frac{v-u}{\pi}\right)y^2 \\ & \quad + \left(2u\frac{v-u}{\pi} + u\frac{n-m}{\lambda}\right)\frac{b}{\pi}z + \left(\frac{(v-u)^2}{\pi^2} + \tfrac{1}{2}\frac{v-u}{\pi}\cdot\frac{n-m}{\lambda}\right)z^2\Big] \end{aligned}\right\} (B).$$

E questo medesimo valore della p inoltrato al suo secondo termine si ottiene indipendentemente dalla mentovata condizione del *differenziale*

esatto, integrando cioè la citata equazione generale (c) sgombra d'ogni supposizione.

Ora abbiamo già osservato che nel corso de' fiumi si possono generalmente risguardare come piane le quattro superficie, fra le quali si muovono le loro acque o il maggior loro corpo che più importa di considerare; onde ad essi generalmente è adattabile il premesso calcolo. Di più abbiamo mostrato come nelle acque correnti e nei fiumi le m, n, v, u, sogliono essere sempre quantità numeriche assai piccole in paragone dell'unità, di modo che le m^3, n^3, u^3, m^4, ecc. riescano affatto non apprezzabili; e siccome i secondi termini delle q, r sono dell'ordine di m^3, n^3, u^3, ecc., ed il terzo termine della p dell'ordine di m^4, n^4, u^4, ecc., ne segne che nel calcolo del movimento delle acque correnti e de' fiumi non sono da valutarsi che i termini compresi nelle espressioni (A) e (B), e questi essendo sempre esatti ancorchè dedotti dalla supposizione dell'*integrabilità* di $p\mathrm{D}x + q\mathrm{D}y + r\mathrm{D}z$, si potrà, a fine di rendere più trattabile e più spedito il calcolo, generalmente considerare nelle correnti e ne' fiumi come *integrabile* questo differenziale, il che pienamente conferma quanto fu detto in fine dell'articolo 30.

Le formole (A) e (B) abbracciano tutta la teorica dell'azione che l'obbliquità delle sponde e la pendenza del fondo e della superficie de' fiumi esercitano sul corso de' medesimi a qualunque distanza dalle ripe ed a qualunque profondità, considerando tanto l'obbliquità di quelle, quanto la pendenza di questi diretta a seconda o a ritroso della corrente.

Giacchè abbiamo dato questo saggio d'*integrazione* per l'equazione de' fluidi a tre variabili, di cui parlammo, ci sia qui permesso di toccare due cose, cioè:

1.° Che istituendo coi dichiarati valori delle p, q, r a tre variabili le ricerche analoghe a quelle che nell'articolo primo della seconda parte della memoria furono intraprese coi valori delle medesime quantità a due variabili, non sarà difficile il riconoscere che si ottengono i medesimi risultamenti; onde quanto ivi concludemmo considerando separatamente o la sola obbliquità delle sponde d'un fiume, o la sola inclinazione del fondo e della superficie, vale egualmente nel caso concreto di un fiume che abbia insieme in qualunque modo obblique le sponde ed inclinate le superficie suprema ed infima.

2.° Che considerando il movimento dell'acqua soltanto in una sezione, e facendo però nelle espressioni (B) ed (A) $\lambda = a$, $\pi = b$, talchè quelle si cangino nelle seguenti

$$p = \frac{\chi}{ab}$$

$$-\frac{\chi}{ab}\Big[m^2 - \tfrac{1}{6}(n+2m)(v-u)\cdot\frac{a}{b}$$

$$+u^2 - \tfrac{1}{6}(v+2u)(n-m)\cdot\frac{b}{a}$$

$$+\left(2m\frac{n-m}{a} + m\frac{v-u}{b}\right)y + \left(\frac{(n-m)^2}{a^2} + \tfrac{1}{2}\frac{n-m}{a}\cdot\frac{v-u}{b}\right)y^2$$

$$+\left(2u\frac{v-u}{b} + u\frac{n-m}{a}\right)z + \left(\frac{(v-u)^2}{b^2} + \tfrac{1}{2}\frac{v-u}{b}\cdot\frac{n-m}{a}\right)z^2\Big],$$

$$q = \frac{\chi}{ab}\left(m + (n-m)\frac{y}{a}\right),$$

$$r = \frac{\chi}{ab}\left(u + (v-u)\frac{z}{b}\right),$$

non potremo dall' espressione $\frac{p}{v}$, cioè dalla $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, fare sparire le quantità a, b. Essendo pertanto la contrazione della vena una funzione della $\frac{p}{v}$, nella sua espressione rimarranno necessariamente comprese le grandezze dei due lati della sezione per cui l' acqua passa, finchè le a, b saranno quantità disuguali; e non potranno sortire se non nel caso che sia $a = b$, divenendo allora $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, ed essendo altronde dopo l' integrazione $y = a$, $z = b$. Quindi si raccoglie che la contrazione della vena se potrà essere la medesima in tutte le bocche quadre, nelle quali si ha $b = a$, dovrà essere divisa in tutte le bocche di figura bislunga, nelle quali si ha $b > a$, ovvero $a > b$. Questo conferma quanto della contrazione della vena abbiamo detto nel nostro *Ragguaglio matematico*.

ANNOTAZIONE V.ª

(*All' art.* 50.)

Supporremo . . . . . che le due sponde o superficie che sono lambite dal fluido, e si rappresentano dalle equazioni D y1 = m D x, D y2 = n D x, *siano piane*.

Diamo un saggio anche per le superficie curve, nelle quali le m, n sono quantità variabili e funzioni della x. Si ritenga che qui non

meno che nel citato luogo viene considerato $\left(\frac{Dy}{Dz}\right) = 0$, supponendosi il movimento indipendente dalla ordinata z. La curvità delle superficie nessun cangiamento introduce nelle indagate prime approssimazioni dei valori tanto della funzione F′, quanto delle velocità p, q; cerchiamo adunque la differenza che essa induce nel secondo termine della F′, e quindi le variazioni che apporta nel secondo termine della p, il quale nella scienza de' fiumi, come abbiamo più volte insinuato, è l'unico dopo gli anzidetti primi valori che meriti considerazione.

A cagione della curvità delle superficie divenendo variabili le m, n, sarà in primo luogo da unire al secondo termine della F la quantità $-\frac{\chi}{\lambda}V$, V indicando il *coefficiente* $\frac{1}{3}(n^2 + nm + m^2)$, la quale quantità non potrà più considerarsi compresa nel primo valore della $F' = \frac{\chi}{\lambda}$ (Vedi art. 52.)

Facendo poi $\frac{Dm}{Dx} = m'$, $\frac{Dn}{Dx} = n'$, m' e n' denotando due funzioni della x, e segnando $\Delta F'''$, $\Delta f''$ le differenze ch' esse introducono nei valori delle F''', f'', si troverà facilmente

$$\Delta F''' = -(n' - m')\frac{\chi}{\lambda^2},\ \Delta f'' = m'\frac{a\chi}{\lambda^2};$$

quindi al secondo termine della F′ si dovrà aggiugnere eziandio la quantità (articolo citato)

$$-(n' - m')\frac{y_2^3 - y_1^3}{2 . 3\lambda} . \frac{\chi}{\lambda^2} - m'\frac{y_2^2 - y_1^2}{2\lambda} . \frac{a\chi}{\lambda^2}.$$

Le due precedenti quantità, che sono da aggiungersi al secondo termine della F′ per renderlo compiuto, dovranno parimente far parte del secondo termine della p, essendo il primo valore di questa costituito dalla F′, cioè dalla $F'x$, come apparisce dalla serie espressa all' art. 44. Dalla medesima serie agevolmente si conoscerà che a compiere il secondo termine della p converrà aggiungergli la quantità

$$y\Delta f'' - \tfrac{1}{2}y^2\Delta F''' = \frac{\chi}{\lambda}\left[m'\frac{a}{\lambda}y + \frac{n' - m'}{\lambda}y^2\right].$$

Rimane in tal modo pienamente determinato il secondo termine tanto della funzione F′, quanto della velocità p nel caso che le due superficie, fra le quali il fluido si muove, siano in qualsivoglia modo curve. Ma limitiamoci per maggiore semplicità all' assunto in cui le curve delle due superficie siano del medesimo genere, talchè per una

si abbia $y=e\Phi x$, e per l'altra $y=E\phi x$, ϕx indicando una qualunque funzione della x, ed e, E due quantità costanti. Si otterranno in tal caso per le $y1$, $y2$ le espressioni medesime dell'art. 51; e sarà inoltre

$$m' : n' :: m : n;$$

quindi si troveranno i valori della F' e della p col compimento dei secondi loro termini nel seguente modo espressi:

$$F'=\frac{\chi}{\lambda}$$

$$-\frac{\chi}{\lambda}\left[m^2\frac{a^2}{\lambda^2}+V-1\frac{m'm}{n-m}\cdot\frac{a^2}{\lambda}-\frac{1}{6}\frac{m'm^2-n'n^2}{(n-m)^2}\lambda\right];$$

$$p=\frac{\chi}{\lambda}$$

$$-\frac{\chi}{\lambda}\left[D+2\frac{m(n-m)}{\lambda^2}ay+\frac{(n-m)^2}{\lambda^2}y^2-\frac{m'}{\lambda}ay-\frac{(n'-m')}{\lambda}y^2\right];$$

dove colla D viene contrassegnata la quantità chiusa fra parentesi nel secondo termine della F'.

Paragonando questi valori con quelli che non oltrepassando i secondi termini si ottengono a superficie piane (art. 52 e 60), si riconoscerà la variazione che in questi introduce la curvità delle superficie medesime.

ANNOTAZIONE VI.ª

(*All' art.* 81.)

Nell' espressione

$$q=\frac{X}{a}\left(m+(n-m)\frac{y}{a}\right)$$

facendo $y=0$, si ha $q=m\frac{X}{a}$, e facendo in vece $y=a$, si ottiene $q=n\frac{X}{a}$; il che indica che l'acqua alle sponde perfettamente seconda col suo movimento la loro direzione, ch' è la verità di fatto, ed in natura universale, la quale serve di fondamento ad ogni calcolo di movimento d'acqua. I fiumi adunque non altro fanno che lambire, lavare ed astergere le ripe e gli argini, non gli urtano, non isfogano contro essi l'impeto loro, e non vi ha quivi nè angoli d'incidenze, nè angoli di riflessioni, nè percosse, nè botte che ora ascendano,

ora discendano, nè simili altre dicerie, ch'è il favorito linguaggio rimasto ai ciarlatani incapaci di conoscere il vero modo col quale si operi ogni frana o sdrucio delle sponde e degli argini dei fiumi.

ANNOTAZIONE VII.

(*All' art.* 84.)

Talmente che il metodo del quale si tratta sia adatto non solo a definire, qualora piacesse, la quantità di fluido che porta una corrente, ma a dividerla in quali e quante assolute *porzioni siano a beneplacito richieste.*

Si usa non di rado ancora il dividere l'acqua in porzioni non *assolute*, ma relative per mezzo di fabbriche chiamate partitori, i quali servono a dividere tutta l'acqua di un canale in parti eguali ovvero anche in una data ragione disuguali, come succederebbe se, per esempio, una corrente si dovesse scompartire fra tre proprietarj, in guisa che delle nove parti che formano il tutto, all'uno ne toccassero due, tre all'altro, ed al terzo quattro. Dopo che si è parlato del Regolatore che serve a dispensare l'acqua a misura assoluta, non sia discaro l'udirci dire in breve del modo esatto di distribuirla anche a misura relativa, insegnando la maniera di costruire i partitori per eseguire colla giustezza che si possa maggiore qualsivoglia divisione d'un corpo di acqua corrente, affinchè nulla manchi alla generale dottrina della distribuzione delle acque.

Lo spediente facile e sicuro per operare il giusto scompartimento d'un'acqua corrente in quali e quante porzioni si voglia consiste principalmente nell'obbligare l'acqua a formare cascata, il che sempre si può ottenere o coll'alzare alquanto la platea della fabbrica sopra il letto della corrente, e coll'abbassare sotto il livello di questo il fondo dei rigagni che ricevono l'acqua divisa. Si scelga pertanto un tronco di canale, che almeno a grossolana stima si giudichi diritto, o tale coll'arte si riduca per una lunghezza eguale a otto o dieci larghezze dell'alveo al più; ed all'estremità inferiore di esso si fabbrichi il partitore, che dovrà comprendere due parti, l'una alta che versa l'acqua, e che diremo il versatore, l'altra bassa, che chiameremo propriamente il partitore, formata dalle teste de' rigagni, fra le quali l'acqua rimane nell'assegnata proporzione scompartita.

Al versatore si può dare quella larghezza che più sia per tornar comoda, non però mai maggiore di quella del canale; l'asse dell'uno corrisponderà all'asse dell'altro. Nella lunghezza della sua fabbrica

presa a seconda del corso d'acqua si potrebbe abbondare a beneplacito, ma basta che ne' piccoli canali si faccia di tre metri al più, e che si produca fino ai dieci ne' grandi, quali sarebbero per esempio i fiumicelli Agogna, Lambro, Chiese, e simili. La platea del versatore vuol essere orizzontale, e lastricata di pietre o almeno di mattoni. Le sponde si faranno di muro, verticali e parallele; esse vengono superiormente prolungate in due archi di dolce curvatura, finchè si uniscano alle ripe naturali del canale.

Sotto il versatore si colloca il partitore propriamente detto, vale a dire si dispongono le teste dei rigagni ne' quali si versa e si scomparte l' acqua. Le loro sponde sotto la gronda del versatore debbono formarsi di pietra o di marmo, e terminarsi superiormente in uno spigolo acuto e tagliente, perchè debbono fendere la grondaia dell' acqua che loro piomba sopra. La sommità d' ogni spigolo sarà a livello della soglia o platea del versatore; la sua lunghezza non dovrà essere minore della corda tesa sotto l' arco descritto dall' acqua grondante: al di là di questi spigoli taglienti le ripe dei rigagni si fanno di muro o di terra, come più si stima convenire. E per concedere loro spazio ad essere ingrossate, appena oltrepassate le teste si fa torcere il cammino ai rigagni, agli uni sulla destra e sulla sinistra agli altri, acciocchè si discostino fra loro quanto basta per dar luogo allo stabilito ingrossamento delle sponde; gioverà ancora a tal effetto che le sponde esterne delle due teste dei rigagni posti alle due estremità del partitore in vece di essere tirate a corda colle sponde del versatore, siano ritirate dietro la linea di queste; il che sarà indifferente alla copia dell'acqua che ne' rispettivi rigagni si versa.

La condizione essenziale per la giusta distribuzione dell' acqua coll' uso di questa fabbrica sta nel doversi trovare mai sempre nelle teste de' rigagni il pelo dell' acqua inferiore al livello della platea del versatore, ed alla sommità degli spigoli del partitore; toccando così a ciascun proprietario la cura d' impedire ogni ringorgamento del suo rigagno, se non vuole scapitare nella quantità della sua acqua, la quale avvertenza è indispensabile in qualunque sorta di derivazioni d' acque. L' essere poi il livello dell' acqua in un rigagno più basso che nell' altro non altera punto la giusta distribuzione, il che forma una proprietà singolare di questo partitore.

Ecco dunque come si manda ad effetto questo partimento d' acqua. Abbiasi per esempio a dividere un canale di acqua o un fiumicello fra tre possessori, come supponemmo, in guisa che di nove parti due ne vadano al primo, tre al secondo, ed al terzo quattro: immaginiamo che queste divisioni debbano succedersi per ordine passando da sinistra a destra del partitore. Si misura la larghezza del

versatore da sponda a sponda, e passando da sinistra a destra si pigliano $\frac{2}{9}$ di questa, e si segna un tal punto, poi procedendo innanzi per altre $\frac{2}{9}$ parti si fa un secondo segno. A questi due segnali dovranno corrispondere sotto il versatore gli spigoli delle tre teste de' rigagni che formano il vero partitore; quanto alle sponde esteriori de' due rigagni che riescono laterali, esse, come avvertimmo, si potranno costruire in quella distanza che più piaccia dalla linea delle sponde del versatore. Il resto si eseguisce come sopra fu descritto. Ciò basta per dare ad intendere come si abbia a fare qualunque altro scompartimento di acqua.

Avvertiremo ch' esser deve cura comune de' proprietarj il mantenere, ove occorra, uniformemente sporgato quel tronco diritto di canale che precede, come esponemmo, il versatore; a tal fine si potranno collocare per segnali alcune travi orizzontali sul suo fondo; ed allora se tornasse opportuno, si potrebbe lasciar la cura a ciascuno proprietario di mantenere sgombro quel tratto d' alveo che corrisponde al suo rigagno.

La perfezione di questo partitore è manifesta; su tutta la larghezza del versatore l' acqua cade dalla medesima altezza, acquista la medesima velocità, e quindi la sua quantità è in proporzione della larghezza di quella grondaia che si versa in ciaschednna testa di rigagno. Le avvertenze insinuate pel tronco di canale che sta innanzi al partitore servono a correggere qualche piccolo divario di velocità iniziale che aver potrebbe l' acqua recandosi al sopracciglio del versatore; e la platea di questo tende vie più ad emendarlo. A che giovi la curvità data superiormente alle sponde del versatore, s' intenderà dalle cose altrove avvertite, senza che qui si ripetano.

I partitori sono particolarmente in uso fra i Bresciani. È celebre la divisione del Chiese in due parti eguali, che si fa a Gavardo. Lunghe e calde controversie per essa si agitarono, che poi vennero composte nel 1763. dal matematico Lecchi, il quale scandagliando con osservazioni la quantità dell' acqua che correva per l' una e per l' altra diramazione, conchiuse doversi ritenere per giusta la divisione eseguita già due secoli addietro dall' architetto Alberti, al qual parere si sottoscrissero le parti con una transazione che fu pubblicata colle stampe (Lecchi, Idrostatica, ecc., part. 3. art. 3.). Ma questo idraulico fondò le sue osservazioni delle velocità dell' acqua ne' due canali sopra le sperienze che fece colla palla a pendolo, le quali di loro natura non solo possono essere talvolta fallaci, ma inducono sempre in errore; onde se nel suo giudizio ha per avventura colpito nel vero, si dovrà ciò attribuire al caso, non all' esame da esso lui istituito.

ANNOTAZIONE VIII.ª

(*All' art.* 106.)

In grazia di quelli che amano di capacitarsi delle cose per via di materiali osservazioni, convien rompere il proposito di non voler più oltre dire della imperfezione della pratica Milanese in dispense d' acqua corrente, a fine di mostrare a questi col fatto sino a qual segno un tale uso ne alteri le misure.

Il fondamento della pratica Milanese per la giusta dispensa delle acque è il requisito che queste all' uscire della bocca di qualsivoglia modulo aver debbano tutte una medesima velocità dovuta ad un battente di due once, ritenuta la condizione di quattr' once d' altezza nella luce del modulo medesimo. Tutto adunque il presente negozio sta nel vedere se il battente, cui è dovuta la velocità dell' acqua sboccante dall' edifizio Milanese, sia di due once, supponendo nel resto che il sopracciò abbia tutte le cose secondo la pratica accomodate. Io pensai alla facile maniera di rendere visibile all' occhio e netto e schietto il battente dell' acqua a segno di poterlo a sua posta e con tutta precisione misurare. A tal fine non ebbi che a porre in pratica la nota canna ricurva, della quale ho parlato facc. 177, e che io feci fare adatta al presente uso nel modo che qui descrivo.

La canna è di due pezzi, l' uno di cristallo lungo circa mezzo metro, di metallo l' altro lungo soltanto $o^{met.}$,06; ambidue di pari diametro $= o^{met.}$,015. La canna di cristallo ad una estremità è cerchiata d' ottone, scolpitovi il verme della vite; il cannoncino breve ha una bocca arrovesciata all' insù con madrevite per unirsi alla canna. Sul fondo della madrevite è collocata una lastretta di metallo che chiude tutta la luce del cannoncello, se non che in mezzo di essa è aperto un rotondo forellino di diametro $= o^{met.}$,002 circa. Uniti a chiocciola e ad angolo retto i due pezzi, si applica lo strumento all' acqua sgorgante dal modulo, volgendo contro di essa il cannoncino perchè ci dia dentro, e tenendo la canna di cristallo diritta rasente il muro esteriore del modulo; un filo a questa avvolto segna il punto cui corrisponde lo spigolo superiore del modulo medesimo, e divide in tal modo la parte della canna che insieme col cannoncello si tuffa nella sua bocca da quella che si alza sopra il suo labbro.

La vena sgorgante, che direttamente imbocca nel cannoncello, fa sollevare l' acqua nella canna verticale di cristallo fino all' altezza dovuta alla sua velocità, ed a questo livello, eccetto piccole ed interrotte vibrazioni, mantienla ferma ed immobile a cagione della piccolezza del foro scolpito nella descritta lastretta, per cui l' acqua

passando attuta e calma l'ondeggiamento. Vedesi in tal maniera elevato sopra la bocca del modulo il genuino battente, al quale è dovuta la velocità dell'acqua; nulla di più evidente e di più preciso si potea desiderare. Si segna col dito o in qualunque altro modo il livello costante cui si è sollevata l'acqua nella canna, e ritirandola si misura col braccio quanto quello riesca alto sopra il segnale che corrispondeva allo spigolo superiore del modulo per ottenere espressa in once la misura dell'effettivo battente.

Il primo saggio di sì piccolo strumento fu da me fatto nel passato Gennaio (1816) a due bocche situate in isponda al Canal grande navigabile di Milano, l'una sopra Boffalora, e sopra Uggiono l'altra, e continuai le osservazioni nel tronco superiore del canale della Martesana, cominciando al porto di Cassano e terminando alle Fornaci. Altre sperienze furono poi eseguite ai 30 di Aprile nel tronco inferiore del medesimo canale, cominciando sotto le mura di Milano e risalendo fino ad un miglio circa sotto Cernusco. Tanto nelle prime che nelle seconde osservazioni il pelo dell'acqua nel canale maestro era a un di presso al medesimo livello, che io reputai circa due once (met. 0,10) più basso del pelo estivo, ch'è il giusto livello al quale sogliono salire queste acque nella state per lo struggimento delle nevi alpine; benchè l'Acquaiuolo, custode delle bocche di Cassano, asseverantemente mi dicesse che il livello dell'acqua corrente pareggiava il pelo estivo.

L'avvenimento delle osservazioni è registrato nella seguente tavola, il quale è divisa in due parti, l'una per lo tronco superiore del canale, e per l'inferiore l'altra. La prima comincia colle mentovate due sperienze eseguite nel tronco superiore del Canal grande, le quali perciò appartengono a questa classe, poi prosegue con quelle istituite lungo il canale della Martesana, principiando dalla bocca Caldara posta rimpetto al porto di Cassano, che in questa serie della tavola è la terza, e terminando alla bocca che dà l'acqua al molino delle Fornaci. La seconda ha principio dalla bocca situata dicontro alla Cascina de' Pomi, discosta due miglia da Milano (omesse le altre inferiori, perchè diconsi d'incerta estrazione), e continua con quelle che per ordine susseguono venendo all'insù fino all'antepenultima sotto Cenusco. A tutte queste bocche nella tavola comprese furono da non molto tempo con pubblica formalità aggiustate e saldate a posto o come diconsi *gatellate* secondo le regole magistrali le imposte (V. il mio *Ragguaglio matematico*, fac. 43 e 44), affinchè tutte avessero il prescritto battente di due once.

La tavola che qui soggiunghiamo è per se stessa chiara senza che sia mestiere di altra spiegazione.

TAVOLA DE' BATTENTI

Osservati a diverse bocche magistrali del canal navigabile della Martesana, ai quali è dovuta l'effettiva velocità dell'acqua dai rispettivi moduli sgorgante.

Le misure sono espresse in once o parti dodicesime del braccio di Milano, il quale è = $0^{met.},59494$.

TRONCO SUPERIORE.		TRONCO INFERIORE.	
Numero delle bocche.	Battenti osservati.	Numero delle bocche.	Battenti osservati.
1	once 7 ¼	** 1	once 4 ½
2	4 ½	2	4 ¼
3	10 ½	3	5 ½
4	4	4	4 ¾
* 5	2 ½	5	4 ¾
6	9 ½	6	2 ¼
7	8	7	1 ¼
8	9	8	2
9	5 ½	9	2 ½
10	6 ½	10	2 ½
11	5	11	3 ½
12	7 ½	12	3 ½

* A questa bocca era stata dall'acquaiuolo custode non poco abbassata l'imposta, perchè nella stagione iemale non le competeva alcun diritto d'acqua, nulladimeno conservava ancora un battonto maggiore del prescritto.

** Alle primo cinque bocche di questo tronco inferiore il pelo dell'acqua nel canal maestro era alquanto superiore al livello ordinario, entrando in esso qualche poco di Lambro, il che abbligava a tenere aperto uno dei suoi diciannove sfogatoj, senza la quale circostanza i battenti sarebbero riusciti alquanto minori delle descritte misure.

Deve certamente recare meraviglia l'aspetto di questa tavola, risultando patentemente agli occhi la somma imperfezione degli edifizj Milanesi, per la quale dove tutti aver dovrebbero un medesimo battente, prescritto di due once, alcuno hallo in vece di un'oncia sola e un quarto, mentre altri lo danno a conoscere di sette, otto, nove e pur anco di dieci once e più; per la quale esorbitante disuguaglianza riesce del tutto infedele e bugiarda la misura dell'acqua fatta coll'uso di queste macchine, giugnendo fino a parità di bocche a rendere l'una il doppio di acqua in confronto dell'altra.

È inutile il cercare dove nasca tanta fallacia, poichè sebbene l'invenzione di simil edifizio fosse a' suoi tempi ingegnosa nella mira di dare sempre all'acqua un medesimo grado di velocità, al che forse il primo autore aspirava con più ragionevole semplicità di costruttura, nulladimeno al lume dell'odierna meccanica considerando la macchina secondo la presente sua costruzione, convien dirla insensata e sciocca in tutte le sue parti. Per altro dalla tavola manifestamente si conosce la grande disugualità de' battenti fra il tronco superiore e l'inferiore; il che dipende dalla maggiore rapidità ed altezza d'acqua che ha la corrente in quello a paragone di questo; donde viene che l'acqua imboccando la cateratta maestra con velocità maggiore e maggiore differenza di livello fra il pelo esterno del fiume e l'interno del bottino (il che aumenta vie più il suo moto), giugne al vicino modulo con celerità assai più viva ed a più forte battente dovuta. Di qua dunque muove uno de' principali vizj di cotal pratica di dispensa d'acque, il quale viene poi in vario guise rinforzato o modificato dagli altri molti, dei quali abbiamo altrove favellato, e che qui è vano rammentare. Si può in vece in questo luogo osservare che l'altezza di quattordici once assegnata all'acqua interna del bottino, la quale corrisponde a due once di elevazione sopra il labbro superiore del modulo, può stare e sta con un effettivo battente assai maggiore di due once; il che deve persuaderci che l'acqua chiusa fra l'imposta e la pietra che sostiene il volto del bottino (dov'è pigliata la misura delle quattordici once) non appartiene al sistema della corrente che sgorga dalla cateratta, poichè non converte la sua velocità o forza viva in altrettanta ascesa; ma a guisa di quell'acqua che annida in un seno o sdrucio fatto nella ripa di una corrente, si compone ad un livello atto ad equilibrarla solo colla pressione della corrente medesima, non colla sua velocità, giacchè la corrente col suo moto non viene a cozzare contro di essa, nè contro le sue sponde, ma soltanto lambendola trapassa senza discapito di velocità.

Corre il terzo secolo da che i periti si aggirano intorno a queste macchine, le trattano per così dire tutto dì, le maneggiano; ma lungi dall'aver giammai conosciuto il grande loro difetto, o

d'averne almeno avuto qualche sentore o sospetto, non han fatto che tessere elogi della loro eccellenza; ed avrebbero verisimilmente seguitato per altri tre secoli ad encomiare l'edifizio magistrale, se altri non rendeva palese agli occhi di tutti l'assurdo suo uso. Io per altro nè mi meraviglio di sì inopportuni elogi, nè per essi fo il menomo aggravio ai periti, poichè ove si tratta di movimento dell'acqua corrente, la cognizione è superiore alla loro professione, nè la pratica si fa coi piedi.

Io mi sono accertato che pel canale grande fra la Castellana e la casa della Camera, vale a dire ad un quarto circa di miglio sotto la sua derivazione dal Ticino, mentre il pelo dell'acqua era due once circa più basso dell'estivo, ch'è l'ordinario nel tempo degli adacquamenti, discorrono più di mille cinquecento once d'acqua magistrali, considerate queste a giusto battente ed a libera cateratta. Ora secondo la ricognizione fatta nel 1791, le bocche di estrazione, compreso anche il canale navigabile di Beregnardo, non sono investite che per once 930 $\frac{7}{1000}$; pongasi per largheggiare assai di 270 once la quantità d'acqua che sotto le mura di Milano si dirama al canal navigabile di Pavia ed al fosso detto del Residuo (*), e diamone altre cent'once all'assorbimento delle ghiaie, fra le quali il Canal Grande nella massima sua parte è escavato, faranno in tutto mille trecento once d'acqua, onde le bocche di estrazione ingoieranno più di dugent'once di acqua, oltre la competente quantità ad esse assegnata. Ma questo calcolo è ristretto, e la copia d'acqua nel canale in tempo estivo, ch'è la stagione del suo grande uso negli adacquamenti, è assai maggiore, crescendo più di altre dugent'once, le quali sono nella massima parte inghiottite dalle medesime bocche, oltre la prescritta loro assegnazione.

Avendo dato a conoscere l'abbondanza dell'acqua che discorre pel Canal Grande, crede di fare cosa grata agli stranieri, ai quali spero che giungerà questo scritto, terminandolo colla notizia della maravigliosa copia d'acqua a principale benefizio dell'agricoltura estratta dai fiumi Ticino ed Adda nel solo territorio di Milano. Nella competente ordinaria pienezza de' canali, che succede nella state appunto quanto l'acqua è impiegata al generale innacquamento de' campi, il Canal Grande estratto dal Ticino porta intorno a mille ottocento once di acqua, computata l'oncia in ragione di metri cubi 2,1168 di acqua ogni sessantesimo minuto primo (Vedi il *Ragguaglio matematico*, facc. 36), per lo canale della Martesana dedotta

(*) Al canale di Pavia si assegnano once 250, ed in caso ha parte anche il canale della Martesana; pel residuo poi non si lascia correre che il superfluo.

dall' Adda non se ne tramanda meno di novecento once; e la Muzza derivata dal medesimo fiume diffonde sopra le campagne circa due mila settecento once di acqua: talchè questi tre maestosi alvei artificiali della Martesana, del Canal Grande e della Muzza avendo le respettive portate di acqua prossimamente nella ragione dei numeri 1, 2 e 3, danno unitamente la somma in circa di cinquemila quattrocento once, equivalenti a 11430 metri cubi di acqua in ciascun minuto di tempo somministrata. Non si danno già come esatte queste quantità, ma come vicine al vero. Egli è però questo uno dei non piccoli vanti dell' insubre industria; e ben dal fin qui detto si comprende che furono assai più saggi e più grandiosi i Milanesi nell' intraprendimento di vaste derivazioni di acque, che dotti ed esperti i loro architetti nell' arte di distribuirle.

TAVOLE PARABOLICHE

DEL PADRE

ISIDORO BERNAREGGI BARNABITA

COLL' AGGIUNTA

DI UNA BREVE APPLICAZIONE DELLE MEDESIME ALLA PRATICA MISURA DELLE ACQUE CORRENTI

PRIMA EDIZIONE

CORRETTA ED AUMENTATA DALL' INGEGNERE ANGELO MAZZOLA

DOTT. IN MATEMATICA, E PROFESSORE DI MATEMATICA ELEMENTARE NEL R. LICEO DI LODI.

PREFAZIONE.

Appena io ebbi data alla luce la mia *Aritmetica riformata*, o sia decimale, che mi sono subito avveduto, che la famosa tavola parabolica del celeb. matematico p. ab. Grandi non è sufficiente per servire a quel fine, per il quale esso l' ha composta, e pubblicata, cioè di calcolare più agevolmente di quello, che senza di essa sarebbesi fatto, le quantità d' acqua, le quali da qualunque sezione o bocca sono tramandate.

Di fatto, essendosi contentato questo chiariss. autore di assegnare alle *radici* della sua tavola due sole decimali cifre, e queste ancora per lo più (ove sono precedute dal segno +) non esatte, è addivenuto che i difetti delle medesime radici si sono talmente sparsi, e dilatati ne' corrispondenti *prodotti*, che hanno alterata non solamente la loro parte decimale, ma l' intera ancora, nella quale stendendosi dove per una, e dove per due cifre hanno resi falsi i veri numeri delle unità, e delle decine.

E perchè ogn' uno vegga essere vero quanto io qui asserisco si prenda, per esempio il prodotto 465,00, che nell' accennata tavola corrisponde all' altezza 60. Si abbia alla mano un' altra tavola parabolica, alle radici della quale siansi assegnate sei cifre decimali esatte, il simile prodotto corrispondente all' altezza 60 sarà 464,7 ec. Ecco adunque alterato nel prodotto della tavola del p. Grandi il vero numero delle unità. Considerando in seguito i *prodotti*, li quali

nelle due tavole corrispondone all' altezza 665, si vedrà che il prodotto della prima tavola è 25439,65, ove nella seconda è 25440, 4 ec. Ecco dunque nel primo prodotto falsificata oltre la cifra delle unità anche quella delle decine.

Ora richiedendo i calcoli delle quantità d'acqua, che i prodotti delle tavole siano moltiplicati per altri numeri interi, i loro errori si moltiplicano altresì, e divengono ne' nuovi prodotti tanto maggiori, quanto più, e quanto grandi sono i numeri interi, per i quali essi si moltiplicano. Quindi nelle misure delle acque particolarmente *assolute* risultano notabili, e gravissimi sbagli, come abbiamo già indicato ne' nostri manifesti, e si farà chiaramente vedere nel decorso di questa opericciuola.

Di qui nasce una assoluta necessità di formare nuove tavole paraboliche, mediante le quali, le quantità d'acqua si possono misurare più esattamente di quello siasi fatto sino ad ora usando la tavola del p. Grandi, o altre, nelle quali i difetti di quella o sussistono interi, o non sono stati abbastanza emendati.

Tavole di questo genere sono quelle, che ti presento, cortese lettore, della maggiore possibile esattezza delle quali io posso assicurare il pubblico; conciossiachè avendole io medesimo, e solo composte una volta, non ho ricusato a comune vantaggio, aiutato da altri, di rifarle una seconda volta; quindi confrontando i differenti risultati, ove occorrevano, Mi è stato agevole di correggere tutti quegli errori, li quali nelle tavole medesime erano parimente scorsi.

Composte le tavole avea io messo insieme un Trattato assai difuso sopra la vera maniera di misurare le quantità d'acqua, siccome ho pubblicato in uno de' miei manifesti, ma non essendomi venuto fatto di poterlo dare alla luce per mancanza d'un sufficiente numero di associati, ho preso il partito di rendere pubbliche, giacchè erano fatte, le mie tavole, alle quali ho aggiunto una breve sì, ma sufficiente applicazione delle medesime alla pratica. In questa vedrai, lettore cortese, le grandi differenze di quantità d'acqua, che alcune volte risultano calcolandole con tavole paraboliche esatte, e con altre difettose, e troppo scarseggianti di cifre decimali.

Aggradisci il mio lavoro, e vivi felice.

PRELIMINARE.

Acciocchè il mio lettore non incontri alcuna difficoltà nel leggere, e ben comprendere questo mio trattatello, accennerò que' teoremi, tratti dalla meccanica, idraulica, e sezioni coniche, li quali servono di base, e sono il fondamento di quelle regole, le quali si debbono osservare per misurare con sufficiente esattezza le quantità d'acqua, che sortano da qualsivoglia sezione o bocca.

I. C'insegna la meccanica, che un corpo, il quale cade liberamente nel vuoto da una data altezza, in fine della discesa acquista una tale velocità, colla quale, se si movesse equabilmente, percorrerebbe nello stesso tempo della discesa uno spazio doppio di quello, che ha percorso cadendo. In oltre dimostra l'Ugenio nel Trattato del suo orologio oscillatorio, che un corpo sodo liberamente cadendo, nel tempo di un minuto secondo percorre piedi Parigini 15, pollici 1 assai prossimamente, o siano pollici 181. Dunque un sodo, il quale cade liberamente da un' altezza di pollici Parigini 181; potrà colla velocità acquistata in fine della sua discesa percorrere equabilmente pollici Parigini 362 in un secondo di tempo.

II. C' insegna in oltre la stessa meccanica, che se un corpo liberamente discende, le velocità da lui acquistate pervenendo a diversi punti della sua discesa sono proporzionali alle radici quadrate delle altezze, delle quali è disceso, o sia degli spazi percorsi, computati dal principio del moto. Così se un corpo cadrà liberamente nella linea verticale AB (*tav.* 5. *fig.* 5.), le velocità, che esso avrà acquistate giunto che sia ne' punti E, D, B saranno proporzionali alle radici quadrate di AE, AD, AB. Quindi perciocchè in ogni parabola Apoloniana le ordinate sono proporzionali alle radici quadrate delle corrispondenti ascisse, se intorno alla retta AB sarà descritta una tale parabola qualunque, le ordinate EF, DG, BK saranno proporzionali alle dette velocità del corpo cadente. E perciocchè in oltre gli spazi percorsi in tempi eguali con equabili velocità, sono proporzionali alle velocità medesime, le ordinate EF, DG, BK saranno parimenti proporzionali agli spazi, che il corpo, colle velocità acquistate in fine delle discese per AE, AD, AB equabilmente percorrerebbe in un medesimo qualunque tempo.

III. Se essendo la retta AB (*tav.* 5. *fig.* 6.) eguale a pollici Francesi 181, alla quale sia ad angolo retto applicata l'altra retta BK eguale a pollici 362, intorno alla medesima AB come asse, si concepirà descritta la parabola AKB, la quale passi per l' estremità K della retta BK; siccome l'ordinata BK esprime lo spazio, che il corpo sodo percorrerebbe equabilmente in un minuto secondo di tempo

colla velocità acquistata nel fine della discesa per AB, non altrimenti le ordinate DG, EF esprimeranno gli spazi, che il medesimo corpo percorrerebbe in un minuto secondo di tempo colle velocità acquistate nel punto D, discendendo per AD, e nel punto E cadendo per AE. Conciossiacosachè poi in ogni parabola Apoloniana il parametro uguagli il quadrato d' un' ordinata diviso per la corrispondente ascissa; se il parametro della parabola AKB si chiamerà P dovrà essere $P = \frac{(362)^2}{181} = \frac{131044}{181} =$ pollici 724. Quindi se con questo parametro intorno all' asse AB si descriverà una parabola, questa passerà per il punto K.

IV. È teorema generalmente ammesso dagli Autori idraulici, perchè abbastanza comprovato cogli esperimenti instituiti dal celebre Guglielmini, Bossut, ed altri, che le velocità delle acque, le quali sortano da' fori aperti ne' lati de' vasi, sono in ragione suddupplicata delle altezze dell' acqua contenuta ne' vasi medesimi, e sovrastante a' fori, ed in oltre eguali a quelle, che acquisterebbe un corpo sodo discendendo liberamente dalla superficie dell' acqua sino a' fori medesimi. Riguardo però a questo secondo punto osserva il Newton, che la vena dell' acqua, la quale sorte da un foro, in qualche distanza da esso, si contrae, e si ristringe, e che acciocchè abbia luogo una cotale uguaglianza, conviene calcolare le quantità d' acqua che sortono da' detti fori non dall' area de' medesimi, ma bensì dall' area della vena ristretta. Il diametro del foro al diametro della vena ristretta si stabilisce dal medesimo Newton essere quella di 25 : 21, il che posto le due aree staranno tra loro, come $25^2 : 21^2 = 625 : 441 = 1,417 : 1$. Nelle bocche d' irrigazione stabiliscono i periti la detta proporzione essere quella di 8 : 5.

V. È opinione comune presso gli idraulici, che le velocità delle acque, le quali sortono da qualche bocca, o sezione prescindendo, da ogni esterno ostacolo, siano eguali a quelle, con le quali l' acqua esce da' fori aperti ne' lati de' vasi sotto eguali altezze di acqua sovrastante, e premente. Quindi se intorno l' altezza AB d' una sezione regolare (*tav.* 5. *fig.* 7.) sarà descritta con qualunque parametro la parabola AKB, le di lei ordinate FE, GD, KB saranno proporzionali tanto alle velocità, con le quali le particelle d' acqua escono da' punti E, D, B della stessa altezza AB, quanto agli spazi, che le medesime particelle percorrerebbero equabilmente in un medesimo tempo, e quindi tutta l' area parabolica AKB, o il rettangolo a lei eguale, sarà proporzionale alla quantità d' acqua, che esce dalla medesima altezza AB. Similmente l' area parabolica PK'Q descritta col medesimo parametro potrà esprimere la quantità d' acqua che sorte dall' altezza, o perpendicolare PQ. Quindi il corpo

AKK'K''HCBA, detto *paraboloide* sarà proporzionale, e potrà esprimere la quantità d'acqua, che tramanda l'intera sezione ABCH.

VI. Se il parametro con cui suppongonsi descritte le parabole AKB, PK'Q ec. fosse di pollici Parigini 724 (§. III.), in tal caso le ordinate EF, DG, BK sarebbero eguali a que' filamenti d'acqua, li quali in un secondo di tempo escono da' corrispondenti punti E, D, B dell'altezza AB; quindi l'area parabolica AKB, o il rettangolo a lei eguale esprimerebbe, e sarebbe eguale alla quantità d'acqua, che sorte nel medesimo tempo da tutta l'altezza AB; ed il detto paraboloide dinoterebbe la quantità d'acqua tramandata in un minuto secondo di tempo da tutta la sezione. È poi chiaro che il valore del paraboloide medesimo si ha moltiplicando il valore della parabola AKB, o dell'eguale rettangolo per la larghezza BC della sezione.

VII. Tutto ciò avrà luogo nel caso che la superficie dell'acqua, che scorre per la sezione, prescindendo dal moto che gli strati superiori per l'attrazione, o per lo sfregamento debbono ricevere dagli inferiori, o da tutt'altra cagione, non abbia alcuna velocità, nè altro movimento, nel qual caso il punto A è il vertice della parabola AKB. Ma in pratica avviene sovente che la superficie dell'acqua, che scorre per un canale orizzontale, abbia una sensibile velocità. Questa velocità può concepirsi come effetto di un'altezza d'acqua sovrastante, la quale colla sua pressione la produca. Un esempio di questo caso può essere il seguente. Sia AB (*tav.* 5. *fig.* 8.) un recipiente pieno d'acqua, la quale per l'apertura DE entri nel canale orizzontale EF. È chiaro, che, prescindendo da ogni ostacolo, il quale nel canale medesimo ritardi la velocità dell'acqua, questa in qualunque punto H della sua superficie avrà una tale velocità, che potrà concepirsi, e sarà realmente prodotta dall'altezza HI = DB di un'acqua premente. Quest'altezza chiamasi *equivalente*. Ora una cotale altezza si potrà agevolmente determinare, ogni qual volta faccia bisogno. Conciossiachè se sopra l'intera, e totale altezza IL intenderemo descritta una parabola col parametro = 724 pollici Parigini; e che la velocità della superficie sia tale, che in un minuto secondo di tempo le faccia percorrere pollici Parigini n, chiamata x l'altezza HI che si cerca, avremo l'equazione determinante $X = \frac{n^2}{724}$.

VIII. Perchè adunque, per determinare l'altezza equivalente necessaria cosa è che sia nota la velocità assoluta della superficie dell'acqua, cioè lo spazio, che essa percorre in un minuto secondo di tempo; recherò qui i mezzi, co' quali la medesima velocità si può investigare, e conoscere. Il primo è quello del *galleggiante*. Questo è un corpo un pò specificamente più leggero dell'acqua, e ciò affine che gettato nell'alveo, si mantenga nella superficie in maniera,

che sia bensì visibile agli occhi de' riguardanti, ma non si elevi troppo sopra di essa, sicchè sia soggetto alla resistenza dell' aria.

Per investigare adunque col mezzo del galleggiante la velocità della superficie, si sceglie un tratto del canale il più regolare, il più lungo, che sia possibile, dove l' acqua scorra con velocità uniforme. Attaccati al galleggiante due funicelle, e raccomandate a due persone, l' una posta sopra la dritta e l' altra sopra la sinistra sponda, le quali mantengano il galleggiante nel filone, o spirito dell' alveo con un orologio, o pendolo a secondi, si noti il tempo, che lo stesso galleggiante impiega a percorrere un dato spazio misurato già sopra la riva, il quale quanto più sarà lungo, l' operazione sarà più esatta. Finalmente dividendo lo stesso spazio per il numero de' minuti secondi impiegati nel percorrerlo, si avrà lo spazio passato in un secondo, il quale espresso in misura Parigina darà la velocità assoluta del filone.

Trovata così questa velocità, per determinare la velocità della superficie, si investigheranno nello stesso modo le velocità da ambe le parti del medesimo per mezzo dello stesso galleggiante; quindi fatta la somma delle tre velocità ritrovate, se ne prenderà il terzo, il quale indicherà la velocità cercata.

IX. Il secondo mezzo è quello del *mulinetto*. Questo istromento non è altro che una picciola ruota del diametro di 12 in 15 pollici, fornita delle sue ale, nelle quali urtando l' acqua, la fa girare, appunto come avviene ne' mulini ordinarj. Non è mio intendimento di trattare qui di questa macchina. Il lettore ne troverà descritto l' uso, ed il modo di servirsene presso gli altri Autori. Qui solo avvertirò che il mulinetto ha il vantaggio sopra il galleggiante, che con esso si può misurare la velocità, che in superficie ha una sezione qualunque, il che non si può ottenere per mezzo del galleggiante.

X. Comecchè trovata nel detto modo la velocità assoluta della superficie, si abbia senz' altro l' altezza equivalente in misura del braccio di Parigi per mezzo dell' equazione $X = \frac{n^2}{724}$ (§. VII.), essa si può altresì ottenere per mezzo del *pendolo*. L' istromento, che qui chiamasi pendolo è un quadrante graduato EIF (*tav.* 5. *fig.* 9.), diviso cioè ne' suoi gradi, e minuti. Dal centro E pendono due fili, l' uno, che dee rimanere sospeso in aria, col peso di piombo, o di ferro P, per dinotare la direzione verticale, nella quale dee adattarsi il lato EF del quadrante, e l' altro più lungo EA, a cui è attaccata la palla A da immergersi nell' acqua a quella profondità, che richiede il bisogno.

Il filo EA dalla forza dell' acqua, che agisce contro la palla viene

allontanato dal perpendicolo EP, e segna sopra il quadrante l' arco FK, che è la misura dell' angolo di deviazione FEK della funicella AE del perpendicolo EP. Nella stessa maniera allungato, o accorciato il filo EM, acciocchè la palla A s' immerga ad una maggiore, o minore profondità nell' acqua, si avrà l' angolo di deviazione FEL del filo EM dal perpendicolo, la misura del quale angolo sarà l' arco FL segnato nella circonferenza del quadrante.

XI. Si osservi che il pendolo non può servire, che ad investigare gli angoli di deviazione nelle piccole profondità sotto la superficie dell' acqua, come d' un braccio, o d' un braccio e mezzo, o poco più, secondo le diverse velocità dell' acqua; conciossiachè nelle profondità maggiori l' acqua urtando nel lungo tratto della funicella, che sta sommerso sott' acqua, la piega, ed incurva per modo, che l' angolo di deviazione notato dalla funicella sul quadrante è sensibilmente maggiore del vero angolo di deviazione della palla.

Per definire poi a quale profondità sotto la superficie dell' acqua si trovi immersa la palla A si dirà (*tav.* 5. *fig.* 10.) come il seno tutto al coseno dell' angolo di deviazione, così la lunghezza EA (la quale deve essere nota) ad un quarto proporzionale; questo dinoterà la EL dalla quale sottraendo la EQ (distanza del centro dalla superficie dell' acqua, parimenti nota) il restante LQ indicherà la profondità cercata.

XII. Ora è teorema meccanico-idraulico, dimostrato particolarmente dal chiariss. p. abate Grandi, che ne' canali orizzontali in diverse profondità sotto la superficie dell' acqua, prescindendo da ogni esterno ostacolo, le tangenti degli angoli di deviazione sono come i quadrati delle velocità dell' acqua. Ma questi quadrati sono altresì come le altezze dell' acqua sovrastante, e premente) §§. IV. e V.). Dunque le tangenti degli angoli di deviazione avranno tra loro la stessa proporzione, che hanno le dette altezze d' acqua.

Ciò posto, se la tangente dell' angolo di deviazione alla profondità M sotto la superficie si chiami T, e la tangente dell' angolo di deviazione in superficie H (*tav.* 5. *fig.* 8.) si chiami t, dovrà stare $T : t = MI : HI$; e quindi $T - t : t : MI - HI : HI = MH : HI$, onde la HI sarà determinata. Supponghiamo per esempio che l' angolo medio di deviazione in superficie H siasi trovato di gradi 30, ed alla profondità M d' un braccio sotto H sia di gradi 33 $\frac{1}{4}$. Le tangenti di questi angoli cercate nelle tavole de' seni, e tangenti, sono 0,57735, e 0,66189. Se dunque faremo 0,66189 — 0,57735 : 0,57735 (= 0,08454 : 0,57735), così 1 al quarto proporzionale bracc. 6, 8, questo sarà il valore dell' altezza equivalente HI.

XIII. Ogni qual volta l' acqua che sorte da una sezione ABCD (*tav.* 5. *fig.* 11.) avrà altezza equivalente AI, è chiaro che per avere

la quantità d' acqua, che sorte dalla medesima sezione, o una quantità ad essa proporzionale, conviene dall' area parabolica IFB, descritta sopra la totale altezza BI sottrarre l' area parabolica IEA descritta intorno alla equivalente AI, e quindi l' area del rimanente trapezio parabolico AEFB esprimerà la quantità d' acqua tramandata dall' altezza AB della sezione, e l' acqua di tutta la sezione si otterrà moltiplicando la detta area per la larghezza BC della sezione. La media ordinata del detto trapezio parabolico esprimerà la media velocità, con cui l' acqua sorte dall' altezza AB, ed uguaglierà la velocità di tutta la sezione ogni qual volta questa sia regolare.

XIV. Perciocchè in seguito ci occorrerà di far uso di questa velocità media, gioverà qui indicare il modo, col quale essa si può determinare. Sopra l' ordinata BF (*tav.* 5. *fig.* 12.) presa $BM = \frac{2}{3} BF$ si compisca il rettangolo IBMO, il quale siccome è noto, uguaglia l' area parabolica IFB. Similmente fatta $AD = \frac{2}{3} AE$ si compisca il rettangolo IADG, il quale sarà eguale all' area parabolica IEA. Sottratto il rettangolo IADG dal rettangolo IBMO, rimarrà lo spazio rettilineo ABMOGDA, il quale sarà eguale al trapezio parabolico ABFE. Ora si faccia (1) BA : AT :: DT ad un quarto proporzionale K, e si prolunghi AT sino in H, sicchè sia $TH = K$, compiuto il rettangolo ABLH, è chiaro che esso sarà eguale al detto spazio rettilineo, e per conseguenza anche al trapezio parabolico ABFE. Sarà dunque $AH = BL$ l' ordinata media del medesimo trapezio: ma $DT = AT - AD = BM - AD = \frac{2}{3} BF - \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \sqrt{BI} - \frac{2}{3} \sqrt{AI}$, dunque starà $BA : AI :: \frac{2}{3} \sqrt{BI} - \frac{2}{3} \sqrt{AI} : K (= TH)$. Dunque l' ordinata media

$$BL = BM + ML (= TH) = \frac{2}{3} BF \left(= \frac{2}{3} \sqrt{BI}\right) + \frac{AI}{BA} \times \frac{2}{3} (\sqrt{BI} - \sqrt{AI}).$$

XV. *Assioma*. Le quantità d' acqua, le quali scorrono per due sezioni, o bocche stanno tra loro in ragione composta delle altezze, delle larghezze delle medesime sezioni, o bocche, delle velocità, con le quali sortono, e del tempo, per cui seguitano a sortire. Imperocchè egli è chiaro, che tanto maggiore, o minore quantità d' acqua sortirà da una sezione, o bocca, quanto maggiore, o minore sarà ciascheduna delle sopraddette quantità; nè si può immaginare altro elemento, il quale insieme co' già accennati concorra ad accrescere o sminuire le quantità d' acqua, che è tramandata da una sezione, o luce. Dunque ec.

Quindi se le quantità d' acqua si chiameranno Q, q, le altezze delle sezioni si diranno A, a, le loro larghezze L, l, le velocità V, v, ed i tempi T, t; starà $Q : q$ come $A \times L \times V \times T : a \times l \times v \times t$.

(1) Eu cl. lib. VI. prop. 14.

Che se in qualche particolar caso sarà $L = l$, $T = t$, starà $Q : q$ come $A \times V : a \times v$; e perciocchè è $V : v = \sqrt{A} : \sqrt{a}$; starà $Q : q = A \times \sqrt{A} : a \times \sqrt{a} = \sqrt{A^3} : \sqrt{a^3}$.

Parimenti se in qualche caso dovrà essere $Q = q$; sarà altresì $A \times L \times V \times T = a \times l \times v \times t$; e se inoltre sarà $A = a$, $T = t$, si avrà $L \times V = l \times v$; e quindi $L : l = v : V$, cioè le larghezze staranno tra loro in ragione reciproca delle velocità.

CAPO PRIMO.

Spiegazione delle tavole.

La prima delle nostre tavole è formata ad imitazione di quella del chiariss. p. Grandi, cioè col parametro $= 1$; ma differente dalla medesima in tre cose. Prima, che dove esso ha assegnate alle *radici* delle altezze due sole decimali cifre, d' onde è nata l'imperfezione della tavola medesima, come già si è detto, alle nostre radici si è attribuita quella quantità di decimali, che fosse sufficiente, acciocchè i corrispondenti *prodotti* ne avessero sei esatte; e conciossiachè secondo il nostro sistema, questa tavola non dee servire ad altro, che a calcolare le quantità d' acqua *relativamente*, nel qual caso i prodotti medesimi non deono essere moltiplicati, che per le larghezze delle sezioni, o bocche, un cotal numero di decimali cifre può essere bastevole per ogni caso pratico.

La seconda differenza si è, che dove nella tavola del Grandi i *prodotti* esprimono i rettangoli circoscritti alle parabole, i nostri ne sono i $\frac{2}{3}$, e però dinotano immediatamente i valori aritmetici delle aree paraboliche.

La terza differenza consiste in ciò, che dove il p. Grandi ha prolungata la sua tavola sino all'altezza 1800, noi ci siamo contentati di promuovere la nostra solo sino a 1200, perchè quand' anche le altezze esprimessero punti, la nostra tavola si estenderebbe sino all' altezza di quasi braccia 9. la quale quasi mai si trova ne' canali, che portano acqua destinata ad irrigare i terreni, e dall' altra parte, quando occorresse di dover misurare acqua di maggior altezza, si potrà supplire al difetto della prima tavola adoperando la seconda, o la terza tavola, le quali si estendono sino all' altezza di braccia 15.

Le altre tre tavole servono a calcolare le quantità d' acqua *assolutamente* in misura del braccio architettonico Milanese, cioè a determinare quant' acqua esca da una data sezione, o bocca in un dato qualunque tempo. Le *radici* della seconda tavola esprimono aritmeticamente i valori di que' filementi d' acqua, che in un secondo di tempo sortono da' punti infimi delle corrispondenti altezze; ed i

prodotti dinotano aritmeticamente quelle quantità d' acqua le quali dalle altezze medesime vengono tramandate parimenti in un minuto secondo di tempo, e lo stesso dee dirsi delle altre due tavole, colla sola differenza, che dove nella seconda tavola le quantità d'acqua sono espresse in braccia, nella terza sono indicate in once, e nella quarta in punti.

Ma per concepire come queste tavole siano state formate, conviene por mente a quanto si è detto nel preliminare §. VI; cioè che se coll' asse AB (*tav.* 5. *fig.* 6.), e col parametro P = pollici 724 sarà descritta la parabola AKB, le ordinate BK, DG, EF ec. esprimeranno in pollici francesi que' filamenti d' acqua, li quali da' rispettivi punti B, D, E ec. dell' asse escono nel tempo di un secondo; e le aree paraboliche AKB, AGD, AFE ec. dinoteranno le quantità d' acqua, che sortono dalle corrispondenti altezze AB, AD, AE in un minuto secondo di tempo. Dal che segue, che se i pollici 724 si ridurranno a misura del braccio Milanese, le dette quantità d' acqua saranno altresì indicate in parti del medesimo braccio. Ora perciocchè i pollici 724 sono eguali a piedi Parigini 60,3333 ec.; ed il piede di Parigi sta al braccio d' opera Milanese come 144:263,73, calcolando si troverà che piedi Parigini 60,33 ec. equivalgono a braccia Milanesi 32,9427828910817 ec., e tale è il parametro di cui ci siamo serviti per la costruzione della seconda tavola (1); quindi moltiplicando ciaschedunà altezza per questo parametro, si è da ciaschedun prodotto estratta la radice quadrata, e tali sono le radici notate nella tavola parabolica seconda, le quali esprimono il valore aritmetico delle ordinate della fig. 6. Inseguito moltiplicata ciascuna radice per la corrispondente altezza, si sono presi i $\frac{2}{3}$ de' prodotti, e questi sono i *prodotti* indicati nella medesima tavola, li quali esprimono i valori aritmetici delle aree paraboliche della stessa fig. 6.

Moltiplicato il parametro braccia milanesi 32,94 ec. per 12, si è determinato il parametro della tavola terza di once 395,513388692981456 ec., e moltiplicando questo parametro di nuovo per 12 n' è risultato il parametro punti milanesi 4743,76 ec., il quale ha servito per la costruzione della quarta tavola.

A questa tavola si è assegnato quel numero di decimali cifre, che si è creduto necessario, e sufficiente per qualunque calcolo idrometrico, ed acciocchè esse potessero generalmente servire a quel fine, per il quale sono state composte, cioè di calcolare con bastevole

---

(1) Tale parametro ridotto a misura Italiana è di metri 19,5986438, la radice del quale è 4,42703555408 per cui conosciuti li rapporti della misura metrica lineare con quella dei differenti paesi, sarà facile il calcolare tutte le quantità d' acqua che sortono dalle bocche d' irrigazione in misura metrica di capacità.

esattezza le quantità d' acqua in ogni caso. Ma perchè la quantità di decimali cifre da noi assegnate a' prodotti delle tavole paraboliche non e sempre necessaria in tutti i casi pratici, e principalmente in quelli, ne' quali si tratti di misurare le quantità assolute d' acqua, che sgorgano dalle bocche d' irrigazione, perciò acciocchè i Periti possano dall' una parte misurare con sufficiente esattezza le dette quantità, e dall' altra non gettino tempo e fatica ne' calcoli idrometrici, recherò qui la regola, che essi debbono seguire per far uso di quel preciso numero delle stesse decimali cifre, che può bastare all' intento.

Sia P il prodotto di una delle tre ultime tavole, e per giugnere alla fine del calcolo, convenga moltiplicarlo per due altri numeri L, T (larghezza della sezione, e tempo) sicchè l' ultimo risultato debba essere $P \times L \times T$, se le parti intere di L, T saranno composte di cifre numero p, q, a P si dovranno assegnare cifre decimali $p + q - 1$, cosicchè se sarà $p = 3$, e $q = 4$, P dovrà avere cifre decimali $3 + 4 - 1 = 6$; se sarà $p = 4$, e $q = 6$, P dovrà avere cifre decimali $4 + 6 - 1 = 9$.

Con questa regola potrà il Perito camminare con franco passo nel conteggio idrometrico, sicuro, che giunto alla fine del suo calcolo, avrà trovato il vero quantitativo d' acqua che cerca; ma senza una cotale regola, calcolando in ogni caso con un medesimo numero di cifre decimali, massimamente scarso, come sicuramente è quello delle tavole sin' ora pubblicate, è un operare alla cieca, e, come suol dirsi, a tastone, senza sapere ove si vada a finire (1).

CAPO SECONDO.

Dell' uso della prima tavola nella misura delle quantità relative *d' acqua.*

Proposizione I.

Calcolare relativamente la quantità d' acqua, che passa per una sezione regolare di un canale orizzontale, o quasi orizzontale, nel quale l' acqua in superficie sia senza sensibile velocità.

Soluzione.

Sia l' altezza della sezione braccia 6, once 7, o siano once 79; e la larghezza braccia 4 once 5, cioè once 53. Si cerchi nella tavola

(1) Giova qui far osservare che anche nell' estrazione della radice quadrata

parabolica prima il prodotto corrispondente all' altezza 79, il quale è 468,111572. Questo si moltiplichi per la larghezza 53, il prodotto once cube 24819,91331 sarà la quantità cercata.

Calcolata similmente la quantità d' acqua di un'altra simile sezione, si avrà la proporzione che passa tra le quantità d' acqua tramandate da ambe le sezioni.

PROPOSIZIONE II.

***Misurare** relativamente la quantità d' acqua, che esce da una sezione regolare di un canale orizzontale nel caso che l' acqua in superficie abbia una sensibile velocità.*

SOLUZIONE.

Sia l' altezza della sezione braccia 5, once 6, cioè once 66, la larghezza di braccia 8, once 3, o siano once 99 milanesi, e l' acqua in superficie sia dotata di una tale velocità, che le faccia percorrere braccia 3, once 5 milanesi, o siano once 41 in un minuto secondo di tempo.

---

necessario saper determinare il preciso numero dello cifre decimali da darsi al quadrato perchè la radice debba avere un fissato numero di cifre sicure.

Sappiasi dunque che se n sarà il numero delle cifre decimali che si vogliono sicure nella radice, basterà darne al quadrato un' egual numero, o viceversa; cosicchè colle tredici cifre decimali state assegnate al parametro, la radice dello stesso si potrà ottenere con tredici cifre decimali sicure: di fatto operando col conosciuto metodo per l' estrazione della radice quadrata fino all' estinzione delle cifre decimali espresse nella potenza, ed ottenute nella radice sei cifre decimali, si avranno le residue sette altre con facilità, mentre non riducesi l' operazione che ad una semplice divisione a cifre decimali, seguendo quelle cautele che il calcolo decimale insegna nella sua teoria. L' indicata operazione che qui contrappongo non ne dubito che possa servire sufficientemente di dimostrazione e di prova.

82,9427823910817	5,7395803323136
794	115821
4527	
109882	
666139	
9221410	
38146817	
3709334	
265586	
36002	
1565	
417	
72	

Si determini primamente l' altezza *equivalente* mediante l' equazione $X = \frac{(41)^2}{395,313} = \frac{1681}{395,313} =$ once 4,252. Aggiunta quest' altezza all' altezza 66 della sezione, si avrà l' intera altezza = once 70,252.

Supponiamo per ora, che si possa trascurare il rotto decimale 252. Dal prodotto 390,441345, il quale nella prima tavola corrisponde all' altezza 70 si levi il prodotto 5,333333, che corrisponde all' altezza 4; ed il restante 385,108012 (il quale rappresenta il trapezio parabolico corrispondente all' altezza della sezione) si moltiplichi per la larghezza 99, il prodotto once cube 38125,5931 esprimerà la quantità relativa d' acqua, che sorte dalla sezione.

Volendo tener conto del sopraddetto rotto decimale once 0,252, perciocchè esso equivale prossimamente a punti 3, l' altezza equivalente, sarà di punti 51; la totale compresa l' equivalente, ridotta a punti sarà 843, e finalmente la larghezza della sezione sarà punti 1188. Sottratto adunque dal prodotto 16314,034468 il quale nella tavola prima corrisponde all' altezza 843, il prodotto 242,808566 corrispondente all' altezza 51, e moltiplicando il restante 16071,225902 per la larghezza 1188, il prodotto punti cubi 19092616,37 indicherà la quantità relativa d' acqua, che sorte dalla sezione.

Annotazione. Se i trovati punti cubi si volessero ridurre a once cube, primamente conviene avvertire, che per una tale riduzione non altro vuolsi qui intendere, se non che di determinare il numero di once cube nel caso che le dimensioni della sezione fossero state espresse in once in vece di punti. Ciò bene inteso si divida il numero di punti cubi per il costante numero 498,8306, il quoziente 38274 dinoterà la quantità di once cube d' acqua. Questa quantità eccede la trovata di sopra 38125 di once cube 149, le quali corrispondono al rotto decimale primamente trascurato.

Per comprendere a quale fondamento s' appoggi la qui indicata regola, intorno all' altezza A d' una sezione regolare s' intendano descritte due parabole, l' una avente per parametro un punto, e l' altra un' oncia. Il numero de' punti contenuti nella larghezza della sezione sia m. La quantità d' acqua calcolata colla prima parabola sarà proporzionale a $n\sqrt{n} \times m = \sqrt{(n^3 \times m^2)}$. Ora il numero delle once contenute in A sarà $= \frac{n}{12}$; e contenute nella larghezza sarà $= \frac{m}{12}$; onde la quantità d'acqua calcolata colla seconda parabola sarà proporzionale a $\frac{n}{12} \times \sqrt{\frac{n}{12}} \times \frac{m}{12} = \sqrt{\frac{n^3}{12^3}} \times \frac{m}{12} = \sqrt{\left(\frac{n^3 \times m^2}{12^5}\right)}$. Quindi starà la quantità calcolata in punti cubi alla quantità calcolata in

once cube come $\sqrt{(n^3 \times m^2)} : \sqrt{\left(\frac{n^3 \times m^2}{12^5}\right)} = \sqrt{12^5} : \sqrt{1} = \sqrt{12^5} : 1 =$ 498,830632 : 1. Dunque dividendo le quantità di punti cubi costantemente per il numero 498,830632, il quoziente dinoterà la quantità d' acqua espressa in once cube.

Lo stesso divisore si adoprerà, ogni qual volta si vorranno ridurre le once cube a braccia cube. Quindi è facile il vedere che per ridurre immediatamente un dato numero di punti di acqua relativa a braccia cube, conviene dividere il numero de' punti per il costante numero $(498,8306)^2 = 248832$ (1).

Proposizione III.

Calcolare relativamente *la quantità d' acqua che sorte dall' oncia d' acqua Milanese.*

Quest' *oncia* è un' apertura, o luce rettangola avente once 3 di larghezza, once 4 di altezza, con due once di acqua stagnante sopra il lembo superiore della luce, la quale da' periti chiamasi *battente*.

È chiaro che il *battente* ad altro non serve, che ad accrescere la velocità dell' acqua, che viene tramandata dalla luce dell' *oncia*. Quindi per calcolare relativamente la quantità d' acqua, che esce dall' *oncia* milanese, dal prodotto 9,797959, il quale nella tavola prima corrisponde all' altezza 6 (somma delle altezze della bocca, e del battente) si sottragga il prodotto 1,885618 corrispondente all' altezza 2 del medesimo battente, ed il restante 7,912341 si moltiplichi per la larghezza 3 della luce, il prodotto once cube 23,737023 indicherà la cercata quantità d'acqua.

Annotazione. Questa quantità calcolata colla tavola del p. Grandi

(1) Sembra a prima vista uno strano paradosso, che per ridurre li punti cubi ad once cube debbano dividersi quelli pel numero costante 498,830632, e non già pel conosciuto numero 1728, ma tale paradosso cesserà d' esserlo quando si voglia riflettere che li punti od once che diconsi cube nelle quantità relative sono totalmente diverse dalli punti od once cube dotate di tutte tre le dimensioni eguali al punto od oncia del braccio lineare che serve di misura delle bocche d' irrigazione; diffatti fino a tanto che il parametro p si ritiene per l' unità astratta, l' espressione $mn\sqrt{np} = \sqrt{(m^2 n^3 p)} = \sqrt{[(\text{punti})^5 \times p]}$, rappresenta bensì un solido, perchè di tre dimensioni, ma in verità un solido astratto. Dunque li così detti punti, once, ec. cube delle quantità relative, non hanno che il nome comune colli punti, once, ec. cube delle quantità assolute rappresentate da $\sqrt{[(\text{punti})^5 (\text{p. punti})]} = \sqrt{[(\text{punti})^6]} = (\text{punti})^3$, oppure da $\sqrt{[(\text{once})^5 (\text{p. once})]} = \sqrt{(\text{once})^6]} = (\text{once})^3$, ec.

trovasi essere once cube 23,76, la quale eccede la determinata da noi colla nostra tavola di once cube 0,02297. Quindi supposto che la vera quantità che sgorga dall' *oncia* milanese sia valutata lire circa 24000, il valore del detto eccesso sarà di lire 23, e soldi 4. Perciocchè adunque il frutto annuo del capitale sborsato dal compratore dell' oncia d' acqua milanese è l' uso di tutta la quantità d' acqua, che dall' *oncia* medesima esce nel corso di un anno, calcolando l' acqua colla tavola del Grandi l' utente sarà annualmente, e perpetuamente danneggiato di lire 23 soldi 4.

Proposizione IV.

Misurare relativamente *la quantità d' acqua che passa per l'* oncia *d' acqua Lodigiana.*

Quest' *oncia* è una luce rettangola avente per altezza once 9, per larghezza once 1 del braccio agrimensorio lodigiano, ed once 2 del braccio milanese di battente. Per la qual cosa volendo calcolare la detta quantità d' acqua in misura del braccio lodigiano, necessaria cosa è ridurre il battente a once del medesimo braccio.

Ora stando il braccio milanese al lodigiano come 1 : 0,765346, un' oncia milanese equivalerà a once lodigiane $\frac{1}{0,765346}$; e due di quelle a $\frac{2}{0,765346} = 2,613195$ di queste = punti lodigiani 31; quindi tutta l' altezza dell' *oncia* compreso il battente sarà di punti 139, se adunque dal prodotto 1092,528887, il quale nella tav. parabo. I. corrisponde all' altezza 139 si sottrarrà il prodotto 115,067128 corrispondente all' altezza 31, ed il restante 977,456759 si moltiplicherà per la larghezza di punti 12, si troveranno punti cubi lodigiani 11729,481108, li quali divisi per 498,83 daranno once cube lodigiane 23,513984.

Annotazione. Questa quantità calcolata colla tavola del p. Grandi è punti cubi 11729,16 = once cube 23,51, la quale manca dalla nostra di once cube 0,003984. Quindi ammettendo che l' *oncia* d' acqua milanese si venda per il prezzo di lire circa 24000, come scrive l' Ingegnere milanese, perciocchè l' acqua che tramanda l' *oncia* d' acqua lodigiana è più della metà dell' acqua che tramanda la milanese, come si vedrà in appresso, prescindendo da tutte quelle circostanze che possono far variare la proporzione tra il prezzo, e la quantità d' acqua che si vende, la quantità d' acqua dell' *oncia* lodigiana dovrebbe valere almeno lire 12000, il che posto il valore della quantità d' acqua trascurata dovrebbe essere di lire 2.

Con una tavola parabolica a sole tre cifre decimali, la quantità d'acqua *relativa* dell'oncia lodigiana è stata ultimamente determinata di once cube 23,54; l'eccesso della quale sopra la determinata da noi deve valere lire 13, soldi 8 circa.

PROPOSIZIONE V.

Calcolare relativamente *la quantità d'acqua che passa per il* Quadretto *Mantovano*.

Questo quadretto è una luce quadrata di un braccio agrimensorio, o piede mantovano, o siano 12 once di lato con 2 once di battente. Quindi per misurare la quantità d'acqua, che da esso viene tramandata, dal prodotto 34,922124 della tavola prima corrispondente all'altezza 14 si sottragga il prodotto 1,885618 il quale corrisponde all'altezza 2 del battente, ed il restante 33,036506 si moltiplichi per la larghezza 12, e ne risulteranno once cube mantovane 396,438072.

Annotazione. La quantità d'acqua del quadretto mantovano calcolata colla tavola parabolica del p. Grandi è di once cube mantovane 396,24, la quale è mancante dalla nostra di once cube 0,198072, e calcolata con una tavola parabolica a tre sole decimali cifre esatte è d'once cube 396,432 mancante dalla nostra di once cube 0,006072. Ora stando la quantità dell'*oncia* d'acqua milanese alla quantità del quadretto mantovano come 1 : 9,121797, ragionando come nell'annotazione alla precedente proposizione, la quantità del medesimo quadretto dovrebbe valere lire 218926; e quindi il valore della quantità *trascurata* nel primo caso dovrebbe essere di lire 43363. 2. 2, e nel secondo di lire 3, e 8 soldi; questo valore cresce di molto riguardo alle quantità *assolute*; come si vedrà a suo luogo.

PROPOSIZIONE VI.

Calcolare relativamente *la quantità d'acqua dell'* oncia *Pavese*.

Quest'*oncia* ha le medesime dimensioni che la milanese, regolate però sul braccio distributivo delle acque nel pavese. Quindi senz'altro calcolo, la quantità che si cerca sarà non altrimenti che nel milanese, once cube pavesi 23,737023.

Proposizione VII.

Misurare relativamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Novarese*.

L' *oncia* Novarese ha le medesime dimensioni dell' oncia Milanese, ma determinate in misura del proprio braccio da legname. Quindi la quantità cercata sarà once cube del braccio Novarese 23,737023.

Annotazione. Riguardo a queste due ultime bocche avrà luogo quanto si è detto nelle annotazioni precedenti.

Proposizione VIII.

Calcolare relativamente *la quantità d' acqua tramandata dall' oncia Cremonese*.

Quest' *oncia* è una luce rettangola avente un' altezza di once 10; la larghezza once 1, con battente di once 1 del braccio agrimensorio cremonese. Per calcolare adunque la detta quantità, dal prodotto 24,321914, il quale nella tavola parabolica I. corrisponde all' altezza 11, si levi il prodotto 0,666666 che corrisponde all' altezza 1 del battente, e la differenza 23,655248 si intenda moltiplicata per la larghezza 1; il prodotto once cube cremonesi 23,655248 sarà la quantità cercata.

Proposizione IX.

Misurare relativamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Cremasca*.

Le once d' acqua Cremasca sono di diversa specie. La più comune però non differisce dalla Cremonese se non nelle misure regolate sul braccio agrimensorio Cremasco. Quindi la detta quantità sarà once cube cremasche 23,655248.

Raccoglierò nella seguente tavola tutte le quantità d' acqua delle sopra riferite bocche, calcolate in misura del rispettivo braccio.

TAVOLA I.

PAESI.	Quantità relative calcolate in misura del braccio proprio.
Milanese Once cube	23,737023
Lodigiano	23,513984
Mantovano	396,438072
Pavese	23,737023
Novarese	23,737023
Cremonese	23,655248
Cremasco	23,655248

Per determinare la proporzione, che passa tra le notate quantità d' acqua, fa d' uopo ridurle tutte ad essere espresse in parti d' un medesimo braccio, per esempio il milanese. Ora per effettuare queste riduzioni, conviene che sia nota la proporzione che passa tra il braccio milanese d' architetto, ed il consimile braccio di ciascheduno altro paese. Queste proporzioni sono indicate nella seguente tavola, nella quale si è preso per fondamentale unità lo stesso braccio milanese.

TAVOLA II.

Braccio Milanese =	1,000000
Lodigiano	0,765346
Mantovano	0,784722
Pavese	1,055424
Novarese	1,018953
Cremonese	0,812757
Cremasco	0,789641

Poste queste proporzioni de' bracci, passiamo alle sopraddette riduzioni.

Proposizione X.

Ridurre la quantità d'acqua relativa dell' oncia *Lodigiana a quantità relativa calcolata in parti del braccio Milanese.*

SOLUZIONE.

Ciò si può ottenere in due maniere. 1.° Riducendo le dimensioni dell'*oncia* ad essere espresse in parti del braccio milanese, e quindi per mezzo della prima tavola calcolare la quantità d'acqua dell'*oncia*. 2.° Determinando la proporzione, che passa tra la quantità d'acqua calcolata in parti del braccio proprio di ciaschedun paese, e la quantità calcolata in parti del braccio milanese, e quindi per una semplice regola del tre ridurre l'una all'altra. Qui faremo uso della prima maniera, tanto più che questa ci servirà in seguito a calcolare più speditamente le quantità *assolute*; riserbandoci ad usare la seconda riguardo a queste assolute quantità.

Il braccio milanese stando al Lodigiano come 1 : 0,765346, un'oncia lodigiana equivalerà a once del braccio milanese 0,765346 = punti 9,164172, e once 9 lodigiane uguaglieranno once milanesi 9 × 0,765346 = 6,888114, onde tutta l'altezza dell'*oncia*, compreso il battente sarà di once milanesi 8,888114 = punti milanesi 107 prossimamente. Ora calcolando la quantità d'acqua dell'*oncia* lodigiana col mezzo della prima tavola parabolica, si troveranno punti cubi milanesi 6143,717320, li quali divisi per 498,83, danno once cube 12,316254.

Proposizione XI.

Fare la sopraddetta riduzione nella quantità d'acqua del quadretto *Mantovano.*

SOLUZIONE.

Dalla proporzione che passa tra il braccio milanese, e mantovano, si raccoglie che due once mantovane equivalgono a once milanesi 2 × 0,784722 = 1,569444 = punti 18,833328, cioè prossimamente 19,6664, e 12 di quelle a 9,41 di queste = punti 113, e finalmente once 14 mantovane a 11 once milanesi = punti 132. Adunque calcolando col mezzo della prima tavola con queste dimensioni la quantità d'acqua del quadretto mantovano, si troveranno punti cubi milanesi 108007,810629 = once cube 216,522283.

Proposizione XII.

Fare la medesima riduzione nell' oncia *Pavese.*

SOLUZIONE.

Dalla proporzione dei due bracci, si raccoglie che 2 once pavesi uguagliano once milanesi $2 \times 1{,}055424 =$ once $2{,}110848 =$ punti 25, e tutta l'altezza dell'*oncia*, compreso il battente è di once $6 \times 1{,}055424 = 6{,}332544 =$ punti 76, e once 3 di larghezza $=$ punti milanesi 38. Calcolando adunque la quantità d'acqua come si è detto, si troveranno punti cubi milanesi $13618 =$ once cube 27,299847.

Proposizione XIII.

Effettuare la medesima riduzione nell' oncia *Novarese.*

SOLUZIONE.

Ragionando come ne' precedenti esempi si troverà, che l'altezza totale dell'*oncia* è di punti milanesi 73, ed il battente di punti milanesi 24, e la larghezza di punti 37. Quindi calcolando mediante la prima tavola parabolica, si troverà che la quantità d'acqua è di punti cubi milanesi $12484{,}706944 =$ once cube 25,027979.

Proposizione XIV.

Ridurre la quantità d'acqua dell' oncia *Cremonese.*

SOLUZIONE.

Riducendo le dimensioni di quest'*oncia* a dimensioni misurate col braccio milanese, si troverà che un'oncia del braccio cremonese equivale a once del milanese $0{,}812757 =$ punti $9{,}753084 =$ punti 10. Lo stesso valore sarà quello del battente, e tutta l'altezza di once 11 cremonesi sarà $=$ once milanesi $11 \times 0{,}812757 = 8{,}940327 =$ punti milanesi 107,283924. Dunque usando la prima tavola parabolica, si troveranno punti cubi milanesi $7167{,}95915 =$ once cube 14,3695430.

Proposizione XV.

Fare la medesima riduzione nella quantità d'acqua dell' oncia *Cremasca.*

SOLUZIONE.

L'altezza totale di quest'*oncia* è di punti milanesi 104; il battente

di punti 9, e tale ancora la larghezza. Per la quale cosa si troveranno once cube milanesi 12,432244.

Ecco raccolte nella seguente tavola tutte queste quantità.

TAVOLA III.

Quantità relative calcolate in parti del braccio Milanese.		
Dell' *oncia*	Milanese	23,737023
	Lodigiana	12,316254
Del quadretto	Mantovano	216,522283
Dell' *oncia*	Pavese	27,299847
	Novarese	25,027979
	Cremonese	14,3695430
	Cremasca	12,4322441

Se la quantità d' acqua dell' *oncia* milanese si prenda per l' unità, essa starà a ciascheduna delle altre come nella tavola seguente.

TAVOLA IV.

Quantitità d' acqua dell' *oncia* Milanese	1,000000
Dell' *oncia* Lodigiana	0,518862
Del quadretto Mantovano	9,121711
Dell' *oncia* Pavese	1,150095
Dell' *oncia* Novarese	1,054385
Dell' *oncia* Cremonese	0,605364
Dell' *oncia* Cremssca	0,523749

CAPO TERZO.

Dell' uso delle altre tre tavole paraboliche nella misura delle quantità assolute delle acque correnti.

Proposizione XVI.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua, che passa per una data sezione.*

Soluzione.

I. Sia l' altezza della sezione di braccia 4, la larghezza di braccia 10 milanesi, e l' acqua che vi passa sia senza sensibile moto in superficie. Il prodotto 30,6110950, il quale nella tavola seconda corrisponde all' altezza 4, si moltiplichi per la larghezza 10, il prodotto braccia cube 306,110950 dinoterà la quantità d' acqua, che sorte dalla sezione in minuto secondo di tempo.

II. Sia di nuovo l' altezza della sezione di braccia 2, once 8, e la larghezza braccia 6, once 6 milanesi, cioè quella di once 32, e questa di once 78. Si moltiplichi il prodotto 2399,410031, che nella tavola parabolica terza corrisponde all' altezza 32, per 78, il prodotto once cube 187153 indicherà la quantità, che esce in un minuto secondo di tempo. Dividendo questa quantità per 1728 (numero delle once cube, che compongono il braccio), si avranno braccia cube 108 prossimamente.

III. Sia finalmente l' altezza della sezione braccia 1, once 6, punti 8 = punti 224, e la larghezza braccia 2, once 4, punti 9 = punti milanesi 345. Si moltiplichi il prodotto 153936,6932, il quale nella tavola parabolica quarta corrisponde all' altezza 224, per 345, il prodotto punti cubi milanesi 53108159 sarà la quantità d' acqua tramandata in un secondo di tempo, e dividendo per 1728, si troveranno once cube 30733.

Proposizione XVII.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua, che sorte da una sezione regolare, la quale sia dotata in superficie di sensibile velocità.*

Sia la sezione la medesima che nel caso primo precedente, e la velocità della superficie dell' acqua sia tale che le faccia percorrere braccia 6 in un secondo di tempo.

Si trovi primamente l' altezza equivalente, che può produrre la velocità della superficie, la quale sarà braccia $\frac{36}{36,94 \text{ ec.}}$ = braccia 1 prossimamente. Quindi dal prodotto 42,780306, il quale nella tavola parabolica seconda corrispondo all' altezza 5 si levi il prodotto 3,826386, il quale corrisponde all' altezza 1, ed il restante 38,953919 si moltiplichi per la larghezza 10, e si avranno per un minuto secondo di tempo braccia cube 389,53919.

PROPOSIZIONE XVIII.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Milanese*.

SOLUZIONE.

Dal prodotto 194,307816 il quale nella tavola parabolica terza corrisponde all' altezza di once 6, levato il prodotto 37,490781, che nella medesima tavola corrisponde all' altezza 2 del battente; il restante 157,317035 (che rappresenta il trapezio parabolico corrispondente all' altezza di once 4 della luce) si moltiplichi per la larghezza d' once 3, il prodotto once cube milanesi 471,951105 dinoterà la quantità d' acqua, che dall' oncia sorte in un secondo di tempo.

Moltiplicando il trovato numero di once cube per 60'', si troverà che in un minuto primo di tempo ne sortono once cube 28317, prossimamente = braccia cube 16.

Annotazione. Ammettendo col p. De-Regi nella sua operetta idraulica pag. 75, che il braccio cubo milanese equivalga a libbre grosse (di 28 once) 283,43, moltiplicando le braccia 16, ne risulteranno libbre 4534. E conciossiachè egni libbra di 28 once equivale ad un boccale, e boccali 96 formano la brenta, dividendo la trovata quantità di libbre per 96, si troveranno brente 97.

Lo stesso risultato a un dipresso si trova dando al braccio cubo d' acqua quel valore, che all' occasione dell' introduzione delle nuove misure si è ritrovato avere in Milano. Con diligentissime esperienze si è determinato che once cube 2,68321 d' acqua del pozzo, che sta nel Monte di S. Teresa, equivalgono in peso ad una libbra piccola, o sia a once 12 milanesi. Quindi facendo, come once cube 2,68321 a once 12 di peso milanese; così le trovate once cube 28317 al quarto proporzionale once di peso 126640 questo indicherà il numero delle once in peso milanese, le quali sortono dall' *oncia* in un minuto primo. Quindi dividendo questo numero primamente per 28, ed in seguito il quoziente per 96, oppure una sol volta per 28 × 96 = 2688, il quoziente 47 esprimerà il numero delle brente.

Questa quantità d' acqua è sensibilmente maggiore della determinata dal p. De-Regi co' suoi calcoli di brente $33\frac{1}{4}$, o più veramente (correggendo un piccolo sbaglio da lui preso nel determinare la proporzione tra la quantità d' acqua che sorte da un foro circolare appena sommerso sott' acqua, e quella che esce dal quadrato circoscritto), di brente $32\frac{1}{4}$ prossimamente. L' esperimento da lui fatto la determina di brente 32. Come adunque conciliare la quantità da noi ritrovata con quella di questo ch. Autore?

Già si è osservato di sopra col Newton, che la vera quantità d' acqua, che sorte da una bocca, non deve calcolarsi dall' area della bocca medesima, ma bensì da quella della vena ristretta. Facendo adunque secondo questo Autore 625 : 441, così brente 47 al quarto, si troveranno brente 33, la qual quantità poco differisce dalla determinata dal p. De-Regi col suo calcolo. Quanto poi all' esperimento veggansi le eccezioni, che Egli medesimo vi fa.

Ammettendo co' Periti la proporzione di 8 : 5, ne risulterebbero sole brente 29 circa, onde sembra che a questa ragione debba preferirsi quella del Newton (*).

(*) Io credo, che l' errore cui dice il padre Bernareggi, abbia commesso il padre De-Regi nel determinare la proporzione tra la quantità d' acqua che sorte da un foro circolare appena sommerso sott' acqua, e quella ch' esce dal quadrato circoscritto, sia stato corretto dallo stesso padre De-Regi nella seconda edizione della sua operetta sulla tavola parabolica (Milano 1804), mentre in questa edizione non trovo, nè l' errore di che si parla, nè il risultamento di brente $33\frac{1}{4}$, che se ne cita. Leggesi alla pagina 67 di questa ristampa, *che la quantità d' acqua, che scorre per il foro dell' oncia d' acqua milanese in un minuto d' ora è libbre milanesi di 28 once* 3041,31494; le quali ridotte a *brente* milanesi, ciascuna di libbre 96, corrispondono a brente 31,68036. E questo risultamento è assai vicino a quello della sperienza, che equivale a brente 32 circa.

Meglio poi si concilia il risultamento del padre Bernareggi con quello del padre De-Regi, prendendo pel rapporto fra la sezione della luce e quella della vena contratta, il risultamento medio fra quelli delle sperienze di Mariotte e di Bossut, il quale fu da noi trovato equivalere a 0,6727, siccome dicemmo nella nota al §. 105. dell' opera del sig. Tadini (vedi la pag. 217 di questo volume). In fatti trova il padre Bernareggi, per l' erogazione dell' oncia milanese, 47 brente; e queste moltiplicate pel rapporto anzidetto, diventano brente 31,6169 assai poco lontane dalle brente 31,68036 trovate dal padre De-Regi.

Si vede pertanto, che nè il rapporto di Newton, fra l' area della luce e quella della vena contratta, nè quello adottato dai Periti, sono da adoprarsi nel calcolo della portata di quelle luci il cui battente è piccolissimo.

Proposizione XIX.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua che esce dall'* oncia *Lodigiana*.

Per far uso delle nostre tavole, conviene ridurre le dimensioni lodigiane a misura del braccio milanese; come già si è fatto negli esempj del capo precedente. Dal prodotto adunque 50821,3026 ec. il quale nella tavola quarta corrisponde all' altezza di punti 107 si levi il prodotto 5398,6725 corrispondente all' altezza 24; ed il restante 45422,630 ec. si moltiplichi per la larghezza 9,164172, il prodotto 416260,794288 punti cubici milanesi sarà la quantità d' acqua che sortirà in un minuto secondo; e dividendo per 1728, si troveranno once cube 240,891663.

Annotazione. Conciossiachè le quantità relative debbono stare tra loro come le assolute, dalle proporzioni recate nella precedente tavola quarta, e dalla quantità assoluta once cube milanesi 471,95108 tramandata in un minuto secondo di tempo dall' *oncia* milanese si potrebbe determinare la quantità assoluta d' acqua che in qualunqne tempo esce dall' *oncia* lodigiana, come di ciascuna delle altre. Ma potendo questo metodo qualche volta ne' casi pratici indurre in errore i poco accorti, e poco avvezzi a maneggiare come si conviene l' Aritmetica decimale, perciò mi contenterò di averlo qui accennato.

Proposizione XX.

Misurare assolutamente *la quantità d' acqua del quadretto Mantovano*.

Dal prodotto 69635,551991 il quale nella tavola parabolica quarta corrisponde all' altezza di punti 132, levato il prodotto 3802,774068 corrispondente all' altezza 19, il restante 65832,777893 si moltiplichi per la larghezza del quadretto 113, il prodotto punti cubi milanesi 7439103,901909 = once cube 4305,036980 sarà la quantità d' acqua tramandata dal quadretto mantovano nel tempo di un minuto secondo.

Proposizione XXI.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Pavese*.

Dal prodotto 30422,192786, il quale nella tavola quarta corrisponde a punti 76, levato il prodotto 5739,580332, corrispondente all' altezza

25, il restante 24682,612454 si moltiplichi per la larghezza 38, il prodotto 937939,273252 punti cubi milanesi indicherà la quantità cercata, e dividendo per 1728, ne risulteranno once cube milanesi 542,788931, le quali usciranno in un minuto secondo di tempo.

Proposizione XXII.

Misurare assolutamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Novarese*.

Dalla proporzione che passa tra il braccio milanese, ed il novarese si raccoglie, che tutta l' altezza dell' oncia è di punti milanesi 73, il battente di punti 24, e la larghezza di punti 37. Dal prodotto adunque, il quale nella tavola parabolica quarta de' punti corrisponde all' altezza 73, cioè da 28638,773579, levato il prodotto 5398,672570, corrispondente all' altezza 24, il restante 23240,101009 si moltiplichi per la larghezza 37, il prodotto punti cubi milanesi 859883,737333 dinoterà la quantità cercata; e dividendo per 1728, si avranno once cube milanesi 497,617903.

Proposizione XXIII.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Cremonese*.

Dal prodotto 50821,302600, il quale nella tavola parabolica quarta corrisponde all' altezza 107 si sottragga il prodotto 1452,011773 corrispondente all' altezza 10; ed il restante 49369,290867 si moltiplichi per 10; il prodotto punti cubi 493692,9086 sarà la quantità d' acqua, che sortirà in un minuto secondo di tempo; e dividendo per 1728, si avranno once cube 285,701914.

Proposizione XXIV.

Calcolare assolutamente *la quantità d' acqua dell'* oncia *Cremasca*.

Dal prodotto 48699,0102382, il quale nella tavola parabolica quarta corrisponde all' altezza di punti 104, che è l' altezza totale dell' *oncia*, sottratto il prodotto 1239,7493517 corrispondente all' altezza 9 del battente, il restante 47459,2608865 si moltiplichi per 9, il prodotto 427133,3479785 sarà la quantità di punti cubi milanesi, che sortirà in un minuto secondo di tempo, e dividendo per 1728, si avranno once cube milanesi 247,183650.

Porrò qui raccolte nella seguente tavola tutte le quantità d' acqua *assolute* delle sopraddette bocche, calcolate tutte in misura del braccio milanese.

TAVOLA V.

Quantità assolute d'acqua, che in un minuto secondo di tempo passano per le sopraddette bocche calcolate in parti del braccio milanese.

Dall' *oncia* Milanese once cube	471,951105
Dall' *oncia* Lodigiana	240,891663
Dal quadretto Mantovano	4306,036980
Dall' *oncia* Pavese	542,788931
Dall' *oncia* Novarese	497,617903
Dall' oncia Cremonese	285,701914
Dall' *oncia* Cremasca	247,183656

Queste quantità sono quelle, le quali dalle bocche sgorgano, come dicono i Periti, a gola aperta, computate cioè dall' area delle bocche medesime. Ma conciossiachè le vere quantità si debbono calcolare, siccome è detto di sopra, dall' area della vena ristretta, perciò ammettendo qui la ragione del Newton $(25)^2:(21)^2 = 1.417:1$ si avranno le quantità d'acqua come nella seguente

TAVOLA VI.

Quantità d'acqua che sortono in un minuto secondo di tempo calcolate a vena ristretta in parti del braccio milanese.

Dall' *oncia* Milanese once cube	333,063588
Dall' *oncia* Lodigiana	170,001173
Dal quadretto Mantovano	3038,184777
Dall' *oncia* Pavese	383,054997
Dall' *oncia* Novarese	351,177066
Dall' *oncia* Cremonese	201,624498
Dall' *oncia* Cremasca	174,441531

Che se si vorrà far uso della ragione di 8 : 5, si avranno le quantità d'acqua come nella seguente

TAVOLA VII.

Simili quantità d'acqua dedotte dalla ragione di 8 : 5	
Dall' *oncia* Milanese once cube	294,969440
Dall' *oncia* Lodigiana	150,557289
Dal quadretto Mantovano	2690,648112
Dall' *oncia* Pavese	339,243082
Dall' *oncia* Novarese	311,011189
Dall' *oncia* Cremonese	178,563696
Dall' *oncia* Cremasca	154,489781

PROPOSIZIONE XXV.

Ridurre le quantità d'acqua accennate in quest' ultima tavola a quantità corrispondenti al rispettivo braccio di ciaschedun paese.

SOLUZIONE.

Si divida ciascheduna delle dette quantità per la terza potenza del valore del rispettivo braccio, che trovasi nella tavola seconda, e si avrà l'intento.

DIMOSTRAZIONE.

Intorno all'altezza AB (*tav.* 5. *fig.* 13.) d'una sezione regolare, come asse s'intenda descritta la parabola AKB con un dato parametro diviso in parti eguali, il numero delle quali sia K. La quantità di queste parti contenute nell'asse AB sia n, e delle contenute nella larghezza L della sezione sia m. L' ordinata BK espressa in queste parti sarà $\sqrt{K \times n}$, ed il valore aritmetico del rettangolo circoscritto alla parabola sarà $\sqrt{(K \times n)} \times n = \sqrt{(K \times n^3)}$, e finalmente il parallelepipedo avente per base il medesimo rettangolo, e per altezza la larghezza della sezione espresso in parti cube, il lato delle quali sia eguale ad una parte del parametro, sarà $\sqrt{(K \times n^3)} \times m = \sqrt{(K \times n^3 \times m^2)}$.

Diviso il parametro in altre parti eguali tra loro, e ciaschedana delle quali ad una delle prime abbia la ragione di $1:p$, è chiaro che il numero di queste parti contenuto nello stesso parametro sarà $\frac{K}{p}$; nell'asse AB sarà $\frac{n}{p}$, e nella larghezza della sezione sarà $\frac{m}{p}$. Quindi il valore del parallelepipedo in cubi di queste parti sarà $\sqrt{\left(\frac{K}{p}\times\frac{n^2}{p^2}\right)}\times\frac{m}{p}=\sqrt{\left(\frac{K\times n^2\times m^2}{p^6}\right)}$. Starà adunque la quantità delle prime parti, alla quantità delle seconde contenute nel detto parallelepipedo come $\sqrt{(K\times n^2\times m^2)}:\sqrt{\left(\frac{K\times n^2\times m^2}{p^6}\right)}=\sqrt{p^6}:\sqrt{1}=p^3:1$.

Ora se il braccio milanese sarà espresso coll'unità, ed il braccio d'un altro paese sia diviso nel medesimo numero di once 12, la proporzione de' bracci sarà la medesima che quella delle once. Dunque dividendo una data quantità d'once cube dell'ultima tavola per p^3, esse si ridurranno a once cube del braccio proprio del paese.

Porrò qui le terze potenze, delle quali mi sono servito per questa riduzione.

TAVOLA VIII.

Terza potenza	del braccio Lodigiano	0,44830
	del braccio Mantovano	0,48322
	del braccio Pavese	1,17566
	del braccio Novarese	1,05794
	del braccio Cremonese	0,53688
	del braccio Cremasco	0,49237

Dividendo adunque, come si è detto, le quantità d'acqua, che sortono in un minuto secondo di tempo, calcolate a vena contratta, ed in parti del rispettivo braccio di ciaschedun paese, saranno le seguenti.

TAVOLA IX.

Dall' *oncia* Milanese once cube	294,969140
Dalla Lodigiana	335,840484
Dal quadretto Mantovano	5568,163801
Dalla Pavese	288,555434
Dalla Novarese	293,978098
Dalla Cremonese	332,595172
Dalla Cremasca	313,767656

Annotazione. Chi confronterà questa nostra tavola colla seguente pubblicata ultimamente a Milano, vedrà la grande e notabile differenza che passa tra l' una e l' altra, e nel medesimo tempo si accorgerà quali diversità di quantità assolute d' acqua debbano risultare, ove si tratti di calcolare queste acque per il tempo di uno o più giorni, di uno o più mesi, o finalmente di un anno. E quindi potrà decidere se una tavola parabolica a sole tre decimali cifre possa generalmente bastare per qualunque computo idrometrico risguardante anche le sole bocche d' irrigazione.

TAVOLA MILANESE.

Quantità assolute dell' oncia, e quadretto d' acqua somministrate in un minuto secondo, calcolate sul braccio di ciascuna provincia in particolare.

PROVINCIE.	a vena contratta
Milanese	294, 965
Pavese	287, 117
Cremasca	331, 689
Novarese	292, 064
Lodigiana	333, 152
Cremonese	327, 255
Mantovana	5623, 028

Ma per convincerci col fatto di quanto io qui asserisco, si cerchi per esempio, quant' acqua tramandi il quadretto mantovano nello spazio di un anno. Secondo questa tavola, moltiplicando 5623,028 per il numero de' secondi che compongono l' anno, si troveranno once cube 177327811008 = braccia cube 102620261.

Moltiplicando la quantità d' acqua tramandata in un minuto secondo di tempo da noi determinata per once cube mantovane 5568,163801 per il numero de' secondi, li quali formano l' anno, si avranno once cube mantovane 175597613628 = braccia cube 101618989. Questa quantità è minore della precedente di braccia cube 1001272, ed ha a quella la ragione di 1 : 101, quindi essa è assai considerabile non solamente riguardata in se stessa, ma ancora paragonata con tutta la mole dell' acqua, che in un anno tramanda il quadretto mantovano.

Supponendo che i prezzi debbano, o si possano supporre proporzionali in quel modo che si è già detto altrove alle quantità d' acqua che si vendono, essendo l' acqua del quadretto mantovano nove volte maggiori della quantità d' acqua dell' *oncia* milanese, perciocchè l' acqua di quest' oncia si vende per il prezzo di circa lire 24000, l' acqua del quadretto mantovano dovrebbe valere circa lire 216000, e quindi il valore della quantità d' acqua aumentata per il corso di un anno, calcolando con una tavola parabolica a sole tre decimali cifre dovrebbe valere lire 2128.

Quindi se cotanto sensibili sbagli seguono nel computo delle piccole quantità assolute d' acqua, le quali sortono dalle bocche d' irrigazione, quali errori dovranno risultare ove si tratti di misurare le quantità assolute, le quali passano per le sezioni de' canali di qualche considerabile portata. Io ho asserito in uno de' miei manifesti, che calcolando in questi casi con una tavola parabolica a sole tre decimali cifre, alcune volte non si computa nemmeno la metà della quantità dell' acqua assoluta, che passa per le medesime sezioni. Ora questo sembrami, il luogo di ciò dimostrare; il che io farò in una maniera generale, senza discendere a' casi particolari.

Sia R la radice di una tavola parabolica, il di cui parametro sia = 1, e per giugnere alla fine di un calcolo appartenente alla misura di una quantità assoluta d' acqua faccia duopo moltiplicarlo per i tre numeri interi A, L, T, Q (altezza, larghezza della sezione, tempo, e quantità d' acqua nota per esperienza), è dimostrato nella mia *Aritmetica riformata*, o sia decimale, che se i numeri delle cifre, che compongono la parte intera di R ed i numeri interi A, L, T, Q saranno rispettivamente n, p, s, q, t, è dimostrato, dico 1.° che acciocchè la parte intera dell' ultimo prodotto $R \times A \times L \times T \times Q$ sia esente da errore proveniente dal difetto della radice R,

conviene che questa abbia cifre decimali almeno $p+s+t+q-3$; 2.° che la parte intera di questo medesimo prodotto non può avere più cifre di $n+p+s+q+t$, nè meno di cifre $n+p+s+q+t-4$.

Quindi segue che assegnando a R una cifra decimale meno delle prescritte, cioè assegnando sole cifre decimali $p+s+q+t-4$ sarà alterata la cifra delle unità della detta parte intera; assegnandone due meno, cioè $p+s+q+t-5$ sarà intaccata dall' errore della radice R la cifra delle decine della stessa parte intera; assegnandone tre meno, sarà alterata la cifra de' centinai, e così di seguito. Per le quali cose sarà agevole il conoscere sino dove si potrà estendere il difetto di R nella parte intera dell' ultimo prodotto $R \times A \times L \times T \times Q$, assegnando ad R tre sole decimali cifre; imperciocchè se questo prodotto si chiamerà P, questo dovrà avere tre cifre decimali, onde P non potrà avere più cifre di $n+p+s+q+t+3$, e potrà averne $n+p+s+q+t+3-3=n+p+s+q+t$. Ora è dimostrato nella medesima *aritmetica* riformata che l' errore del fattore R può estendersi nel prodotto P per cifre $p+s+q+t$. Dunque potrà accadere, che non siano esenti da errore che cifre num. n del medesimo prodotto, computate dalla prima cifra verso sinistra. Ciò posto la quantità d' acqua trascurata, calcolando colla radice R a tre sole decimali cifre potrà avere a tutta la quantità d' acqua qualunque finita proporzione; e ne potrà essere un quinto, un quarto, un terzo, ed anche la metà.

Di fatti supponghiamo che sia $p=4$, $s=8$, $t=7$, $q=3$; l' errore proveniente dal fattore, o sia radice R potrà estendersi nel prodotto P per cifre $4+8+7+3=22$, conseguentemente nella parte intera del medesimo prodotto per cifre 19, onde il medesimo errore in questa parte si diffonderà sino alle decine di trilioni di quelle parti cube d' acqua, sopra le quali si calcola.

Qui primamente potrà qualunque avveduto calcolatore giudicare quanto grande possa essere alcuna volta questa quantità d' acqua *trascurata*, e nel medesimo tempo potrà vedere quanto possa essere il di lei valore, ogni qual volta i prezzi si possano supporre proporzionali alle quantità d' acqua che si vendono, e se egli è vero che i valori delle quantità trascurate possano qualche volta ascendere a molte migliaia di lire. Egli è poi chiaro, che nelle fatte supposizioni, quanto il numero n sarà più piccolo, tanto maggiore diverrà la proporzione della quantità d' acqua trascurata a tutta la mole d' acqua che si misura.

Quindi lascierò, che ognuno giudichi se io ho avuta ragione di asserire nell' ultimo mio manifesto, che se negli antichi tempi si errava grossolanamente da' Periti nella misura delle acque per la

trascuranza, che allora si faceva della velocità, con la quale le medesime acque sgorgano dalle luci, come giudiciosamente avvertì il primo il celebre matematico padre abate Castelli, di presente si erra bensì meno da' Periti tenendosi da essi conto di una gran parte della detta velocità, ma pure si erra tuttavia notabilmente per l'uso che si fa di tavole paraboliche troppo imperfette, e scarseggianti d'un sufficiente numero di cifre decimali esatte (le radici delle quali dinotano appunto le velocità delle acque).

CAPO QUARTO.

Dell'uso delle nostre tavole paraboliche per calcolare tanto relativamente, *quanto* assolutamente *la quantità d'acqua che scorre da qualunque sezione o luce, nel caso che queste siano rigurgitate.*

Avviene molte volte, che l'acqua, la quale esce da una data sezione o luce, inferiormente a questa, per gli impedimenti che incontra nel suo cammino, venga ritardata nel suo moto, e quindi perdendo o in tutto, o in parte la sua velocità, divenga totalmente o solo in parte stagnante, e perciò rigurgitando contro la sezione, o luce, d'onde è uscita, impedisca che parte dell'acqua che usciva, sorta tuttavia. Per calcolare adunque giustamente la quantità d'acqua, che viene tramandata da una data sezione o bocca, conviene avere riguardo al rigurgito se v'è.

PROPOSIZIONE XXVI.

Esaminare se una sezione sia rigurgitata, e quanto sia il rigurgito.

SOLUZIONE.

Ciò si può ottenere per mezzo del *pendolo*. Supponiamo primamente, che la superficie dell'acqua nella sezione sia senza sensibile moto. Già si è detto che le velocità dell'acqua in diverse profondità sotto la di lei superficie, stanno tra loro come le radici quadrate delle tangenti degli angoli di deviazione. Ora le medesime velocità sono proporzionali alle radici quadrate delle altezze dell'acqua sovrastante (Preliminare). Dunque queste altezze staranno tra loro come le tangenti degli angoli di deviazione.

Ciò posto: supponghiamo per esempio, che un mezzo piede sotto la superficie dell'acqua, ove si sappia che non vi sia rigurgito, (come si dirà in appresso) siasi trovato l'angolo di deviazione di 80°,

e sommerso il pendolo alla profondità di un piede sotto la medesima superficie, l' angolo di deviazione sia di 49°, 6′. La tangente dell' angolo 30° cercata colle tavole è 0,57735; e la tangente dell' angolo 49°, 6′ è 1,15470. Ora sta ½ : 1, o sia 1 : 2, come 0,57735 : 1,15470. Dunque all' altezza di un piede sotto la superficie dell' acqua, l' acqua medesima ha la velocità che le compete; e però non è rigurgitata.

Supponghiamo ora, che stante l' angolo di deviazione di 30° un ½ piede sotto la superficie; alla profondità d' un piede, siasi trovato l' angolo di 36° la di cui tangente è 0,72654. Essendo la ragione delle tangenti 0,57735 : 0,72654 notabilmente maggiore della ragione delle profondità 1 : 2; converrà conchindere, che sotto l' altezza d' un piede l' acqua ha una velocità sensibilmente minore di quella, che le compete prodotta dalla pressione dell' acqua sovrastante; e che per conseguenza l' acqua ivi è rigurgitata.

Col medesimo mezzo si potrà determinare a quale altezza computata dal fondo si estenda il rigurgito; conciossiachè se supporremo che alla profondità d' un piede sotto la superficie dell' acqua, la ragione delle tangenti degli angoli di deviazione cominci a variare dalla ragione delle profondità sotto la superficie dell' acqua; sottraendo questa profondità dall' intera altezza della sezione; il restante dinoterà l' altezza computata dal fondo, alla quale si estende il rigurgito.

Annotazione. Se la superficie dell' acqua fosse dotata di sensibile velocità; sostituendo all' altezza della sezione la somma di quest' altezza, e dell' altezza equivalente; il rigurgito si determinerà nella stessa maniera, che si è detto in questa proposizione.

Proposizione XXVII.

Calcolare la quantità d' acqua, che sorte da una sezione rigurgitata.

Soluzione.

Supponiamo primamente, che l' acqua la quale trovasi nel canale inferiormente alla sezione, sia resa perfettamente stagnante e morta. Rappresenti il rettangolo ABCD (*tav.* 5. *fig.* 14.) la sezione, la di cui altezza AB sia di braccia 2, once 3, o siano once 27; e la larghezza once 28, e l' acqua che viene tramandata per essa sia senza moto in superficie. La parte rigurgitata della sezione sia BCEF dell' altezza d' once 4. È chiaro, che le parti dell' acqua stagnante, come qui si suppone, appoggiandosi contro la sezione, e premendola con una pressione atta a produrre le velocità proporzionali alle radici delle altezze dell' acqua stagnante che sovrasta; è chiaro dico, che per la

parte rigurgitata della sezione, l'acqua non può sortire se non coll'eccesso delle velocità, che essa ha sopra la velocità dell'acqua rigurgitata.

Ciò posto; dal prodotto 93,530743, il quale nella tavola prima corrispondente all'altezza 27 si sottragga il prodotto 5,333333; il quale nella medesima tavola corrisponde all'altezza 4; ed il restante 88,197410 si moltiplichi per la larghezza 28 della sezione; il prodotto once cube 2469,527480 esprimerà la quantità d'acqua, che la sezione rigurgitata viene tramandata.

Annotazione I. Nello stesso modo si calcolerà la quantità d'acqua, che sorte da una sezione rigurgitata nel caso, che la superficie dell'acqua sia dotata di qualche sensibile velocità. Conciossiachè se dalla quantità d'acqua la quale verrebbe tramandata dalla sezione libera, si sottrarrà quella, che dal rigurgito viene impedita dal sortire; si avrà la quantità restante, che attualmente sorte dalla sezione.

II. Alquanto più difficile è il calcolare la quantità d'acqua di una sezione rigurgitata nel caso, che l'acqua, la quale scorre inferiormente alla medesima non abbia perduto tutto il suo movimento; ma seguiti tuttavia a scorrere con un residuo di velocità rimastale dopo di avere superati gli ostacoli incontrati nel suo cammino. Riguardo a questo caso si pone la seguente proposizione.

Proposizione XXVIII.

Calcolare la quantità d'acqua, la quale sorte da una Sezione rigurgitata nel sopraddetto modo.

Soluzione.

Sia la sezione ABCD (*tav.* 5. *fig.* 15.) rigurgitata sino in EF. L'altezza di essa sia di once 27. Si trovi col pendolo l'angolo di deviazione ad una profondità AK sotto la superficie dell'acqua, alla quale non perviene il rigurgito. Supposto AK d'once 3, sia l'angolo di deviazione di 35°; la di cui tangente cercata nelle tavole delle tangenti è 0,7002075. Si esamini col pendolo medesimo l'angolo di deviazione alla profondità AF per esempio di once 6, ove siasi trovato incominciare il rigurgito; e supponiamo che siasi trovato il detto angolo di 48°, la di cui tangente è 1,1106125. Le tangenti degli angoli di deviazione, ove l'acqua non fosse rigurgitata, dovendo stare tra loro come le altezze dell'acqua sovrastante; siccome più di una volta si è detto, la tangente dell'angolo di deviazione alla profondità AF, dovrebbe essere 1,4004150, alla quale corrisponde prossimamente l'angolo di 54°. Ora le velocità dell'acqua che

sorte dalla sezione a diverse profondità sotto la superficie, tolto il rigurgito, devono stare tra loro come le radici quadrate delle tangenti degl' angoli di deviazione. Dunque la perdita di velocità dell' acqua rigurgitata alla profondità AF sarà proporzionale a $\sqrt{1,4004150} - \sqrt{1,1106125} = 1,18339 - 1,05385 = 0,12954$. Collo stesso metodo si trovino le perdite di velocità nel punto G alla profondità AG; ed in H e I alle profondità AH, AI.

Perciocchè la sezione supponesi regolare; si può altresì supporre che in ogni altra perpendicolare della sezione, come LM in eguali profondità a quelle di AB si facciano dall' acqua eguali perdite di velocità. Quindi fatta la somma delle perdite in F, G, H, I, e divisala per 4; il quoziente potrà esprimere la perdita media di tutta la sezione; o piuttosto un numero a cui la detta perdita sia prossimamente proporzionale. Questo numero si chiami g.

Ora supposta intorno all' altezza AB della sezione descritta la parabola APB col parametro di un' oncia, per il §. XIV. del preliminare, si determini la velocità media del trapezio parabolico ECPN; la quale si chiami v. Sottratta da questa la quantità g; il restante $v-g$ si moltiplichi per l'altezza BF del trapezio; ed in seguito il prodotto si moltiplichi di nuovo per la larghezza BC; il nuovo prodotto esprimerà la quantità d'acqua, che sorte dalla parte rigurgitata della sezione. Finalmente a questa si aggiunga la quantità d'acqua che esce dalla parte AFED libera; e si avrà in estratto la quantità totale dell' acqua, che esce dalla intera sezione.

E per applicare questa dottrina alla pratica, supposta l'altezza AB di once 27, e AF di once 6, sarà BF once 21. Sia in oltre la larghezza della sezione once 60. Si faccia adunque come 21 : 6, così $\frac{2}{3}$ della differenza delle radici, le quali nella tavola parabolica prima corrispondono alle altezze 27 e 6 (li quali due terzi sono 1,8311084) al quarto proporzionale 0,5231738 (*). Questo si aggiunga alla radice dell' altezza 6, cioè a 2,4494898, la somma 2,9726636 determinerà la velocità v della detta altezza libera. Quindi la velocità della parte rigurgitata sarà $v-g$, e la quantità d' acqua astratta, la quale sorte dalla parte medesima sarà $(v-g) \times 21 \times 60$, e se la quantità d' acqua, che sorte dalla sezione sotto l' altezza libera calcolata colla prima tavola parabolica si chiami Q, tutta l' acqua sarà $Q + (v-g) \times 21 \times 60$.

Per calcolare *assolutamente* la quantità d' acqua, che sorte dalla detta sezione rigurgitata, è necessario far uso di una delle tre ultime tavole paraboliche, secondo la qualità delle dimensioni, ed in

(*) §. XIV. del preliminare.

oltre ridurre la velocità g a quantità assoluta. Ora ciò non sarà molto difficile ad ottenersi, se si rifletta che le velocità dell'acqua, che scorre per una sezione sono in ragione suddnplicata tanto delle altezze dell'acqua sovrastante, e premente, quanto delle tangenti degli angoli di deviazione, ed in oltre che le radici delle tre ultime tavole esprimono le velocità assolute dell'acqua, o sia lo spazio, che l'acqua, tolto ogni impedimento percorrerebbe in un minuto secondo di tempo.

Ritenute adunque le cose dette di sopra, perciocchè alla profondità AF la tangente dell'angolo di deviazione dovrebbe essere 1,4004150, ed essendosi trovato l'angolo di deviazione di soli 48°, al quale nelle tavole delle tangenti corrisponde la tangente 1,1106125; e finalmente all'altezza 6 nella tavola parabolica terza corrisponde la radice 48,7019540; se faremo $\sqrt{1,4004150} : \sqrt{1,1106125} = 1,83390 : 1,054856$, così 48,7019540 al quarto 48,871035, questo dinoterà la velocità assoluta rimasta all'acqua alla profondità di once 6 sotto la superficie; o sia lo spazio, che l'acqua a questa profondità, posto il rigurgito, percorre in un secondo di tempo. Da questo spazio si trovi l'altezza equivalente, la quale sarà $\frac{(48,371036)^2}{395,313 \text{ ec.}} = \frac{1881,04667697\ldots}{395,31338} =$ once 4,7583682 = punti 57. Quest'altezza si supponga aggiunta all'altezza di once 21, o sia di punti 252, e si avrà l'altezza totale punti 309. Date queste dimensioni col mezzo della tavola parabolica quarta si calcoli la quantità assoluta d'acqua, che sorte dalla parte rigurgitata della sezione, la di cui altezza è BF di punti 252, ed essa si troverà essere punti cubi 47320351,03201 = once cube 27384,46240.

Se si volesse determinare la quantità d'acqua impedita dal rigurgito, basterebbe calcolare quant'acqua in un minuto secondo di tempo esca dalla detta parte, tolto il rigurgito. Questa si troverebbe essere punti cubi 192805819,06752 = once cube 111577,44166. Quindi levando da questa quantità le once cube 27384,46240 trovate di sopra, si avrebbe per l'acqua rigurgitata in un minuto secondo di tempo, once cube 84192,97926.

Annotazione I. Il calcolo sarà più esatto, se in vece di supporre che alla profondità K l'angolo di deviazione sia lo stesso in tutte le perpendicolari LM ec., si esamini col pendolo quest'angolo nel mezzo, o sia filone del canale, e da ambe le parti di esso; e quindi si prenda l'angolo medio; e lo stesso si faccia nelle profondità G, H, I, e prendendo in ciascheduna di queste l'angolo medio; di tutti gli angoli *medj* si prenda di nuovo il medio, il quale si consideri come l'angolo medio di tutta la parte rigurgitata, e che rigurgita.

Annotazione II. Data una sezione regolare ABCD (*tav.* 5. *fig.* 16.),

per la quale l'acqua scorra con tutta quella velocità, che le compete prodotta dall'acqua sovrastante, e premente; sopravvenendo un rigurgito, è manifesto, che l'acqua nella sezione medesima sarà obbligata ad alzarsi sino a tanto che, l'acqua nella sezione medesima sarà obbligata ad alzarsi sino tanto che, e per l'accrescimento dell'altezza della sezione, e per l'aumento della velocità, che quindi dee nascere, per la sezione rigurgitata passi quella medesima quantità d'acqua, che prima scorreva per la sezione libera. Gioverà qui cercare e determinare quale debba essere, e sia in fatti questo accrescimento.

Proposizione XXIX.

Determinare il sopraddetto alzamento.

Soluzione.

Sia la sezione ABCD (*tav.* 5. *fig.* 16.), la quale, sopravvenendo il rigurgito FBCE, si alzi sino in GH, sicchè l'aumento della di lei altezza sia AG. Si calcoli la quantità d'acqua rigurgitata; questa si aggiunga alla quantità d'acqua che esce dalla sezione libera avente l'altezza AB; quindi si faccia come il quadrato di questa quantità al quadrato della medesima accresciuta della quantità rigurgitata; così il cubo dell'altezza AB della sezione libera ad un quarto proporzionale, questo sarà il cubo dell'altezza BG. Per la qual cosa estraendo da esso la radice cuba, e da questa levando l'altezza AB, il restante AG sarà l'accrescimento cercato.

Sia per esempio l'altezza AB braccia 3, once 7, o siano once 43, la larghezza BC braccia 4 once 10, cioè once 58, e sopravvenga il rigurgito perfetto d'un'acqua stagnante sino all'altezza BF d'once 16. Perciocchè dall'una parte nella sezione data, e nella sezione accresciuta rimanendo la medesima larghezza, le quantità d'acqua, che in un medesimo tempo sortono da ambedue, debbono stare tra loro come i prodotti corrispondenti alle altezze presi nella tavola parabolica prima; e dall'altra i quadrati delle medesime quantità debbono essere proporzionali a' cubi delle altezze; se faremo come il quadrato del prodotto 187,979904, che nella detta tavola corrisponde all'altezza 43 al quadrato del medesimo prodotto accresciuto del prodotto 42,666666, che nella medesima tavola corrisponde all'altezza 16; cioè al quadrato di 230,646570, così il cubo di 43 al quarto proporzionale, questo sarà il valor di BG^3, la di cui radice cuba esprimerà la semplice BG, e sottraendo BA $=$ once 43, il restante indicherà il valore di AG.

Se la sezione sarà rigurgitata nel senso della Prop. XXVIII., in tal

caso facendo $(AB \times v - BF \times g)^2 : (AB \times v)^2$, così AB^2 ad un quarto proporzionale, questo sarà BG^2, e si determinerà AG come sopra.

Annotazione. Siccome data l' altezza AB, che aveva la sezione ABCD prima del rigurgito, e l' altezza BF di questo, si è determinato l' alzamento AG, così per lo contrario date le altezze BG della sezione rigurgitata, e BF del rigurgito si può determinare l' altezza AB, che prima del rigurgito aveva la sezione, ed alla quale si abbasserebbe di nuovo l' acqua, se si levasse il rigurgito; ed in oltre data l' altezza BG della sezione rigurgitata, e l' altezza AB della sezione libera, si potrà determinare l' altezza BF del rigurgito. Ma non dovendo queste cose servire a quanto siamo per dire, le lasceremo stare da parte.

Proposizione XXX.

Calcolare le quantità d' acqua tanto relative, *quanto assolute, che sgorgano dalle bocche d' irrigazione rigurgitate.*

Soluzione.

Supponiamo per esempio che l' *oncia* d' acqua milanese sia rigurgitata all' altezza di once 2, e che il rigurgito sia totale, cioè che l' acqua, la quale rigurgita sia totalmente stagnante e morta. Si cerchi nella tavola prima parabolica il prodotto corrispondente all' altezza 2 del rigurgito, il quale è 1,885618. Questo si moltiplichi per la larghezza 3 della bocca; ed il prodotto 5,656854 si sottragga dalla quantità astratta 23,737023, che tramanda l' *oncia* libera, il restante once cube 18,080169 esprimerà in *astratto* la quantità d' acqua, che sorte dall' *oncia* milanese rigurgitata.

Per calcolare *assolutamente* la quantità d' acqua dell' *oncia* milanese rigurgitata nel sopraddetto modo, basterà a prodotti della prima tavola parabolica sostituire i prodotti della terza o quarta tavola secondo il bisogno.

Non altrimenti si calcolerà la quantità d' acqua di qualunque altra bocca rigurgitata.

Annotazione. Ho supposto, che l' acqua, la quale rigurgita contro la bocca, sia perfettamente stagnante, cosicchè le di lei pressioni contro la bocca medesima possano dirsi, ed essere in ragione suddùplicata delle altezze della medesima acqua, che rigurgita; ma se altrimenti fosse, come se una sola parte di quest' acque fosse perfettamente stagnante, oppure se anche tutta l' acqua seguitasse a scorrere con una velocità rimastale dopo di avere superati gli impedimenti incontrati nel canale di deviazione, è chiaro che il metodo usato

nella soluzione di questa proposizione non è adattato per misurare con sufficiente esattezza la quantità d' acqua, che dalla bocca rigurgitata veramente sorte. Il ripiego che in questi casi si può prendere, secondo ch' io giudico è di adattare alle bocche d' irrigazione rigurgitato il metodo, che abbiamo adoperato per le sezioni, nelle quali v' è rigurgito. Veggasi a questo proposito quanto eruditamente ha scritto l' Autore del primo supplemento alla nuova edizione dell' operetta idraulica del ch. p. De-Regi Barnabita numeri 88, 89 ec.

Proposizione XXXI.

Supposto che l' oncia d' acqua Milanese sia rigurgitata, fare che non ostante il rigurgito, essa tramandi la stessa quantità d' acqua che tramandava prima del rigurgito.

Soluzione.

Ciò si può ottenere in tre maniere, o aumentando l' altezza della sezione, o la di lei larghezza, o finalmente accrescendo il *battente*.

Quanto al primo modo, si misuri la quantità d' acqua che tramanda la luce dell' oncia libera dal rigurgito, e tolto il battente, la quale si chiami q. Si calcoli in oltre la quantità d' acqua che tramanda la medesima luce libera posto il battente. Questa si aumenti della quantità d' acqua rigurgitata, sicchè si abbia la somma Q. Quindi si faccia $q^2 : Q^2$, così il cubo dell' altezza 4 della luce al quarto proporzionale, questo indicherà il cubo dell' altezza cercata, la di cui radice cuba soddisferà al problema.

Supponiamo qui che l' altezza del rigurgito sia di once 2. Prendendo in luogo delle quantità d' acqua i prodotti della tavola parabolica prima, che in questo caso sono alle quantità medesime proporzionali. Il prodotto corrispondente all' altezza 4 è 5,333333. Inoltre il prodotto corrispondente all' altezza 6 è 9,797959; dal quale levando il prodotto corrispondente all' altezza d' once 2 del battente, ed aggiungendovi il prodotto corrispondente all' altezza d' once 2 del rigurgito, ritorna il prodottto 9,797959. Dunque se chiameremo x la nuova altezza da darsi all' *oncia*, sarà $x^3 = \frac{(9,797959)^2}{(5,33333)^2} \times 64 = 3,375 \times 64 = 216$, la di cui radice cuba è 6. Quest' altezza non dovrà avere battente alcuno, il che nel presente caso è manifesto. Conciossiachè aggiugnendo all' altezza della luce le 2 once, che ha il battente, alla quantità d' acqua della luce medesima si aggiugne precisamente quella quantità, che viene impedita dal rigurgito.

Riguardo al secondo modo conviene riflettere che la nuova larghezza da darsi all' oncia deve stare alla larghezza d' once 3, in ragione reciproca delle velocità medie (Prelim. Assioma). Ora le velocità medie, avendo la stessa proporzione delle massime, delle quali quelle sono i $\frac{2}{3}$; e nella supposizione che l' altezza dell' *oncia* non si muti: dovendo le massime velocità essere proporzionali alle parabole descritte intorno alla medesima altezza, e per conseguenza anche a trapezj parabolici corrispondenti all' altezza della luce; se faremo come la differenza che passa tra il trapezio parabolico 7,912341, il quale corrisponde all' altezza della luce milanese libera, e la parabola 1,883618, che corrisponde all' altezza d' once 2 del rigurgito; cioè se faremo 7,912341 — 1,883618 (= 6,026723) al medesimo trapezio 7,912341, così la larghezza d' once 3 al quarto proporzionale once 3,938 = once 3 punti 11, questo indicherà la larghezza da darsi all' *oncia* milanese.

Se supponessimo che l' altezza del rigurgito sia di once 3; sottratto dal trapezio parabolico 7,912341 il prodotto 3,464106, il quale nella tavola parabolica prima corrisponde all' altezza 3, si dovrà fare come la differenza 7,912341 — 3,464106, o sia come 4,448225 a 7,912382; così once 3 di larghezza al quarto 6,88 = once 6, punti 10,5, questo determinerà la larghezza da darsi all' *oncia* milanese.

Per ciò che risguarda il terzo modo, si pongono le seguenti proposizioni.

Proposizione XXXII.

Variato nell' oncia Milanese libera il battente, determinare la variazione della quantità d' acqua, che sorte dalla medesima oncia.

Soluzione.

Si chiami Q la quantità d' acqua, che tramanda l' *oncia* milanese libera, e x il di lei aumento, supposto che il battente si accresca (sarebbe $-x$ il decremento, se il medesimo battente si scemasse).

Sia BGHC (*tav.* 5. *fig.* 16.) l' *oncia* milanese, il di cui battente sia AGHD, e l' aumento di questo sia GL. Si faccia $BL = A$, $BG = a$, $AL = B$, $AG = b$, starà $Q + x : Q = \sqrt{A^3} - \sqrt{B^3} : \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}$, e *dividendo* $Q + x - Q : Q \; (= : x : Q) = \sqrt{A^3} - \sqrt{B^3} - \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} = \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}$. Dunque $x = Q \times \dfrac{\sqrt{A^3} - \sqrt{B^3} - \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}$.

Sia l' accrescimento GL d' un oncia, sicchè tutto il battente AL sia di once 3, sarà $A = 7$, $\sqrt{A^3} = \sqrt{343} = 18,520259$, $a = 6$; $\sqrt{a^3} = \sqrt{216} = 14,696938$; $AL = B = 3$, $B^3 = 27$; $\sqrt{B^3} = 5,196152$.

Finalmente $AG = b = 2$, $b^3 = 8$, $\sqrt{b^3} = \sqrt{8} = 2,828427$. Dunque

$$x = Q \times \frac{18,52 \text{ ec.} - 5,19 \text{ ec.} - 14,69 \text{ ec.} + 2,82 \text{ ec.}}{14,69 \text{ ec.} - 2,82 \text{ ec.}} = Q \times \frac{1.455596}{11.868511} =$$

$Q \times 0,122643$. Ora è $Q =$ once cube 23,737023. Dunque sarà la quantità cercata $x =$ once cube $23,737 \times 0,12264 = 2,911$.

Di fatto supposta GL once 1, e per conseguenza $AL =$ once 3, se dal prodotto che nella tavola parabolica prima corrisponde all' altezza $BL =$ once 7, il quale è 12,346839 si sottrarrà il prodotto 3,46410 corrispondente all' altezza $AL = 3$, ed il restante 8,882738 si moltiplichi per la larghezza 3, si avrà il prodotto 26,648214 il quale indicherà la quantità d' acqua che dalla luce ABCD sorte sotto il battente AL. Quindi se da questa quantità si leverà la quantità d' acqua 23,737023, il restante once cube 2,911191 sarà l' accrescimento dell' acqua, che sorte dalla medesima corrispondente all' accrescimento GL del battente, appunto come si è trovato di sopra.

Proposizione XXXIII.

Variata la quantità d' acqua, che sorte dall' oncia *Milanese, determinare la variazione del battente, cioè l' aumento in supposizione, che la quantità d' acqua debba crescere, o per lo contrario.*

Soluzione. (1)

Si chiami Q la variata quantità d' acqua che sorte dall' oncia milanese, L la larghezza della luce, a l' altezza della medesima, ed x l' altezza del variato battente; per le condizioni del problema si avrà la seguente equazione

$Q = \frac{2}{3} L [\sqrt{(a+x)^3} - \sqrt{x^3}]$, e però $\sqrt{(a+x)^3} - \sqrt{x^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{L}$; e quadrando si ha $(a+x)^3 + x^3 - 2\sqrt{(a+x)^3 x^3} = \frac{9}{4}\left(\frac{Q}{L}\right)^2$; sviluppando, riducendo e trasponendo si ha $-2\sqrt{(a+x)^3 x^3} = \frac{9}{4}\left(\frac{Q}{L}\right)^2 - a^3 - 3a^2x - 3ax^2 - 2x^3$: facciasi per semplificazione di calcolo $\frac{9}{4}\left(\frac{Q}{L}\right)^2 - a^3 = P$, sarà $-2\sqrt{(a+x)^3 x^3} = P - 3a^2x - 3ax^2 - 2x^3$,

(1) Alla soluzione dell' Autore si sostituisce la presente per essere quella totalmente erronea.

e quadrando nuovamente, si ha $4x^3(a+x)^3 = P^2 - 6a^2Px$

$$\left.\begin{array}{l}-6aPx^2 - 4Px^3 + 12a^2x^4 + 12ax^5 + 4x^6 \\ +9a^4x^2 + 18a^3x^3 + 9a^2x^4\end{array}\right\} = 4a^3x^3 + 12a^2x^4 + 12ax^5 + 4x^6;$$

trasponendo e riducendo si ha $P^2 - 6a^2Px - (6aP - 9a^4)x^2 - (46 - 14a^3)x^3 + 9a^2x^4 = 0$, o sia $x^4 - \left(\frac{46 - 14a^3}{9a^2}\right)x^3 - \left(\frac{26}{3a} - a^2\right)x - \frac{2}{3}Px + \frac{1}{9}\left(\frac{P}{a}\right)^2 = 0$; sostituendo ora per P il suo valore, si otterrà la seguente equazione

$$x^4 - \left[\left(\frac{Q}{aL}\right)^2 - 2a\right]x^3 - \left[\frac{3}{2}a\left(\frac{Q}{aL}\right)^2 - \frac{5a^2}{3}\right]x^2 - \left[\frac{3}{2}a^2\left(\frac{Q}{aL}\right)^2 - \frac{2a^3}{3}\right]x + \left[\frac{3}{4}a\left(\frac{Q}{aL}\right)^2 - \frac{a^2}{3}\right]^2 = 0,$$

nella quale fatto $Q = 26{,}648214$ (prop. 32.), $L = 3$, ed $a = 4$, si avrà $\left(\frac{P}{aL}\right) = 2{,}220685$, $\left(\frac{P}{aL}\right)^2 = 4{,}9314$; e quindi

$$x^4 + 3{,}0686 \times x^3 - 2{,}9218 \times x^2 - 75{,}6870 \times x + 89{,}5086 = 0;$$

dove il 3 soddisfacendo invece della x, ne è di essa un valore, o sia una radice della detta equazione; ma il battente dell'oncia milanese è di once 2; dunque nella nuova variata, il battente è aumentato di once una, come si è supposto nella precedente proposizione.

Annotazione I. Nella soluzione de' precedenti problemi si è supposto che l'oncia milanese sia rigurgitata in modo che l'acqua rigurgitante sia totalmente stagnante; altrimenti converrà far uso del metodo accennato nella annotazione alla proposizione XXX.; cioè in vece di prendere nella tavola parabolica il prodotto corrispondente all'altezza del rigurgito, si dovrà in di lui luogo prendere il prodotto, che nasce dalla moltiplicazione della velocità media per la medesima altezza.

Annotazione II. Molte altre cose rimarrebbero a dire intorno alla giusta misura delle acque le quali sortono dalle bocche d'irrigazione; ma di esse avendo abbastanza trattato altri, lascerò che presso de' medesimi le vegga il lettore.

TAVOLA PARABOLICA I.

PARAMETRO = 1.		
Altezze.	Radici.	Prodotti.
1	1, 0000000000000	0, 666667
2	1, 4142135623730	1, 885618
3	1, 7320508075688	3, 464102
4	2, 0000000000000	5, 333333
5	2, 2360679774997	7, 453560
6	2, 4494897427831	9, 797959
7	2, 6457513110645	12, 346839
8	2, 8284271247461	15, 084945
9	3, 0000000000000	18, 000000
10	3, 1622776601683	21, 081851
11	3, 3166247903553	24, 321915
12	3, 4641016151377	27, 712813
13	3, 6055512754639	31, 248111
14	3, 7416573867739	34, 922136
15	3, 8729833462074	38, 729833
16	4, 0000000000000	42, 666667
17	4, 1231056256176	46, 728530
18	4, 2426406871192	50, 911688
19	4, 3588989435409	55, 212720
20	4, 4721359549995	59, 628479
21	4, 5825756949558	64, 156060
22	4, 6904157598234	68, 792764
23	4, 7958315233127	73, 536083
24	4, 8989794455663	78, 383671
25	5, 0000000000000	83, 333333
26	5, 0990195135927	88, 383005
27	5, 1961524227066	93, 530744
28	5, 2915026221291	98, 774715
29	5, 3851648071345	104, 113186
30	5, 4772255750516	109, 544512
31	5, 5677643628300	115, 067130
32	5, 6568542494923	120, 679557
33	5, 7445626465380	126, 380378
34	5, 8309518948453	132, 168243
35	5, 9160797830996	138, 041862
36	6, 0000000000000	144, 000000
37	6, 0827625302982	150, 041476

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
38	6,1644140029689	156,165155
39	6,2449979983983	162,369948
40	6,3245553203367	168,654809
41	6,4031242374328	175,018729
42	6,4807406900754	181,460739
43	6,5574385243020	187,979904
44	6,6332495807117	194,575321
45	6,7082039324993	201,246128
46	6,7823299831252	207,991453
47	6,8556546004010	214,810511
48	6,9282032302754	221,702503
49	7,0000000000000	228,666667
50	7,0710678118654	235,702260
51	7,1414284285428	242,808566
52	7,2111025509279	249,984888
53	7,2801098892805	257,230549
54	7,3484692283495	264,544892
55	7,4161984870956	271,927278
56	7,4833147735478	279,377085
57	7,5498344352707	286,893708
58	7,6157731058639	294,475660
59	7,6811457478686	302,125066
60	7,7459666924148	309,838668
61	7,8102496759066	317,616820
62	7,8740078740118	325,458992
63	7,9372539331937	333,364665
64	8,0000000000000	341,333333
65	8,0622577482985	349,364502
66	8,1240384046359	357,457690
67	8,1853527718724	365,612424
68	8,2462112512353	373,828243
69	8,3066238627447	382,104698
70	8,3666002653407	390,441346
71	8,4261497731763	398,837756
72	8,4852813742385	407,293506
73	8,5440037453175	415,808182
74	8,6023252670426	424,381379
75	8,6602540378443	433,012702
76	8,7177978870813	441,701760

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
77	8, 7749643873921	450, 448172
78	8, 8317608663278	459, 251565
79	8, 8881944173155	468, 111573
80	8, 9442719099991	477, 027835
81	9, 0000000000000	486, 000000
82	9, 0553851381374	495, 027721
83	9, 1104335791442	504, 110658
84	9, 1651513899116	513, 248478
85	9, 2195444572928	522, 440853
86	9, 2736184954957	531, 687460
87	9, 3273790530888	540, 987985
88	9, 3808315196468	550, 342116
89	9, 4339811320566	559, 749547
90	9, 4868329805051	569, 209979
91	9, 5393920141694	578, 723116
92	9, 5916630466254	588, 288667
93	9, 6436507609929	597, 906347
94	9, 6953597148326	607, 575875
95	9, 7467943448089	617, 296975
96	9, 7979589711326	627, 069374
97	9, 8488578017961	636, 892804
98	9, 8994949366116	646, 767002
99	9, 9498743710671	656, 691708
100	10, 0000000000000	666, 666667
101	10, 0498756211208	676, 691625
102	10, 0995049383620	686, 766336
103	10, 1488915650922	696, 890554
104	10, 1980390271855	707, 064039
105	10, 2469507659595	717, 286554
106	10, 2956301409870	727, 557863
107	10, 3440804327886	737, 877738
108	10, 3923048454132	748, 245949
109	10, 4403065089105	758, 662273
110	10, 4880884817015	769, 126489
111	10, 5356537528527	779, 638378
112	10, 5830052442583	790, 197725
113	10, 6301458127346	800, 804318
114	10, 6770782520313	811, 457947
115	10, 7238052947636	822, 158406

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
116	10, 77032961426900	832, 905480
117	10, 8166538263919	843, 698998
118	10, 8627804912002	854, 538732
119	10, 9087121146357	865, 424494
120	10, 9544511501033	876, 356092
121	11, 0000000000000	887, 333333
122	11, 0453610171872	898, 356029
123	11, 0905365064094	909, 423993
124	11, 1355287256600	920, 537041
125	11, 1803398874989	931, 694991
126	11, 2249721603218	942, 897661
127	11, 2694276695846	954, 144876
128	11, 3137084989847	965, 436459
129	11, 3578166916005	976, 772235
130	11, 4017542509913	988, 152035
131	11, 4455231422595	999, 575688
132	11, 4891252930760	1011, 043026
133	11, 5325625946707	1022, 553883
134	11, 5758369027902	1034, 108097
135	11, 6189500386222	1045, 705503
136	11, 6619037896906	1057, 345944
137	11, 7046999107196	1069, 029258
138	11, 7473401244707	1080, 755291
139	11, 7898261225515	1092, 523887
140	11, 8321595661992	1104, 334893
141	11, 8743420870379	1116, 188156
142	11, 9163752878129	1128, 083527
143	11, 9582607431013	1140, 120794
144	12, 0000000000000	1152, 000000
145	12, 0415945787922	1164, 020809
146	12, 0830459735945	1176, 083141
147	12, 1243556529821	1188, 186854
148	12, 1655250605964	1200, 831806
149	12, 2065556157337	1212, 517858
150	12, 2474487139158	1224, 744871
151	12, 2882057244450	1237, 012694
152	12, 3288280059379	1249, 321238
153	12, 3693168768529	1261, 670321
154	12, 4096736459908	1274, 059827

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
155	12, 4498995979887	1286, 489625
156	12, 4899959967967	1298, 959584
157	12, 5299640861416	1311, 469574
158	12, 5698050899765	1324, 019469
159	12, 6095202129184	1336, 609143
160	12, 6491106406734	1349, 238468
161	12, 6885775404495	1361, 907323
162	12, 7279220613578	1374, 615583
163	12, 7671453348037	1387, 363126
164	12, 8062484748657	1400, 149833
165	12, 8452325786651	1412, 975584
166	12, 8840987267251	1425, 840259
167	12, 9228479833200	1438, 743742
168	12, 9614813801509	1451, 685915
169	13, 0000000000000	1464, 666667
170	13, 0384048104052	1477, 685879
171	13, 0766968306220	1490, 743439
172	13, 1148770486040	1503, 839235
173	13, 1529464379659	1516, 973156
174	13, 1909059582729	1530, 145091
175	13, 2287565553229	1543, 854931
176	13, 2664991614215	1556, 602568
177	13, 3041346956500	1569, 887894
178	13, 3416640641263	1583, 210802
179	13, 3790881602596	1596, 571187
180	13, 4164078649986	1609, 968944
181	13, 4536240470737	1623, 403968
182	13, 4907375632320	1636, 876158
183	13, 5277492584686	1650, 385410
184	13, 5646599662505	1663, 931956
185	13, 6014705087354	1677, 514696
186	13, 6381816969858	1691, 134530
187	13, 6747943311773	1704, 791027
188	13, 7113092008020	1718, 484086
189	13, 7477270848675	1732, 213613
190	13, 7840487520902	1745, 979508
191	13, 8202749610852	1759, 781678
192	13, 8564064605509	1773, 620027
193	13, 8924439894498	1787, 494460

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
194	13, 928388277184l	1801, 404864
195	13, 964240043768g	1815, 351206
196	14, 000000000000	1829, 333333
197	14, 0357688476246	1843, 351175
198	14, 0712472794702	1857, 404641
199	14, 1067359796658	1871, 493640
200	14, 1421356237309	1885, 618083
201	14, 1774468787578	1899, 777882
202	14, 2126704035518	1913, 972948
203	14, 2478068487750	1928, 203194
204	14, 2828568570856	1942, 468533
205	14, 3178210632763	1956, 768879
206	14, 3527000944073	1971, 104146
207	14, 3874945699381	1985, 474251
208	14, 4222051018559	1999, 879107
209	14, 4568322948009	2014, 318633
210	14, 4913767461894	2028, 792744
211	14, 5258390463339	2043, 301359
212	14, 5602197785610	2057, 844395
213	14, 5945195193264	2072, 421772
214	14, 6287388383277	2087, 033408
215	14, 6628782986151	2101, 679223
216	14, 6969384566990	2116, 359138
217	14, 7309198626562	2131, 073073
218	14, 7648230602334	2145, 820951
219	14, 7986485869487	2160, 602694
220	14, 8323969741913	2175, 418223
221	14, 8660687473185	2190, 267462
222	14, 8996644257513	2205, 150335
223	14, 9331845230680	2220, 066766
224	14, 9666295470957	2235, 016679
225	15, 000000000000	2250, 000000
226	15, 0332963783729	2265, 016654
227	15, 0665191733193	2280, 066568
228	15, 0996688705414	2295, 149668
229	15, 1327459504215	2310, 265882
230	15, 1657508881031	2325, 415136
231	15, 1986841535706	2340, 597360
232	15, 2315462117278	2355, 812481

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
233	15, 2643375224734	2371, 060428
234	15, 2970585407783	2386, 341132
235	15, 3297097167558	2401, 654522
236	15, 3622914957372	2417, 000529
237	15, 3948043183406	2432, 379082
238	15, 4272486205415	2447, 790114
239	15, 4596248337403	2463, 233557
240	15, 4919333848296	2478, 709342
241	15, 5241746962600	2494, 217401
242	15, 5563491861040	2509, 757669
243	15, 5884572681198	2525, 330077
244	15, 6204993518133	2540, 934561
245	15, 6524758424984	2556, 571054
246	15, 6843871413581	2572, 239491
247	15, 7162336455017	2587, 939807
248	15, 7480157480236	2603, 671937
249	15, 7797338380595	2619, 435817
250	15, 8113883008418	2635, 231383
251	15, 8429795127548	2651, 058573
252	15, 8745078663875	2666, 917319
253	15, 9059737205868	2682, 807568
254	15, 9373774505092	2698, 729248
255	15, 9687194226713	2714, 682302
256	16, 0000000000000	2730, 666667
257	16, 0312195418813	2746, 682281
258	16, 0623784042090	2762, 729086
259	16, 0934769394310	2778, 807018
260	16, 1245154965970	2794, 916019
261	16, 1554944214035	2811, 056029
262	16, 1864140562864	2827, 226988
263	16, 2172747402268	2843, 428838
264	16, 2480768092719	2859, 661518
265	16, 2788205960997	2875, 924972
266	16, 3095064300009	2892, 219140
267	16, 3401346383681	2908, 543966
268	16, 3707055437448	2924, 899390
269	16, 4012194668567	2941, 285358
270	16, 4316767251549	2957, 701811
271	16, 4620776331543	2974, 148692

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
272	16,4924225024706	2990,625947
273	16,5227116418583	3007,133519
274	16,5529453572468	3023,671352
275	16,5831239517769	3040,239391
276	16,6132477254894	3056,837581
277	16,6433169770932	3073,465868
278	16,6733320005330	3090,124197
279	16,7032930881900	3106,812514
280	16,7332005306815	3123,530766
281	16,7630546142402	3140,278898
282	16,7928556237466	3157,056857
283	16,8226038412607	3173,864591
284	16,8522995463527	3190,702047
285	16,8819430161341	3207,569173
286	16,9115345252874	3224,465916
287	16,9410743460974	3241,892225
288	16,9705627484771	3258,848048
289	17,0000000000000	3275,333333
290	17,0293863659264	3292,848030
291	17,0587221092319	3309,392089
292	17,0880074906350	3326,465458
293	17,1172427686236	3343,568087
294	17,1464281994822	3360,699927
295	17,1755640371766	3377,860927
296	17,2046505340852	3395,051039
297	17,2336879396140	3412,270212
298	17,2626765016320	3429,518398
299	17,2916164657905	3446,795549
300	17,3205080756887	3464,101615
301	17,3493515728974	3481,436549
302	17,3781471969827	3498,800302
303	17,4068951855292	3516,192827
304	17,4355957741626	3533,614077
305	17,4642491965729	3550,657387
306	17,4928556845359	3568,542560
307	17,5214154679352	3586,049699
308	17,5499287747842	3603,585375
309	17,5783958312469	3621,149441
310	17,6068168615900	3638,742151

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
311	17, 635192088	3656, 363159
312	17, 663521732	3674, 012520
313	17, 691806012	3691, 690188
314	17, 720045146	3709, 396117
315	17, 748239349	3727, 130263
316	17, 776388834	3744, 892581
317	17, 804493814	3762, 683026
318	17, 832554500	3780, 501554
319	17, 860571099	3798, 348120
320	17, 888543819	3816, 222681
321	17, 916472867	3834, 125194
322	17, 944358444	3852, 055613
323	17, 972200755	3870, 013896
324	18, 000000000	3888, 000000
325	18, 027756377	3906, 013882
326	18, 055470085	3924, 055498
327	18, 083141320	3942, 124808
328	18, 110770276	3960, 221767
329	18, 138357148	3978, 346334
330	18, 165902124	3996, 498467
331	18, 193405398	4014, 678124
332	18, 220867158	4032, 885264
333	18, 248287590	4051, 119845
334	18, 275666882	4069, 381826
335	18, 303005217	4087, 671165
336	18, 330302779	4105, 987822
337	18, 357559750	4124, 331757
338	18, 384776310	4142, 702929
339	18, 411952639	4161, 101298
340	18, 439088914	4179, 526821
341	18, 466185312	4197, 979461
342	18, 493242008	4216, 459178
343	18, 520259177	4234, 965931
344	18, 547236990	4253, 499683
345	18, 574175621	4272, 060393
346	18, 601075237	4290, 648021
347	18, 627936010	4309, 262530
348	18, 654758106	4327, 903881
349	18, 681541692	4346, 572034

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
350	18, 708286933	4365, 266951
351	18, 734993995	4383, 988595
352	18, 761663039	4402, 736926
353	18, 788294228	4421, 511908
354	18, 814887722	4440, 313503
355	18, 841443681	4459, 141671
356	18, 867962264	4477, 996377
357	18, 894443627	4496, 877583
358	18, 920887928	4515, 785252
359	18, 947295321	4534, 719347
360	18, 973665961	4553, 679831
361	19, 000000000	4572, 666667
362	19, 026297590	4591, 679819
363	19, 052558883	4610, 719250
364	19, 078784028	4629. 784924
365	19, 104973174	4648, 876806
366	19, 131126469	4667, 994858
367	19, 157244060	4687, 139047
368	19, 183326088	4706, 309335
369	19, 209372712	4725, 505687
370	19, 235384061	4744, 728069
371	19, 261360284	4763, 976444
372	19. 287301521	4783, 250777
373	19, 313207915	4802, 551035
374	19. 339079605	4821, 877182
375	19, 364916731	4841, 229183
376	19, 390719429	4860, 607003
377	19, 416487838	4880, 010610
378	19, 442222070	4899, 439962
379	19. 467922333	4918, 895043
380	19, 493588689	4938, 375801
381	19, 519221295	4957, 882209
382	19, 544820285	4977, 414288
383	19, 570385790	4996, 971839
384	19, 595917942	5016, 554993
385	19, 621416870	5036, 163663
386	19, 646882704	5055, 797816
387	19, 672315572	5075, 457418
388	19, 697715603	5095, 142436

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
389	19, 723082923	5114, 852838
390	19 748417658	5134, 588591
391	19, 773719933	5154, 349663
392	19, 798989873	5174, 136020
393	19, 824227601	5193, 947632
394	19. 849433241	5113, 784465
395	19, 874606914	5233, 646487
396	19. 899748742	5253, 533668
397	19, 924858845	5273, 445974
398	19. 949937343	5293, 383375
399	19, 974984355	5313, 345838
400	20, 000000000	5333, 333333
401	20, 024984394	5353, 345828
402	20, 049937655	5373, 383292
403	20, 074859899	5393. 445693
404	20, 099751242	5413. 533001
405	20, 124611797	5433, 645185
406	20, 149441679	5453, 782215
407	20, 174241001	5473, 944058
408	20, 199009876	5494. 130686
409	20, 223748416	5514, 342068
410	20, 248456731	5534. 578173
411	20, 273134932	5554, 838972
412	20, 297783130	5575, 124433
413	20, 322401432	5595, 434528
414	20, 346989949	5615, 769226
415	20, 371548787	5636. 128498
416	20, 396078054	5656, 512314
417	20, 420577856	5676, 920644
418	20, 445048300	5697, 353460
419	20, 469489490	5717, 810731
420	20, 493901531	5738, 292429
421	20, 518284528	5758, 798524
422	20, 542638584	5779, 328988
423	20, 566963801	5799, 883792
424	20, 591260281	5820, 462906
425	20, 615528128	5841, 066303
426	20, 639767440	5861, 693958
427	20, 663978319	5882, 345828

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
428	20, 688160865	5903, 021900
429	20, 712315177	5923, 722141
430	20, 736441353	5944, 446521
431	20, 760539492	5965, 195014
432	20, 784609690	5985, 967591
433	20, 808652046	6006, 764224
434	20, 832666655	6027, 584886
435	20, 856653614	6048, 429548
436	20, 880618017	6069, 298184
437	20, 904544960	6090, 190765
438	20, 928449536	6111, 107265
439	20, 952326839	6132, 047655
440	20, 976176963	6153, 011909
441	21, 000000000	6174, 000000
442	21, 023796041	6195, 011900
443	21, 047565179	6216, 047583
444	21, 071307505	6237, 107022
445	21, 095023109	6258, 190189
446	21, 118712081	6279, 297059
447	21, 142374511	6300, 427604
448	21, 166010488	6321, 581799
449	21, 189620100	6342, 759617
450	21, 213203435	6363, 961031
451	21, 236760581	6385, 186015
452	21, 260291625	6406, 434510
453	21, 283796653	6427, 706589
454	21, 307275752	6449, 002128
455	21, 330729007	6470, 321132
456	21, 354156504	6491, 663577
457	21, 377558326	6513, 029437
458	21, 400934559	6534, 418685
459	21, 424285285	6555, 831297
460	21, 447610589	6577, 267247
461	21, 470910553	6598, 726510
462	21, 494185260	6620, 109060
463	21, 517434791	6641, 714872
464	21, 540659228	6663, 243921
465	21, 563858652	6684, 796182
466	21, 587033144	6706, 371630

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
467	21, 610182784	6727, 970240
468	21, 633307652	6749, 591988
469	21, 656407827	6771, 236847
470	21, 679483388	6792, 904798
471	21, 702584414	6814, 595806
472	21, 725560982	6836, 309856
473	21, 748563170	6858, 046920
474	21, 771541057	6879, 806974
475	21, 794494717	6901, 589994
476	21, 817424229	6923, 395955
477	21, 840329667	6945, 224834
478	21, 863211109	6967, 076607
479	21, 886068628	6988, 951249
480	21, 908902300	7010, 848736
481	21, 931712199	7032, 769045
482	21, 954498605	7054, 712218
483	21, 977260975	7076, 678034
484	22, 000000000	7098, 666667
485	22, 022715545	7120, 678026
486	22, 045407685	7142, 712090
487	22, 068076490	7164, 768884
488	22, 090722034	7186, 848235
489	22, 113344387	7208, 950270
490	22, 135943621	7231, 074916
491	22, 158519806	7253, 222150
492	22, 181073012	7275, 391948
493	22, 203603311	7297, 584288
494	22, 226110770	7319, 799147
495	22, 248595461	7342, 036502
496	22, 271057451	7364, 296331
497	22, 293496809	7386, 578610
498	22, 315913604	7408, 883317
499	22, 338307903	7431, 210429
500	22, 360679774	7453, 559250
501	22, 383029285	7475, 931781
502	22, 405356502	7498, 325976
503	22, 427661492	7520, 742487
504	22, 449944320	7543, 181292
505	22, 472205054	7565, 642368

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
506	22, 494443758	7588, 125694
507	22, 516660498	7610, 631248
508	22, 538855339	7633, 159008
509	22, 561028345	7655, 708952
510	22, 583179581	7678, 281058
511	22, 605309110	7700, 875304
512	22, 627416997	7723, 491669
513	22, 649503305	7746, 130131
514	22, 671568097	7768, 790668
515	22. 693611435	7791, 473260
516	22, 715633383	7814, 177884
517	22, 737634001	7836, 904519
518	22, 759613353	7859, 653145
519	22, 781571499	7882, 423739
520	22, 803508501	7905, 216281
521	22, 825424421	7928, 230749
522	22, 847319317	7950, 867122
523	22, 869193252	7973, 725381
524	22, 891046284	7996, 605502
525	22, 912878474	8019, 507466
526	22, 934689882	8042, 431252
527	22, 956480566	8065, 376839
528	22, 978250586	8088, 344206
529	23, 000000000	8111, 333333
530	23, 021728866	8134, 344199
531	23, 043437243	8157, 376784
532	23, 065125189	8180, 431067
533	23, 086792761	8203, 507028
534	23, 108440016	8226, 604646
535	23, 130067012	8249, 723901
536	23, 151673805	8272, 864773
537	23, 173260452	8296, 027242
538	23, 194827009	8319, 211287
539	23, 216373532	8342, 416889
540	23, 237900077	8365, 644028
541	23, 259406699	8388, 892683
542	23, 280893453	8412, 162834
543	23, 302360395	8435, 454463
544	23, 323807579	8458, 767549

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
545	23, 345235059	8482, 102072
546	23, 366642891	8505, 458012
547	23, 388031127	8528. 835351
548	23, 409399821	8552, 234068
549	23, 430749027	8575, 654144
550	23, 452078799	8599, 095560
551	23, 473389188	8622, 558295
552	23, 494680248	8646, 042331
553	23, 515952013	8669, 547642
554	23, 537204591	8693, 074229
555	23, 558437978	8716, 642052
556	23, 579652245	8740, 191099
557	23, 600847442	8763, 781350
558	23, 622023622	8787, 392787
559	23, 643180835	8811, 025391
560	23, 664319132	8834, 679143
561	23, 685438564	8858, 354023
562	23, 706539182	8382, 150014
563	23, 727621035	8905, 767095
564	23, 748684174	8929, 505249
565	23, 769728648	8953, 264457
566	23, 790754506	8977, 044701
567	23, 811761799	9000, 845960
568	23, 832750575	9024, 668218
569	23, 853720883	9048, 511455
570	23, 874672772	9072, 375654
571	23, 895606290	9096, 260795
572	23, 916521486	9120, 166860
573	23, 937418407	9144. 093831
574	23, 958297101	9168, 041691
575	23, 979157616	9192, 010420
576	24, 000000000	9216, 000000
577	24, 020824298	9240, 010414
578	24, 041630560	9264, 041643
579	24, 062418831	9288, 193669
580	24, 083189157	9312, 166474
581	24, 103941586	9336, 260041
582	24, 124676163	9360, 374351
583	24, 145392935	9384, 509387

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
584	24,166091947	9408,665131
585	24,186773244	9432,841565
586	24,207436873	9457,038672
587	24,228082879	9481,256433
588	24,248711305	9505,494832
589	24,269322199	9529,753850
590	24,289915602	9554,033470
591	24,310491562	9578,333675
592	24,331050121	9602,654448
593	24,351591323	9626,995770
594	24,372115213	9651,357625
595	24,392621835	9675,739994
596	24,413111231	9700,142863
597	24,433583445	9724,566211
598	24,454038521	9749,010024
599	24,474476501	9773,474283
600	24,494897427	9797,958971
601	24,515301344	9822,464072
602	24,535688292	9846,989568
603	24,556058315	9871,535443
604	24,576411448	9896,101677
605	24,596747752	9921,688260
606	24,617067250	9945,295169
607	24,637369989	9969,922389
608	24,657656011	9994,569903
609	24,677925358	10019,237696
610	24,698178070	10043,925749
611	24,718414188	10068,634046
612	24,738633753	10093,362571
613	24,758836806	10118,111308
614	24,779023386	10142,880243
615	24,799193535	10167,669349
616	24,819347291	10192,478621
617	24,839484696	10217,308038
618	24,859605789	10242,157585
619	24,879710609	10267,027245
620	24,899799195	10291,917001
621	24,919871588	10316,826837
622	24,939927826	10341,756738

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
623	24, 959967948	10366, 706688
624	24, 979991993	10391, 676669
625	25, 000000000	10416, 666667
626	25, 019992006	10441, 676664
627	25, 039968051	10466, 706645
628	25, 059928172	10491, 756591
629	25, 079872407	10516, 826496
630	25, 099800796	10541, 916334
631	25, 119713374	10567, 026093
632	25, 139610179	10592, 155756
633	25, 159491250	10617, 305308
634	25, 179356624	10642, 474733
635	25, 199206336	10667, 664016
636	25, 219040425	10692, 873141
637	25, 238858928	10718, 102092
638	25, 258661880	10743, 350853
639	25, 278449319	10768, 619410
640	25, 298221281	10793, 907747
641	25, 317977802	10819, 215848
642	25, 337718918	10844, 543597
643	25, 357444666	10869, 891280
644	25, 377155080	10895, 258581
645	25, 396850198	10920, 645585
646	25, 416530054	10946, 052277
647	25, 436194683	10971, 478640
648	25, 455844122	10996, 924661
649	25, 475478405	11022, 390324
650	25, 495097567	11047, 875613
651	25, 514701644	11073, 380514
652	25, 534290669	11098, 905011
653	25, 553864678	11124, 449090
654	25, 573423705	11150, 012735
655	25, 592967784	11175, 595932
656	25, 612496949	11201, 198666
657	25, 632011235	11226, 820921
658	25, 651510676	11252, 462684
659	25, 670995305	11278, 123938
660	25, 690465157	11303, 804669
661	25, 709920264	11329, 504863

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
662	25, 729360660	11355, 224505
663	25, 748786379	11380, 963580
664	25, 768197453	11406, 722073
665	25, 787593916	11432, 499970
666	25, 806975801	11458, 297256
667	25, 826343140	11484, 113916
668	25, 845695966	11509, 949937
669	25, 865034312	11535, 805303
670	25, 884358211	11561, 680001
671	25, 903667693	11587, 574015
672	25, 922962760	11613, 487317
673	25, 942243542	11639, 419936
674	25, 961509971	11665, 371814
675	25, 980762113	11691, 342951
676	26, 000000000	11717, 333333
677	26, 019223662	11743, 342946
678	26, 038433132	11769, 371776
679	26, 057628441	11795, 419808
680	26, 076809620	11821, 487028
681	26, 095976701	11847, 573422
682	26, 115129714	11873, 678976
683	26, 134268690	11899, 803677
684	26, 153393661	11925, 947509
685	26, 172504650	11952, 110460
686	26, 191601707	11978, 292514
687	26, 210684844	12004, 493659
688	26, 229754097	12030, 713879
689	26, 248809497	12056, 953162
690	26, 267851073	12083, 211494
691	26, 286878856	12109, 488860
692	26, 305892875	12135, 785247
693	26, 324893162	12162, 100641
694	26, 343879744	12188, 435028
695	26, 362852652	12214, 788396
696	26, 381811916	12241, 160729
697	26, 400757564	12267, 552015
698	26, 419689627	12293, 962240
699	26, 438608132	12320, 891390
700	26, 457513110	12346, 839452

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
701	26,476404589	12373,306412
702	26,495282598	12399,792256
703	26,514147167	12426,296972
704	26,532998322	12452,820546
705	26,551836094	12479,362964
706	26,570660511	12505,924214
707	26,589471600	12532,504281
708	26,608269391	12559,103153
709	26,627053911	12585,720815
710	26,645825188	12612,357256
711	26,664583251	12639,012461
712	26,683328128	12665,686418
713	26,702059845	12692,379113
714	26,720778431	12719,090533
715	26,739483914	12745,820666
716	26,758176320	12772,569497
717	26,776855677	12799,337014
718	26,795522013	12826,123204
719	26,814175355	12852,928053
720	26,832815729	12879,751550
721	26,851443164	12906,593681
722	26,870057685	12933,454432
723	26,888659319	12960,333792
724	26,907248094	12987,231747
725	26,925824035	13014,148284
726	26,944387170	13041,083391
727	26,962937525	13068,037054
728	26,981475126	13095,009261
729	27,000000000	13122,000000
730	27,018512172	13149,009257
731	27,037011669	13176,037020
732	27,055498516	13203,083276
733	27,073972741	13230,148013
734	27,092434368	13257,231218
735	27,110883423	13284,332877
736	27,129319932	13311,452980
737	27,147743920	13338,591518
738	27,166155414	13365,748464
739	27,184554438	13392,923820

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
740	27, 202941017	13420, 117569
741	27, 221315177	13447, 329698
742	27, 239676943	13474, 560195
743	27, 258026340	13501, 809047
744	27, 276363393	13529, 076243
745	27, 294688127	13556, 361770
746	27, 313000567	13583, 665949
747	27, 331300737	13610, 987767
748	27, 349588662	13638, 328213
749	27, 367864366	13665, 686940
750	27, 386127875	13693, 063938
751	27, 404379212	13720, 459192
752	27, 422618401	13747, 872692
753	27, 440845468	13775, 304425
754	27, 459060435	13802, 754379
755	27, 477263491	13830, 222624
756	27, 495454169	13857, 708901
757	27, 513632984	13885, 213446
758	27, 531799795	13912, 736196
759	27, 549954627	13940, 277042
760	27, 568097504	13967, 836069
761	27, 586228448	13995, 413233
762	27, 604347483	14023, 008522
763	27, 622454633	14050, 621924
764	27, 640549922	14078, 253427
765	27, 658633371	14105, 903020
766	27, 676705006	14133, 570690
767	27, 694764848	14161, 256422
768	27, 712812921	14188, 960216
769	27, 730849247	14126, 682048
770	27, 748873851	14244, 421910
771	27, 766886753	14272, 179791
772	27, 784887978	14299, 955679
773	27, 802877548	14327, 749564
774	27, 820855486	14355, 561431
775	27, 838821814	14383, 391271
776	27, 856776554	14411, 239071
777	27, 874719729	14439, 104820
778	27, 892651361	14466, 988506

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
779	27, 910571473	14494, 890119
780	27, 928480087	14522, 809645
781	27, 946377224	14550, 747075
782	27, 964262908	14578, 702396
783	27, 982137159	14606, 675597
784	28, 000000000	14634, 666667
785	28, 017851452	14662, 675593
786	28, 035691537	14690, 702366
787	28, 053520278	14718, 746973
788	28, 071337695	14746, 809403
789	28, 089143810	14774, 889644
790	28, 106938645	14802, 987686
791	28, 124722220	14831, 103518
792	28, 142494558	14859, 237127
793	28, 160255680	14887, 388503
794	28, 178005607	14915, 557635
795	28, 195744359	14943, 744511
796	28, 213471959	14971, 949120
797	28, 231188426	15000, 171452
798	28, 248893783	15028, 411493
799	28, 266588050	15056, 669235
800	28, 284271247	15084, 944665
801	28, 301943396	15113, 237773
802	28, 319604517	15141, 548548
803	28, 337254630	15169, 876979
804	28, 354893757	15198, 223054
805	28, 372521918	15226, 586763
806	28, 390139133	15254, 968094
807	28, 407745422	15283, 367037
808	28, 425340807	15311, 783582
809	28, 442925306	15340, 217715
810	28, 460498941	15368, 669428
811	28, 478061731	15397, 138710
812	28, 495613697	15425, 625548
813	28, 513154858	15454, 129933
814	28, 530685235	15482, 651854
815	28, 548204847	15511, 191300
816	28, 565713714	15539, 748260
817	28, 583211855	15568, 322724

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
818	28,600699292	15596,914682
819	28,618176042	15625,524119
820	28,635642126	15654,151029
821	28,653097720	15682,795486
822	28,670542373	15711,457221
823	28,687976575	15740,103148
824	28,705400188	15768,833170
825	28,722813232	15797,547278
826	28,740215726	15826,278793
827	28,757607689	15855,027706
828	28,774989139	15883,794005
829	28,792360097	15915,577681
830	28,809720581	15941,378722
831	28,827070610	15970,197118
832	28,844410203	15998,032860
833	28,861739379	16027,885935
834	28,879058156	16056,756335
835	28,896366553	16085,644048
836	28,913664589	16114,549065
837	28,930952282	16143,471374
838	28,948229652	16172,410966
839	28,965496715	16201,367830
840	28,982753492	16230,341956
841	29,000000000	16259,333333
842	29,017236257	16288,341952
843	29,034462281	16317,367802
844	29,051678092	16346,410873
845	29,068883707	16375,471155
846	29,086079144	16404,548637
847	29,103264421	16433,643310
848	29,120439557	16462,755168
849	29,137604568	16491,884186
850	29,154759474	16521,030369
851	29,171904291	16550,193701
852	29,189039038	16579,374174
853	29,206163733	16608,571776
854	29,223278392	16637,786498
855	29,240383034	16667,018330
856	29,257477676	16696,267262

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
857	29, 274562336	16725, 533285
858	29, 291637031	16754, 816382
859	29, 308701779	16784, 116552
860	29, 325765597	16813, 433782
861	29, 342801502	16842, 768062
862	29, 359886511	16872, 119382
863	29, 376861643	16901, 487732
864	29, 393876913	16930, 873102
865	29, 410882339	16960, 275483
866	29, 427877939	16989, 694864
867	29, 444863728	17019, 131236
868	29, 461839725	17048, 584588
869	29, 478805945	17078, 054911
870	29, 495762407	17017, 542196
871	29, 512709126	17137, 046433
872	29, 529646120	17166, 567611
873	29, 546573405	17196, 105722
874	29, 563490998	17225, 660755
875	29, 580398915	17255, 232701
876	29, 597297173	17284, 821549
877	29, 614185789	17314, 427292
878	29, 631064780	17344, 049918
879	29, 647934160	17373, 689418
880	29, 664793948	17403, 345783
881	29, 681644159	17433, 019003
882	29, 698484809	17462, 709068
883	29, 715315916	17492, 415969
884	29, 732137494	17522, 139697
885	29, 748949561	17551, 880241
886	29, 765752132	17581, 637594
887	29, 782545223	17611, 411742
888	29, 799328851	17641, 202680
889	29, 816103031	17671, 010397
890	29, 832867780	17700, 884883
891	29, 849623113	17730, 676129
892	29, 866369046	17760, 534128
893	29, 883105594	17790, 408864
894	29, 899832775	17820, 300334
895	29, 916550603	17850, 208527

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
896	29, 933259094	17880, 133432
897	29, 949973288	17910, 084029
898	29, 966648127	17940, 033346
899	29, 983328701	17970, 008335
900	30, 000000000	18000, 000000
901	30, 016662039	18030, 008332
902	30, 033314835	18060, 033321
903	30, 049958402	18090, 074958
904	30, 066592756	18120, 133235
905	30, 083217912	18150, 208141
906	30, 099833886	18180, 299667
907	30, 116440692	18210, 407806
908	30, 133038346	18240, 532546
909	30, 149626863	18270, 673879
910	30, 166206257	18300, 831796
911	30, 182776545	18331, 006289
912	30, 199337781	18361, 197347
913	30, 215889859	18391, 404961
914	30, 232432915	18421, 629123
915	30, 248966924	18451, 869824
916	30, 265491900	18482, 127054
917	30, 282007859	18512, 400805
918	30, 298514815	18542, 691067
919	30, 315012782	18572, 997831
920	30, 331501776	18603, 321089
921	30, 347981810	18633, 660832
922	30, 364852901	18664, 017050
923	30, 380915061	18694, 389735
924	30, 397368307	18724, 778877
925	30, 413812651	18755, 184468
926	30, 430248109	18785, 606500
927	30, 446674695	18816, 044962
928	30, 463092423	18846, 499846
929	30, 479501308	18876, 971144
930	30, 495901363	18907, 458846
931	30, 512292604	18937, 962943
932	30, 528675044	18968, 483428
933	30, 545048698	18999, 020291
934	30, 561413579	19029, 573522

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
935	30, 577769702	19060, 143115
936	30, 594117081	19090, 729059
937	30, 610455730	19121, 331346
938	30, 626785662	19151, 949967
939	30, 643106892	19182, 584914
940	30, 659419433	19213, 236178
941	30, 675723300	19243, 903750
942	30, 692018506	19274, 587622
943	30, 708305065	19305, 287785
944	30, 724582991	19336, 004229
945	30, 740852297	19366, 736948
946	30, 757112998	19397, 485931
947	30, 773365106	19428, 251171
948	30, 789608636	19459, 032658
949	30, 805843601	19489, 830385
950	30, 822070014	19520, 644343
951	30, 838287890	19551, 474522
952	30, 854497241	19582, 320916
953	30, 870698080	19613, 183514
954	30, 886890422	19644, 062309
955	30, 903074280	19674, 957292
956	30, 919249667	19705, 868455
957	30, 935416596	19736, 795789
958	30, 951575081	19767, 739285
959	30, 967725134	19798, 698936
960	30, 983866769	19829, 674733
961	31, 000000000	19860, 666667
962	31, 016124838	19891, 674730
963	31, 032241298	19922, 698913
964	31, 048349392	19953, 739210
965	31, 064449134	19984, 795610
966	31, 080540535	20015, 868105
967	31, 096623610	20046, 956688
968	31, 112698372	20078, 061350
969	31, 128764832	20109, 182082
970	31, 144823004	20140, 318876
971	31, 160872901	20171, 471725
972	31, 176914536	20202, 640619
973	31, 192947920	20233, 825551

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
974	31, 208973068	20265, 026513
975	31, 224989991	20296, 243495
976	31, 240998703	20327, 476490
977	31, 256999216	20358, 725489
978	31, 272991542	20389, 990486
979	31, 288975694	20421, 271470
980	31, 304951684	20452, 568434
981	31, 320919526	20483, 881370
982	31, 336879231	20515, 210270
983	31, 352830813	20546, 555126
984	31, 368774282	20577, 915929
985	31, 384709652	20609, 292672
986	31, 400636936	20640, 685346
987	31, 416556144	20672, 093943
988	31, 432467291	20703, 518456
989	31, 448370387	20734, 958875
990	31, 464265445	20766, 415194
991	31, 480152477	20797, 887408
992	31, 496031496	20829, 375496
993	31, 511902513	20860, 879464
994	31, 527765540	20892, 399298
995	31, 543620591	20923, 934992
996	31, 559467676	20955, 486537
997	31, 575306807	20987, 053925
998	31, 591137997	21018, 637148
999	31, 606961258	21050, 236198
1000	31, 622776601	21081, 851068
1001	31, 638584039	21113, 481749
1002	31, 654383582	21145, 128233
1003	31, 670175244	21176, 790513
1004	31, 685959035	21208, 471914
1005	31, 701734968	21240, 162329
1006	31, 717503054	21271, 872048
1007	31, 733263305	21303, 597432
1008	31, 749015782	21335, 338572
1009	31, 764760348	21367, 095461
1010	31, 780497164	21398, 868091
1011	31, 796226191	21430, 656453
1012	31, 811947441	21762, 460540

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1013	31, 827660925	21494, 280345
1014	31, 843366656	21526, 115859
1015	31, 859064644	21557, 967076
1016	31, 874754901	21589, 833986
1017	31, 890437438	21621, 716583
1018	31, 906112267	21653, 614859
1019	31, 921779399	21685, 528805
1020	31, 937438845	21717, 458415
1021	31, 953090617	21749, 403680
1022	31, 968734726	21781, 364594
1023	31, 984371183	21813, 341147
1024	32, 000000000	21845, 333333
1025	32, 015621187	21877, 341145
1026	32, 031234756	21909, 364573
1027	32, 046840717	21941, 403611
1028	32, 062439083	21973, 458252
1029	32, 078029864	22005, 528487
1030	32, 093613071	22037, 614309
1031	32, 109188716	22069, 715711
1032	32, 124756808	22101, 832684
1033	32, 140317359	22133, 965222
1034	32, 155870381	22166, 113316
1035	32, 171415884	22198, 276960
1036	32, 186953878	22230, 456146
1037	32, 202484376	22262, 650865
1038	32, 218007387	22294, 861112
1039	32, 233522922	22327, 086878
1040	32, 249030993	22359, 328155
1041	32, 264531609	22391, 584937
1042	32, 280024783	22423, 857216
1043	32, 295510523	22456, 144984
1044	32, 310988842	22488, 448235
1045	32, 326459750	22520, 766959
1046	32, 341923257	22553, 101152
1047	32, 357379374	22585, 450803
1048	32, 372828112	22617, 815908
1049	32, 388269481	22650, 196457
1050	32, 403703450	22682, 592441
1051	32, 419130154	22715, 003862

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1052	32, 434549480	22747, 430702
1053	32, 449961479	22779, 872958
1054	32, 465366161	22812, 330623
1055	32, 480763587	22844, 803688
1056	32, 496153618	22877, 292147
1057	32, 511536414	22909, 795993
1058	32, 526911934	22942, 315218
1059	32, 542280190	22974, 849814
1060	32, 557641192	23007, 399776
1061	32, 572994949	23039, 965094
1062	32, 588341473	23072, 545763
1063	32, 603680773	23105, 141775
1064	32, 619012860	23137, 753122
1065	32, 634337745	23170, 379799
1066	32, 649655434	23203, 021796
1067	32, 664965942	23235, 679107
1068	32, 680269276	23268, 351725
1069	32, 695565448	23301, 039643
1070	32, 710854467	23333, 742854
1071	32, 726136343	23366, 461350
1072	32, 741411067	23399, 195124
1073	32, 756678708	23431, 944469
1074	32, 771939216	23464, 708479
1075	32, 787192621	23497, 488045
1076	32, 802438933	23530, 282862
1077	32, 817678162	23563, 092921
1078	32, 832910318	23595, 918216
1079	32, 848135411	23628, 758739
1080	32, 863353450	23661, 614484
1081	32, 878564445	23694, 485444
1082	32, 893768406	23727, 371610
1083	32, 908965343	23760, 272978
1084	32, 824155266	23793, 189539
1085	32, 939338183	23826, 121286
1086	32, 954514206	23859, 068213
1087	32, 969683043	23892, 030312
1088	32, 984845004	23925, 007577
1089	33, 000000000	23958, 000000
1090	33, 015148038	23991, 007574

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1091	33, 030289129	24024, 030294
1092	33, 045423283	24057, 068150
1093	33, 060550509	24090, 121138
1094	33, 075670817	24123, 189249
1095	33, 090784215	24156, 272477
1096	33, 105890714	24189, 470815
1097	33, 120990323	24222, 484256
1098	33, 136083051	24255, 612794
1099	33, 151168908	24288, 756420
1100	33, 166247903	24321. 915129
1101	33, 181320046	24355, 088914
1102	33, 196385345	24388, 277767
1103	33, 211443810	24421, 481680
1104	33, 226495450	24454, 700652
1105	33, 241540277	24487, 934671
1106	33, 256578296	24521, 181731
1107	33, 271609519	24554, 447825
1108	33, 286633954	24587, 726947
1109	33, 301651610	24621, 021091
1110	33, 316662497	24654. 330248
1111	33, 331666624	24687, 654414
1112	33, 346664001	24720, 993579
1113	33, 361654635	24754, 347739
1114	33, 376638536	24787, 716886
1115	33, 391615714	24821, 101013
1116	33, 406586176	24854, 500116
1117	33, 421549934	24887, 914184
1118	33, 436506994	24921, 343213
1119	33, 451457367	24954, 787196
1120	33, 466401061	24988, 246126
1121	33, 481338085	25021, 719996
1122	33, 496268448	25055, 208800
1123	33, 511192160	25088, 712531
1124	33, 526109228	25122, 231182
1125	33, 541019662	25155, 764747
1126	33, 555923471	25189, 313219
1127	33. 570820663	23222, 876592
1128	33, 585711247	25256, 454858
1129	33, 600595232	25290, 048012

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1130	33,615472627	25323,656046
1131	33,630343441	25357,278955
1132	33,645207682	25390,916731
1133	33,660065359	25424,569368
1134	33,674916480	25458,236660
1135	33,689761055	25491,919199
1136	33,704599092	25525,616380
1137	33,719430600	25559,328395
1138	33,734255586	25593,055239
1139	33,749074061	25626,796904
1140	33,763886032	25660,553384
1141	33,778691508	25694,324674
1142	33,793490497	25728,110765
1143	33,808283008	25761,911653
1144	33,823069050	25795,727329
1145	33,837848631	25829,557789
1146	33,852621759	25863,403024
1147	33,867388443	25897,263030
1148	33,882148692	25931,137799
1149	33,896902513	25965,027325
1150	33,911649915	25998,931602
1151	33,926390907	26032,850623
1152	33,941125496	26066,784382
1153	33,955853692	26100,732872
1154	33,970575502	26134,696087
1155	33,985290935	26168,674021
1156	34,000000000	26202,666667
1157	34,014702703	26236,674019
1158	34,029399054	26270,696070
1159	34,044089061	26304,732815
1160	34,058772731	26338,784246
1161	34,073450074	26372,850358
1162	34,088121098	26406,931144
1163	34,102785809	26441,026598
1164	34,117444218	26475,136713
1165	34,132096331	26509,261484
1166	34,146742157	26543,400904
1167	34,161381705	26577,554966
1168	34,176014981	26611,723665

TAVOLA PARABOLICA I.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1169	34, 190641994	26645, 906994
1170	34, 205262752	26680, 104947
1171	34, 219877264	26714, 317518
1172	34, 234485537	26748, 544700
1173	34, 249087579	26782, 786487
1174	34, 263683398	26817, 042873
1175	34, 278273002	26851, 313852
1176	34, 292856398	26885, 599417
1177	34, 307433596	26919, 899562
1178	34, 322004603	26954, 214282
1179	34, 336569426	26988, 543569
1180	34, 351128074	27022, 887418
1181	34, 365680554	27057, 245824
1182	34, 380226875	27091, 618778
1183	34, 394767043	27126, 006275
1184	34, 409301068	27160, 408310
1185	34, 423828941	27194, 824864
1186	34, 438350715	27229, 255966
1187	34, 452866353	27263, 701575
1188	34, 467375879	27298, 161696
1189	34, 481879429	27332, 636428
1190	34, 496376621	27367, 125453
1191	34, 510867853	27401, 629076
1192	34, 525353003	27436, 147187
1193	34, 539832078	27470, 679780
1194	34, 554305086	27505, 226849
1195	34, 568772034	27539, 788388
1196	34, 583232931	27574, 364391
1197	34, 597687784	27608, 954852
1198	34, 612136599	27643, 559764
1199	34, 626579386	27678, 179123
1200	34, 641016151	27712, 812921

TAVOLA PARABOLICA II.

PARAMETRO = *Braccia Milanesi* 32,94278239 *ec.*

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Braccia.	Lineari.	Braccia quadrate.
1	5, 7395803323136	3, 8263868882o
2	8, 1169923 4828	10, 8220564 6438
3	9, 941244 74969	19, 882489 49938
4	11, 4791606 6462	30, 6110951 0565
5	12, 8340917 8537	42, 7803059 5124
6	14, 0590431 51882	56, 2361726 0452
7	15, 1855021 89179	70, 8656768 8283
8	16, 2339846 96575	86, 5812517 1506
9	17, 2187409 96941	103, 3124459 8164
10	18, 1501466 63617	121, 0009777 5744
11	19, 0360344 16387	139, 5975857 2017
12	19, 8824894 99380	159, 0599159 9504
13	20, 6943511 87801	179, 3510436 2760
14	21, 4755431 47383	200, 4384027 0891
15	22, 2292990 41270	222, 2929904 1270

TAVOLA PARABOLICA III.

PARAMETRO = Once Milanesi 395, 313388692981 45 ec.		
Altezze.	Radici.	Prodotti.
Once.	Lineari.	Once quadrate.
1	19, 88248949938	13, 2549929995
2	28, 11808630376	37, 4907817383
3	34, 43748199388	68, 8749639877
4	39, 76497899876	106, 0399439966
5	44, 45859808254	148, 1953269418
6	48, 70195408972	194, 8078163588
7	52, 60412266021	245, 4859057476
8	56, 23617260752	299, 9262539067
9	59, 64746840814	357, 8848109886
10	62, 87395237242	419, 1596824828
11	65, 94275756762	483, 5802221525
12	68, 87496398776	550, 9997119020
13	71, 68733537389	621, 2902399073
14	74, 39346370281	694, 3389945595
15	77, 00455071224	770, 0455071224
16	79, 52995799752	848, 3195519735
17	81, 97760430618	929, 0795154700
18	84, 35425891129	1012, 2511069854
19	86, 66576247380	1097, 7663246681
20	88, 91719616508	1185, 5626155344
21	91, 11801313507	1275, 5821838909
22	93, 25714209241	1367, 7714178553
23	95, 35306990306	1462, 0804051802
24	97, 40890817945	1558, 4625308712
25	99, 41244749690	1656, 8741249483
26	101, 38120193614	1757, 2741668930
27	103, 31244598154	1859, 6240276677
28	105, 20824532042	1963, 8872459811
29	107, 07048278028	2070, 0293327854
30	108, 90087998170	2178, 0175996340
31	110, 70101647899	2287, 8210072324
32	112, 47234521505	2399, 4100312544
33	114, 21620649832	2512, 7565429630
34	115, 93883982065	2627, 8337026002
35	117, 62639416497	2744, 6158638493
36	119, 29493699628	2863, 0784879107

TAVOLA PARABOLICA III.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Once.	Lineari.	Once quadrate.
37	120, 94646213588	2983, 1980660183
38	122, 56389668386	3104, 9520493244
39	124, 16610712680	3228, 3187852968
40	125, 74790474484	3353, 2774598624
41	127, 31005041398	3479, 8080446487
42	128, 85325888430	3607, 8912487604
43	130, 37820260226	3737, 8084745981
44	131, 88551513525	3868, 6417773006
45	133, 37579424762	4001, 2738274286
46	134, 84960467082	4135, 3878765718
47	136, 30748060385	4270, 9677255873
48	137, 74992797552	4407, 9976952166
49	139, 17742649566	4546, 4625988582
50	140, 59043151882	4686, 3477172940
51	141, 98927574108	4827, 6387751967
52	143, 37467074778	4970, 3219192563
53	144, 74670842795	5114, 3836977875
54	146, 10586226918	5259, 8110416904
55	147, 45248854502	5406, 5912466507
56	148, 78692740562	5554, 7119564764
57	150, 10950388133	5704, 1611474905
58	151, 42052880700	5854, 9271138706
59	152, 72029967520	6066, 9984538912
60	154, 00910142448	6160, 3640569792
61	155, 28720716875	6315, 0130915291
62	156, 55487887308	6470, 9349934206
63	157, 81236798064	6628, 1194551868
64	159, 05991599504	6786, 5564157883
65	160, 29775502184	6946, 2360509464
66	161, 52610827273	7107, 1487640001
67	162, 74519053548	7269, 2851772514
68	163, 95520861236	7432, 6361237603
69	165, 15636172977	7597, 1926395694
70	166, 34884192115	7762, 9459563203
71	167, 53283438538	7929, 8874942413
72	168, 70851782256	8098, 0088554838
73	169, 87606474894	8267, 3018177817

TAVOLA PARABOLICA III.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Once.	Lineari.	Once quadrate.
74	171, 03564179223	8437, 7583284166
75	172, 18740996940	8609, 3704984700
76	173, 33152494761	8782, 1305973455
77	174, 46813728976	8956, 0310475410
78	175, 59739268580	9131, 0644196616
79	176, 79143217073	9307, 2234276584
80	177, 83439233016	9484, 5609242752
81	178, 94240549442	9662, 8898966986
82	180, 04359992186	9842, 3834623950
83	181, 13809997214	10022, 9748651250
84	182, 22602627015	10204, 6574711284
85	183, 30749586119	10387, 4247654674
86	184, 38262235795	10571, 2703485221
87	185, 45151607978	10756, 1879326272
88	186, 51428418483	10942, 1713388433
89	187, 57103079547	11129, 2144938645
90	188, 62185711727	11317, 3114270362
91	189, 66686155219	11506, 4562674995
92	190, 70513980612	11696, 6431681088
93	191, 73978499113	11887, 8666694500
94	192, 76788772287	12080, 1209639665
95	193, 79053621328	12273, 4006268410
96	194, 80781635890	12467, 7002469696
97	195; 81981182510	12663, 0144980231
98	196, 82660412635	12859, 3381362548
99	197, 82827270297	13056, 6659983960
100	198, 82489499380	13254, 9929995866
101	199, 81654650701	13454, 3141314720
102	200, 80330088592	13654, 6244602425
103	201, 78522997329	13855, 9191248325
104	202, 76240887229	14058, 1933351454
105	203, 73480100486	14261, 4423703402
106	204, 70275816768	14465, 6615771827
107	205, 66607058566	14670, 8463684437
108	206, 62489196328	14876, 9922213561
109	207, 57928453372	15084, 0946761169
110	208, 52930910600	15292, 1493344400

TAVOLA PARABOLICA III.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Once.	Lineari.	Once quadrate.
111	209, 4750251102o	15501, 1518581548
112	210, 4164906408 5	15711, 0979678501
113	211, 3537624985 8	15921, 9834415596
114	212, 2868962300 7	16133, 8041134853
115	213, 2159461665 3	16346, 5558727673
116	214, 1409654605 7	16560, 2346622840
117	215, 0620061216 7	19774, 8364774902
118	215, 9791190503 6	16990, 3573652949
119	216, 8923540710 1	17206, 7934229667
120	217, 8017599634 0	17424, 1407970720
121	218, 7073844931 8	17642, 3956824498
122	219, 6092744410 9	17861, 5543212086
123	220, 5074756311 8	18081, 6130017567
124	221, 4020329579 8	18302, 5680578596
125	222, 2929904127 0	18524, 4158677250
126	223, 1803911084 3	18747, 1528531081
127	224, 0642773045 4	18970, 7754784510
128	224, 9446904301 1	19195, 2802500360
129	225, 8216711066 3	19420, 6637151701
130	226, 6952591698 5	19646, 9224613870
131	227, 5624936908 9	19874, 0531156710
132	228, 4324129966 5	20102, 0523437052
133	229, 2960546894 9	20330, 9168491347
134	230, 1564556662 6	20560, 6433728525
135	231, 0136521367 3	20791, 2286923057
136	231, 8676796413 1	21022, 6696208121
137	232, 7185730682 8	21254, 9630069029
138	233, 5668666704 4	21488, 1057336804
139	234, 4110940811 5	21722, 0947181865
140	235, 2527883299 5	21956, 9269107953

TAVOLA PARABOLICA IV.

PARAMETRO = Punti Milanesi 4743, 760664315777 *ec.*		
Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
1	68, 874963987	45, 916642658
2	97, 403908179	129, 871877572
3	119, 2949369962	238, 589873992
4	137, 7499279754	367, 333141268
5	154, 0091014244	513, 363671414
6	168, 7085178225	674, 834071290
7	182, 2260262701	850, 388122594
8	194, 8078163589	1038, 975020580
9	206, 6248919632	1239, 749351779
10	217, 8017599963	1452, 011733089
11	228, 4324129966	1675, 171028642
12	238, 5898739925	1908, 718991940
13	248, 3322142536	2152, 212523531
14	257, 7065177685 9	2405, 260832507
15	266, 7515884952 4	2667, 515884952
16	275, 3798559514 8	2937, 385130149
17	283, 9787514826 2	3218, 425850136
18	292, 2117245383 5	3506, 540694460
19	300, 2190077626 5	3802, 774098327
20	308, 0182028489 7	4106, 909371320
21	315, 6247359612 8	4418, 746303458
22	323, 0522165454 7	4738, 099176000
23	330, 3127234595 5	5064, 795093046
24	337, 4170356451 6	5398, 672570323
25	344, 3748199388 1	5739, 580332314
26	351, 1947853716 0	6087, 376279774
27	357, 8848109888 4	6441, 926597799
28	364, 4520525402 9	6803, 104980752
29	370, 9030321595 6	7170, 791955085
30	377, 2437142345 4	7544, 874284691
31	383, 4795699822 7	7925, 244446300
32	389, 6156327178 1	8311, 800164646
33	395, 6565454057 5	8704, 443998926
34	401, 6066017718 5	9103, 082973495
35	407, 4697820097 1	9507, 628246893
36	413, 2497839265 7	9917, 994814237

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
37	418, 9500502204o	10334, 101238770
38	424, 57379246015	10755, 869408990
39	430, 12401224334	11183, 224318326
40	435, 60351992680	11616, 093864714
41	441, 01495126236	12054, 408667838
42	446, 36078221687	12498, 101902072
43	451, 64334221327	12947, 109143447
44	456, 86482599330	13401, 368229137
45	462, 02780427346	13860, 819128204
46	467, 13273334088	14325, 403822454
47	472, 18296371516	14795, 066196408
48	477, 17974798513	15269, 751935524
49	482, 12474791434	15776, 048431868
50	487, 01954089726	16233, 984696575
51	491, 86562583708	16723, 431278461
52	496, 66442850723	17217, 700188251
53	501, 41780645116	17716, 744827941
54	506, 12555346776	18220, 519924839
55	510, 79040372482	18728, 981469910
56	515, 41303553720	19242, 086660055
57	519, 99457484285	19759, 793844028
58	524, 53609840585	20282, 062471674
59	529, 03863676921	20808, 853046256
60	533, 50317699048	21340, 127079619
61	537, 93066516351	21875, 847049983
62	542, 32200876193	22415, 976362160
63	546, 67807881045	22960, 479310039
64	550, 99971190209	23509, 321041156
65	555, 28771207418	24062, 467523212
66	559, 54285255451	24619, 885512398
67	563, 76587738985	25181, 542523413
68	567, 95750296431	25747, 406801049
69	572, 11841941888	26317, 447293245
70	576, 24929197536	26891, 683625517
71	580, 35076218302	27469, 986076663
72	584, 42344907672	28052, 325555683
73	588, 46795025905	28638, 773579274

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
74	592, 4848429785g	29229, 252253610
75	596, 4746849814I	29823, 734249071
76	600, 4380155253 2	30422, 192786616
77	604, 3753561755 4	31024, 601617011
78	608, 2872116168 7	31630, 935004077
79	612, 1740704088 5	32241, 167708199
80	616, 0364056979 5	32855, 274970557
81	619, 8746758898 6	33473, 232498051
82	623, 6893252845 4	34095, 016448888
83	627, 4807846764 7	34720, 603418765
84	631, 2494719225 6	35349, 970427663
85	634, 9957924796 3	35983, 094907179
86	638, 7201399135 2	36619, 954688375
87	642, 4228963817 1	37260, 527990139
88	646, 1044330909 5	37904, 793408002
89	649, 7651107316 4	38552, 729903411
90	653, 4052798902 1	39204, 316793413
91	657, 0252814410 8	39859, 533740759
92	660, 6254469191 0	40518, 360744371
93	664, 2061058873 9	41180, 778565018
94	667, 7675512075 1	41846, 766542337
95	671, 3101094948 5	42516, 306934674
96	674, 8340712903 4	43189, 380562582
97	678, 3397264198 1	43865, 968975115
98	681, 8273572561 7	44546, 054007403
99	685, 2972389899 5	45229, 617773337
100	688, 7496398776 8	45916, 642658509
101	692, 1848214862 0	46607, 111313404
102	695, 6030389239 3	47301, 006646827
103	699, 0045410614 4	47998, 311819552
104	702, 3895707432 1	48699, 010238196
105	705, 7583649898 5	49403, 085549290
106	709, 1111551918 1	50110, 521633546
107	712, 4481672948 4	50821, 302600365
108	715, 7696219776 9	51535, 412782394
109	719, 9763276736 3	52318, 279810950
110	722, 3667164776 7	52973, 559208362

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
111	725, 64277281617	53697, 565188397
112	728, 90410508060	54424, 839846018
113	732, 15091003766	55155, 368556170
114	735, 38338010407	55889, 136887909
115	738, 60170348960	56626, 130600869
116	741, 80606431911	57366, 335640678
117	744, 99664276084	58109, 738135346
118	748, 17361513926	58856, 324390955
119	751, 33715404928	59606, 080887910
120	754, 48742846907	60358, 994277526
121	757, 62460386538	61115, 051378474
122	760, 74884229147	61874, 239173040
123	763, 86030248477	62636, 544803751
124	766, 95913996454	63401, 955570402
125	770, 04550712244	64170, 458926870
126	773, 11955330581	64942, 042477688
127	776, 18142490618	65716, 693975390
128	779, 23126543562	66494, 401317173
129	782, 26921561444	67275, 152542842
130	785, 29541343519	68058, 935831050
131	788, 30999424507	68845, 739497403
132	791, 31309081151	69635, 551991413
133	794, 30483339540	70428, 361894392
134	797, 28534980871	71224, 157916245
135	800, 25476548573	72022, 928893716
136	803, 21320354370	72824, 663787962
137	806, 16078483912	73629, 851681973
138	809, 09762802573	74436, 981778367
139	812, 02384961353	75247, 543397520
140	814, 93956401942	76061, 025975146
141	817, 84488362391	76877, 419060648
142	820, 73991881358	77696, 712314352
143	823, 62477803818	78518, 895506306
144	826, 49956785315	79343, 958513902
145	829, 36439297035	80171, 891320476
146	832, 21935629460	81002, 684012674
147	835, 06455997398	81836, 826779450

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
148	837, 90010044081	82672, 809910169
149	840, 72607844906	83512, 123792607
150	843, 54258911293	84354, 258911293
151	846, 34972780345	85199, 405932214
152	849, 14758492080	86046, 955271924
153	851, 93625444648	86897, 497953541
154	854, 71582546828	87750, 824748977
155	857, 48638646350	88606, 926601228
156	860, 24802448669	89465, 794546616
157	863, 00082520173	90327, 419704448
158	865, 74487290609	91191, 793279441
159	868, 48025056848	92058, 906560259
160	871, 20703985361	92928, 750917718
161	873, 92532115515	93801, 317803986
162	876, 63517361608	94676, 598750429
163	879, 33667516189	95554, 585367592
164	882, 02990252473	96435, 269342703
165	884, 71493127074	97318, 642439781
166	887, 39183581871	98204, 696497871
167	890, 06068947051	99093, 423427717
168	892, 72156443375	99984, 815216580
169	895, 37453184092	100878, 863920744
170	898, 01966177455	101775, 561667782
171	900, 65702328799	102674, 900654831
172	903, 28668442655	103576, 873147578
173	905, 90871224788	104481, 471479255
174	908, 52317284202	105388, 688049674
175	911, 13013135076	106298, 515324255
176	913, 72965198661	107210, 945833096
177	916, 32179805125	108125, 972170048
178	918, 90663195354	109043, 586991820
179	921, 48421524700	109963, 783017088
180	924, 05460854693	110886, 553025632
181	926, 61787174711	111811, 889857485
182	929, 17406383898	112739, 786412099
183	931, 72324301253	113670, 235647529
184	934, 26546668176	114603, 230579629

49

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
185	936, 80079146978	115538, 764281273
186	939, 32927323848	116476, 829881572
187	941, 85096709991	117417, 420565122
188	944, 36592743033	118360, 529571268
189	946, 87420788385	119306, 150193365
190	949, 37586140579	120254, 275778067
191	951, 87094024574	121204, 899724624
192	954, 85949597026	122158, 015484193
193	956, 84157947538	123113, 616559166
194	959, 31724099865	124071, 696502492
195	961, 78653013107	125032, 248917039
196	964, 24949582868	125995, 267454948
197	966, 70618642388	126960, 745817003
198	969, 15664963643	127928, 677752009
199	971, 60093258438	128899, 057056194
200	974, 03908179454	129871, 877572605
201	976, 47114321288	130847, 133190526
202	978, 89716221459	131824, 817844898
203	981, 31718361399	132804, 925515760
204	983, 73125167416	133787, 450227686
205	986, 13941011640	134772, 886049241
206	988, 54170212948	135759, 727092449
207	990, 93817037865	136749, 467512254
208	993, 32885701447	137741, 601506007
209	995, 71380368155	138736, 123312963
210	998, 09305152691	139733, 027213767
211	1000, 46664120830	140732, 307529968
212	1002, 83461290232	141733, 958623528
213	1005, 19700631232	142737, 974896349
214	1007, 55386067623	143744, 850789809
215	1009, 90521477408	144753, 080784285
216	1012, 25110693553	145764, 159398716
217	1014, 59157504708	146777, 581190144
218	1016, 92665655928	147793, 840753282
219	1019, 25638849366	148811, 432720074
220	1021, 58080744964	149831, 851759280
221	1023, 89994961118	150854, 592576047

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
222	1026, 2138507533 9	151879 ,649911502
223	1028, 5225462489 4	152907 ,018542342
224	1030, 8260710744 2	153936 ,693280447
225	1033, 1244598164 5	154968 ,668972468
226	1035, 4177466778 1	156002 ,940499457
227	1037, 7059654833 2	157039 ,502776476
228	1039, 9891496857 0	158078 ,350752226
229	1042, 2673323712 6	159119 ,479408679
230	1044, 5405462654 9	160162 ,883760408
231	1046, 8088237385 7	161208 ,558855740
232	1049, 0721968107 1	162256 ,499773390
233	1051, 3306971574 5	163306 ,701625124
234	1053, 5843561148 2	164359 ,159553912
235	1055, 8332046844 3	165413 ,868733894
236	1058, 0772735384 3	166470 ,824370046
237	1060, 3165930243 8	167530 ,021697852
238	1062, 5511931700 7	168591 ,455982984
239	1064, 7811036882 0	169655 ,122520987
240	1067, 0063539809 8	170721 ,016636957
241	1069, 2269731446 6	171789 ,133685242
242	1071, 4429899739 9	172859 ,469049137
243	1073, 6544329665 5	173932 ,018140581
244	1075, 8613303270 3	175006 ,776399864
245	1078, 0637099714 2	176083 ,739295332
246	1080, 2615995311 8	177162 ,902323114
247	1082, 4550263572 1	178244 ,261006821
248	1084, 6440175238 6	179327 ,810897278
249	1086, 8285998328 4	180413 ,547572251
250	1089, 0087998170 3	181501 ,466636172
251	1091, 1846437442 4	182591 ,563719869
252	1093, 3561576209 1	183683 ,834480313
253	1095, 5233671957 3	184778 ,274600346
254	1097, 6862979632 2	185874 ,879788439
255	1099, 8449751671 9	186973 ,645778422
256	1101, 9994238042 1	188074 ,568329252
257	1104, 1496686270 1	189177 ,643224761
258	1106, 2957341477 3	190282 ,866273410

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
259	1108, 43764464122	191390, 233308051
260	1110, 57542414826	192499, 740185698
261	1112, 70909647868	193611, 382787290
262	1114, 83868521447	194725, 157017461
263	1116, 96421371279	195841, 058804309
264	1119, 08570510902	196959, 084099188
265	1121, 20318231963	198079, 228876468
266	1123, 31666804512	199201, 489133335
267	1125, 42618477282	200325, 860889562
268	1127, 53175477971	201452, 340187308
269	1129, 63340013516	202580, 923090905
270	1131, 73114270862	203711, 605686652
271	1133, 82500414727	204844, 384082607
272	1135, 91560592865	205979, 254408395
273	1138, 00116931819	207116, 212815001
274	1140, 08351537182	208255, 255474586
275	1142, 16206498326	209396, 378580264
276	1144, 23683883676	210539, 578345964
277	1146, 30785743423	211684, 851006188
278	1148, 37514109274	212832, 192815854
279	1150, 43870994681	213981, 600050107
280	1152, 49858395072	215133, 069004134
281	1154, 55478288071	216286, 595992986
282	1156, 60732633727	217442, 177351407
283	1158, 65623374725	218599, 809433648
284	1160, 70152436605	219759, 488613305
285	1162, 74321727972	220921, 211283147
286	1164, 78133140702	222084, 973854938
287	1166, 81588550149	223250, 772759285
288	1168, 84689815345	224418, 604445462
289	1170, 87438779198	225588, 465381255
290	1172, 89837268689	226760, 352052799
291	1174, 91887095062	227984, 260964420
292	1176, 93590051810	229110, 188634190
293	1178, 94947925876	230288, 131615211
294	1180, 95962475811	231468, 086452590
295	1182, 96635453978	232650, 049726157

TAVOLA PARABOLICA IV.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
Punti.	Lineari.	Quadrati.
296	1184, 9696859 5718	233834, 0180288884
297	1186, 9696362 1727	235019, 987971019
298	1188, 9662223 8232	236207, 956179954
299	1190, 9594613 7155	237897, 919300062
300	1192, 9493699 6283	238589, 873992566
301	1194, 8817347 1647	239772, 934766438
302	1196, 9192623 6624	240979, 744823070
303	1198, 8992790 4210	242177, 654366504
304	1200, 8760310 5066	243377, 542292934
305	1202, 8495352 4150	244579, 405499105
306	1204, 8198053 1556	245783, 240284374
307	1206, 7868593 6889	246989, 043884166
308	1208, 7507123 5108	248196, 812936088
309	1210, 7113798 3979	249406, 544246997
310	1212, 6688772 8591	250618, 234639088

APPENDICE.

Essendomi stata dal sig. Dottore, e chiariss. Professore Brunacci graziosamente partecipata l'idea del suo bellissimo ritrovato il *Galleggiante composto*, e nel medesimo tempo la maniera di servirsene per indagare le velocità dell'acqua negli strati sotto la superficie, siccome è detto nel principio di questo trattatello, facendovi sopra qualche riflessione, non ho potuto dispensarmi di aggiugnere quest'Appendice alla mia Opericciuola, dimostrando al mio Lettore, come dal medesimo galleggiante, facendo uso delle nostre tavole, si possa trarre un metodo di misurare le quantità d'acqua nelle sezioni rigurgitate meno difettoso, e meno soggetto ad errore di quello, che per mancanza di altri maggiori mezzi a me noti, mi sono servito adoperando il pendolo.

Si chiami V la velocità assoluta della superficie di un canale, o sia lo spazio che l'acqua in superficie percorre in un secondo di tempo ritrovato col galleggiante *semplice*, e si determini col calcolo l'altezza equivalente, la quale si chiami A. Sopra di questa, come asse s'intenda descritta una parabola Apolloniana, avente il parametro di pollici parigini 724, o siano braccia milanesi d'architteto 32, 94 ec. ovvero di once del medesimo braccio 395, 31 ec. (Tavole paraboliche II., e III.) la quale parabola passerà per l'estremità dell'ordinata, che può esprimere la detta velocità della superficie.

Si chiami v la velocità dell'acqua ad una data profondità p sotto la superficie determinata col Galleggiante composto. Si faccia $\sqrt{} \times A : \sqrt{(A+p)} = V$ al quarto proporzionale; questo esprimerà la velocità assoluta, che avrebbe l'acqua alla profondità p, ogni qual volta, tolto ogni impedimento che la ritardi, essa si movesse colla velocità prodotta dall'altezza dell'acqua sovrastante e premente.

Da questa velocità si levi la velocità v, il restante sarà la velocità perduta dall'acqua rigurgitata nella profondità p. Se applicando questo discorso a molte e varie profondità sotto la superficie poco distanti tra loro potesse addivenire in pratica, che la curva, alla quale terminano tutte le velocità ritrovate col mezzo della palla immersa del Galleggiante composto, e che dal p. Grandi chiamasi *Scala delle velocità*, fosse quadrabile, noi avremo senz'alcun fallo un metodo generale di calcolare le quantità d'acque nelle sezioni rigurgitate non meno esattamente di quello, che da un abile agrimensore si misurino i terreni. Imperocchè sottraendo dal trapezio parabolico corrispondente all'altezza della sezione il trapezio della scala, che corrisponde alla medesima, il restante dinoterebbe la quantità d'acqua che dal rigurgito viene impedita di sortire dalla sezione.

Ma conciossiachè è difficilissimo, per non dire impossibile, che in pratica tale sia l'area della scala, e per lo più la medesima sarà molto irregolare, perciò parmi se non erro, che il Perito possa appigliarsi al seguente ripiego.

Dalle *radici* di una delle due tavole paraboliche II. o III. (secondo il bisogno) corrispondenti alle altezze, nelle quali si sono ritrovate le velocità dell'acqua sotto la superficie computate dalla sommità della detta altezza equivalente A, si levino le velocità ritrovate col Galleggiante composto (ciascheduna da ciascheduna) e ciaschedun restante si moltiplichi per quella parte dell'altezza della sezione, che tra due luoghi i più vicini, ne' quali si è determinata la velocità investigata col detto Galleggiante; e si faccia la somma di tutti i prodotti, che quindi nascono, questa indicherà se non esattamente, prossimamente almeno la quantità d'acqua rigurgitata in tutta quella parte dell'altezza della sezione, nella quale si è potuto adoperare il Galleggiante composto; e quindi si potrà agevolmente passare a definire la quantità rigurgitata in tutta la sezione.

Perchè l'acqua di un canale ordinariamente corre più veloce nel mezzo, o sia *filone*, che vicino alle sponde, per errare meno che sia possibile, si potrebbe applicare questo metodo alle perpendicolari della sezione non solamente nel mezzo, ma altresì da una parte e l'altra del filone. Quindi determinata la quantità d'acqua rigurgitata nelle tre perpendicolari della sezione medesima, si potrebbe prenderne un medio aritmetico, il quale moltiplicato per l'intera larghezza della sezione dasse la quantità totale impedita dal rigurgito in tutta la sezione; oppure, forse meno difettosamente, si potrebbe ritrovare la quantità d'acqua rigurgitata in ciascheduna dalle tre perpendicolari, ed in seguito moltiplicare ciascheduna di esse per quella parte della larghezza, nella quale la velocità della superficie non variasse sensibilmente, e quindi si facesse la somma de' tre prodotti, la quale dovrebbe indicare la quantità d'acqua rigurgitata in tutta la sezione.

Annotazione. Nelle sezioni ancora non rigurgitate, nelle quali l'acqua in superficie sia dotata di sensibile velocità, potrebbero i calcoli, usando questo metodo, forse riuscire alquanto più esatti. In vece di indagare col galleggiante semplice la velocità della superficie in tre luoghi, nel filone, e da ambe le parti, e quindi prenderne un medio aritmetico, il quale ci indichi la velocità media della medesima superficie, la quale ci serva di un *dato* per determinare l'altezza equivalente, si determinino le tre altezze equivalenti corrispondenti alle tre velocità ritrovate, e quindi calcolate col mezzo delle nostre tavole paraboliche le quantità d'acqua, le quali escono dalle perpendicolari della sezione libera ne' luoghi ove si sono indagate

le dette velocità della superficie; si operi in seguito nella maniera che abbiamo indicata riguardo alle sezioni rigurgitate; ma essendo questi metodi in pratica alquanto lunghi, e difficili, lascierò che ogn' uno ne giudichi come più gli piace.

II. Ritornanando alle sezioni rigurgitate, essendo spesse volte il rigurgito prodotto dagli ostacoli, che trovansi nel fondo, come sono le erbe, pianticelle, e simili cose; è chiaro che espurgando il fondo da questi impedimenti, si può liberare una sezione dal rigurgito, quando questo sia da' medesimi totalmente cagionato. Diffatti il celebre p. Castelli ci assicura che solamente usando questo mezzo ne' fossi, che servivano di scolo alle acque delle paludi Pontine, gli è pure riuscito, dando libero corso alle acque degli stessi fossi, di asciugare gran parte delle medesime. Le quali cose non ho voluto tralasciare di commemorare in questo luogo, non perchè non siano note a chicchessia, ma perchè alcune volte in pratica per mancanza di riflessione tralasciamo di usare i mezzi più facili a preferenza de' difficili. E tanto basti avere detto di ciò.

DESCRIZIONE, ESAME E TEORIA
DI TUTTI I TACHIMETRI IDRAULICI
FINO AD ORA CONOSCIUTI.

DISSERTAZIONE

DEL DOTTOR GIOVAMBATISTA MASETTI

PROFESSOR SUPPLENTE DI MECCANICA ED IDRAULICA,
NELL' UNIVERSITA' DI BOLOGNA.

PREFAZIONE.

La scienza delle Acque, nata e cresciuta in Italia, mercè lo studio di uomini sommi, e mercè la protezione di alcuni Principi, che colle loro largizioni cooperarono al perfezionamento della medesima; debbe riguardarsi siccome una scienza molto vantaggiosa al pubblico bene, e quindi meritevole della Sovrana Beneficenza, e dell' attenzione di que' soggetti preclarissimi, che o per faccoltà, o per ingegno possono cooperare all' ultimo suo perfezionamento.

Dopo che il p. ab. Castelli, mostrò l' errore in cui erano caduti coloro, che nella misura delle acque correnti non curavano punto la velocità delle medesime; e dopo che, per correggere un tanto errore, suggerì il mezzo di adoperarsi onde determinare sì fatta velocità: fu scopo degl' Idrometri lo esaminare cotesto metodo del Castelli, modificarlo, ove loro sembrava abbisognoso di emendazione, ed immaginarne de' nuovi, all' intendimento di giungere a capo dell' impresa, con maggiore soddisfazione.

Era agevole molto il conoscere, che il metodo di che si ragiona non poteva applicarsi a determinare altra velocità che quella dell' acqua in superficie, e che quindi non avrebbe data la velocità assoluta e reale di una corrente, se non allora quando camminasse ella del pari in superficie, che in qualunque altra profondità sotto la medesima: ma siccome la cosa succede diversamente, e la velocità di una corrente varia dalla superficie al fondo dell' alveo, così fu scopo

degl' Idrometri il cercare quella legge che la natura osserva nel distribuire le velocità ai diversi filamenti di una corrente, onde con essa porger campo alla soluzione di moltissimi problemi intorno al moto dell' acqua negli alvei, la quale riesce incerta e difficilissima, senza la cognizione di questa legge. Co' primi tentativi però, gl' Idrometri si contentarono di determinare la velocità media, fra tutte quelle che hanno luogo negli infiniti punti di una data sezione, perchè conoscendosi una tale velocità, facilmente si determina la portata degli alvei, con tutta quella precisione che nella pratica può mai abbisognare. Ma conoscendo quanto fosse vantaggioso il potere scoprire come variano le velocità ne' diversi punti di una stessa sezione verticale dell' alveo, tanto dalla superficie discendendo verso il fondo, come dal filone procedendo verso le sponde; si applicarono ad immaginare degli strumenti a ciò opportuni, ed a perfezionar quelli fra questi, che loro sembravano difettosi.

Molti sono i tentativi co' quali gl' Idrometri hanno cercato di conseguire quest' intento. Potendo tornare di giovamento sommo agl' Ingegneri, a cui è indirizzata particolarmente la presente Memoria, il conoscere cotesti tentativi, non tanto pel molto studio che in ciò è stato adoperato, quanto per le ingegnose macchinette, che come dissi sono state inventate; ho creduto di non far cosa del tutto indegna della loro attenzione, compilando questo scritto in cui sono registrati sì fatti tentativi; onde possa ognuno esaminarli agiatamente e senza avere bisogno di ricorrer ai molti libri in cui sono sparsi. E perchè, trattandosi di descrivere invenzioni che ebbero la loro origine in un' epoca assai remota, è sempre utile mostrare come si succedettero, sia per servire alla storia di coteste ricerche, come per servire all' erudizione e curiosità de' leggitori; così ho creduto ottimo divisamento il mostrare l' epoca e l' ordine cronologico col quale furono pubblicate, lo che potrà servire a mostrare eziandio se alcuno s' arroga il diritto d' invenzione sopra qualche macchinetta, che sia stata da altri immaginata, o corretta.

Distinguerò coteste macchinette col nome di Tachimetri idraulici *(*); e dividerò la mia Dissertazione in tre parti. Nella prima darò una breve descrizione storica cronologica di tutte le macchinette inventate per la ricerca, non solo della scala delle velocità, ma eziandio della velocità media. Nella seconda riferirò la concisa descrizione*

(*) *La parola* Tachimetro *deriva dai vocaboli greci* ταχὺ — *velocità* μαιτρων — *misura. Cotesta notizia mi fu data dall' Egregio e Nobile sig. Adamante Dallaporta Cefaleno, cui ebbi l' onore d' istruire ne' primi erudimenti dell' Aritmetica, e dell' Algebra e Geometria.*

delle medesime, trascrivendo le parole stesse di ciascun inventore, o correttore; acciocchè possa ognuno acquistare quell' idea, che si formerebbe colle opere originali: nè tralascierò di soggiungere le mie riflessioni, quali che siano, senza però omettere i giudizj che altri autori ne han fatto. Nella terza raccoglierò le teorie, sulle quali sono fondati gli usi di cotesti tachimetri, e potrà rilevarsi dalle medesime quanta confidenza possa meritare ciascuna invenzione, nel pratico suo maneggiamento.

Potrà valere quest' ultima parte del mio discorso, a persuadere gl' Ingegneri, che colla scienza del calcolo si giunge a penetrare molti reconditi misterj della natura, cui non era dato d' interpretare prima di questa scienza: e se bene vi considerano, s' invoglieranno talmente della medesima, che anche dopo di aver terminato il loro studio teorico, non tralascieranno di occuparsi di essa, e di andare alternando questo studio colle utilissime pratiche applicazioni. Infatti scorgeranno, da quanto io dico in questo scritto, come un Bonati, ed un Venturoli hanno tentato di determinare col calcolo la scala delle velocità, mercè di quello strumento, che ai tempi del Cabeo e del Barattieri, non serviva che a dare la misura della velocità media. Come un Brunacci abbia col calcolo trovata una regola per determinare la velocità in qualunque punto di una sezione verticale del fiume; mercè di quello strumento, che il Mariotte immaginò per iscoprire se le velocità, dalla superficie al fondo crescevano, o diminuivano. Non la finirei più se volessi qui annoverare tutti i vantaggi che la scienza del calcolo arreca alla scienza degl' Ingegneri, e perciò non so abbastanza raccomandare ai medesimi uno studio, che loro torna di tanto profitto. E a vero dire non so come possa esservi oggidì bravo ingegnere, senza che abbia buona dose di cognizioni di calcolo. I migliori Autori che trattano di questa loro scienza, non dirò solo Italiani, ma Francesi, Tedeschi e di altre nazioni ancora, la trattano col calcolo; e come si potrà profittare delle cognizioni che s' acquistano da questi aurei libri, senza conoscere quella scienza che il calcolo insegna? Insomma io credo che la scienza del calcolo, sia oggidì talmente legata alla scienza degl' Ingegneri, che quest' ultima, non possa andar disgiunta dalla prima.

Mi lusingo però, che una tale verità sarà da tutti conosciuta, e che gl' Ingegneri Italiani non permetteranno che questa nostra Patria, già Madre della scienza delle acque, le divenga Matrigna; per cui si occuperanno mai sempre e con indefessa cura, non solo della parte sperimentale, ma di quella eziandio, nella quale è pur mestieri associare il calcolo, e la profonda Geometria, per conseguire lo scopo a cui mirasi. Per me nella pochezza del mio ingegno, cercherò mai sempre di adoperare que' mezzi che trovo più convenienti,

e più a portata delle deboli mie forze; e per l' amore ch' io porto alla scienza; e per l' utilità somma che alla Società ne deriva dal suo perfezionamento, non tralascierò mai d' invitare i sublimi ingegni a volere occuparsi della medesima, non solo coll' impareggiabile sostegno della sperienza, ma eziandio con quello delle più astruse teorie.

PARTE PRIMA.

Succinta descrizione storica cronologica, di tutti i tachimetri idraulici.

1. Scrisse il p. ab. Benedetto Castelli il suo trattato sulla misura delle acque correnti, all' occasione che fu destinato dalla Santità di Papa Urbano VIII, ad accompagnare Monsignor Corsini nella visita delle acque di Ferrara, Bologna, Romagna e Romagnola, l' anno 1625. In quest' aureo libro, che fu poscia stampato nel 1628 (*), il Castelli fa vedere la necessità di conoscere la velocità dell' acqua, onde calcolare esattamente la quantità che compete a ciascun derivatario, sia nel distribuire le acque delle fontane, sia nel distribuir quelle, che servir debbono agli usi dell' agricoltura, e delle arti. E parlando particolarmente di queste ultime, nell' undecima Appendice del libro citato, propone, per misurare cotesta velocità, di adoperare una palla di legno o di altra sostanza più leggera dell' acqua, la quale abbandonata alla corrente prenderà il moto della medesima, che potrà conoscersi misurando il tempo che impiega a percorrere equabilmente uno spazio conosciuto.

(*) Il sig. professore Pietro Franchini nel suo Saggio sulla storia delle Matematiche (Lucca 1821. pag. 178.), cita l' epoca del 1638, e lo stesso si trova nel tom. 10 della Biografia universale antica e moderna, stampata in Venezia l' anna scorso 1823, pagina 272. Se cotesti scrittori intendono di riferirci la prima edizione dell' opera in quistione, errano grandemente, mentre si può dimostrare che una tale edizione fu fatta nel 1628. Che il Castelli scrivesse questo trattato della misura delle acque correnti l' anno 1625, si rileva da quanto egli dice nella lettera scritta all' illustriss. a reverendiss. monsignor D. Ferrante Cesarini il 12. Agosto 1639; e molto più dal Discorso consegnato li 20. Decembre 1641. al signor Basadonna sopra la laguna di Vanezia, nel quale dice, che dopo di aver scritto quel trattato, e pel *corso di 16. anni* ne ha sempre fatt' uso in affari d' acquo. È ben vero che nella scrittura del Maggio 1641. sulla stessa laguna di Venezia, dice d' aver scritto quel trattata 17. anni fa, per lo che sembrerebbe che fosse stato scritto nel 1624, ma io creda che sia questo un errore di stampa propagato in tutte le edizioni, o un' innavvertenza dell' autora, o cheçchessia. Quello però che risulta senza equivoco si è l' epoca in cui fu fatta la prima edizione. Il Barattieri forma il secondo libro della seconda parte della sua Architettura d' acque, colle *opere che furono pubblicate l' anno* 1628. *dal abbate D. Benedetto Castelli*, tra le quali esiste appunto il trattato in quistione; di più il sig. Bossut nel suo Saggio sulla storia generale delle matematiche (V. la traduzione del professore Andrea Mozzoni, Milano 1802.) alla pag. 137. del tom. 2, così si esprime. *In un piccol trattato che pubblicò sopra questo argomento nel* 1628, *il Castelli spiega*..... Io credo che l' edizione che si cita del 1638. sia piuttosto la seconda; mentre trovo cha il Galilei, nella sua lettera 8. Agosto 1639, scrive al Castelli d' aver ricevuta la ristampa del suo trattato delle acque correnti.

2. Fu questa la prima idea che si ebbe de' tachimetri idraulici, la quale conosciuta che l'ebbe il p. Cabeo fece tosto proponimento di modificarla. Osservò egli che con questo mezzo del Castelli non potevasi conoscere se non la velocità dell'acqua in superficie, e dubitando che cotesta velocità potesse essere diversa dalla superficie al mezzo, e dal mezzo al fondo dell'alveo, immaginò un altro strumento atto a mostrare sì fatte variazioni. Quindi è che nel suo libro delle Meteore stampato la prima volta in Roma l'anno 1646 (*) propone un' asta di legno lunga poca meno dell'altezza dell'acqua, la quale sia gravata di un peso nella sua estremità inferiore, e sia circondata da vesciche piene di vento nell' estremità superiore; onde si mantenga ritta e non discenda a toccare il fondo. Abbandonata quest'asta in balía della corrente sentirà gl' influssi delle diverse velocità della medesima, e quindi la velocità sua sarà quella cui debbe attribuirsi all' acqua, che la trasporta.

3. Non piacque totalmente al Barattieri questo concetto del p. Cabeo. Dubitò egli che per l' aggiunta del peso, e per la leggerezza dell' estremità superiore, potesse quest' asta camminar di traverso, e non rittamente. Ond' è che nella sua Architettura d' acque, e precisamente nella parte seconda stampata a Piacenza l' anno 1663, propone di sostituire alle vesciche del Cabeo una tavoletta di legno, colla quale l' asta nel suo cammino si mantenga ritta, e perpendicolare alla superficie della corrente.

4. Con questi metodi del p. Cabeo e del Barattieri, si cercava di conoscere una velocità media fra tutte quelle che hanno luogo dalla superficie al fondo dell' alveo. Ma gli Idrometri che venner dippoi, cercarono di determinare meccanicamente, con qual legge variavano coteste velocità, allo scopo di ottenere dalla sperienza un tipo sicuro e fedele, onde correggere o confermare i risultamenti delle teorie. Erano in due divisi i pareri degli Idrometri, intorno alla scala delle velocità di una corrente, o sia intorno alla legge con cui variano coteste velocità dalla superficie al fondo. Il Castelli, che scrisse nel 1642. il libro secondo del suo trattato sulla misura delle acque,

(*) Allorchè citeremo cotesto libro, nomineremo l'epoca del 1686; ma questa non è certamente la prima edizione. Infatti come potrebbe averla veduta il Barattieri, che pubblicò la seconda parte della sua Arch. nel 1663? Già è noto che il Cabeo morì in Genova nel 1650; e leggesi nella stessa edizione del 1686, che nel dì 8. Novembre 1644, il p. Muzio Vitellesco preposto generale della Società di Gesù, concesse al Cabeo di pubblicare la sua opera. Che la prima edizione sia del 1646. lo impariamo dal tomo IX. della Biografia più sopra citata pag. 17, in cui leggesi, che il Cabeo pubblicò in quest' anno la sua opera intitolata = *In quatuor libros Meteorologicorum Aristoteles commentaria ec.* = che fu poscia ristampata nel 1686 con alcun cambiamento nel titolo.

correnti, il quale fu poscia stampato nel 1660, sedici anni dopo la morte di lui; volea che codeste velocità fossero proporzionali alle altezze vive dell' acqua; ed il Guglielmini, 30. anni dopo, nel libro secondo della sua opera sullo stesso argomento, disse che si fatte velocità erano in ragione sudduplicata delle altezze medesime. Egli cercò di provare cotesta proposizione col mezzo della sperienza, immaginando uno strumento, atto a misurare la velocità di una corrente, a diverse profondità sotto la superficie. Cotesto strumento consiste in una palla poco più pesante dell' acqua, la quale sospesa ad un filo flessibile ed immersa nell' acqua stagnante si mantiene in situazione verticale; ma tuffata in una corrente, si osserva che il filo devia dal perpendicolo: dalla quantità di questa deviazione si deduce la velocità della corrente, siccome diremo a suo luogo. Le sperienze, che con si fatto strumento sono state fin' ora istituite, sebbene abbiano in qualche modo confermata la proposizione del Guglielmini, sono state riconosciute di tale falaccia, che i loro risultamenti sono riguardati siccome erronei, ed inesatti.

5. Nel tempo che il Guglielmini pubblicava in Italia questa sua invenzione (nel 1690), De-la-Hire in Francia ne pubblicava un' altra di Mariotte, stampando il trattato di lui, sul moto delle acque, sei anni dopo la morte di quest' illustre scrittore. Se non che mentre il Guglielmini colla sua invenzione tenta di scoprire la legge delle velocità dalla superficie al fondo dell' alveo, il Mariotte si contenta di verificare se le velocità della superficie al fondo, crescono, o diminuiscono. Vedremo più innanzi, come un' altro scrittore Italiano abbia saputo profittare di questa invenzione di Mariotte, onde scoprire quella legge, che forma lo scopo delle ricerche del Guglielmini.

Consiste pertanto l' invenzione di che si parla, in due palle di cera, unite fra loro da un sottil filo flessibile, delle quali una è resa più pesante dell' acqua, mercè alcuni corpiciuoli eterogenei, introdotti nel centro della medesima. Si abbandona lo strumento in balia della corrente: la palla più pesante andrà verso il fondo, per quanto il comporta la lunghezza del filo che le unisce, la più leggera sta a galla. Quella delle due palle, che precede l' altra indica il luogo ove la velocità dell' acqua è maggiore; e così si conosce se è maggiore verso la superficie, o verso il fondo.

6. Tornando ora alle invenzioni Italiane, dirò che il Guglielmini avea proposto di misurare la deviazione del filo dal perpendicolo, per mezzo di un quadrante, e stimava le velocità dell' acqua, siccome proporzionali alle tangenti di queste deviazioni. L' Ermanno nella sua foronomia alla prop. 41. del lib. 2. approva questo divisamento del Guglielmini, ma vuole che le velocità siano proporzionali alle radici di queste tangenti. Il p. Grandi nel suo trattato sul moto delle

acque correnti, scritto l' anno 1721 e pubblicato la prima volta nella Raccolta d'Autori Italiani che trattano del moto delle acque, edizione di Firenze anno 1723, si studia di sostenere l' opinione del Guglielmini; ma Eustachio Manfredi nella nota 12. del cap. VII. dell' opera di Guglielmini sulla Natura de' fiumi, dimostra egregiamente, che le velocità sono proporzionali alle radici delle tangenti sopra indicate, e con ciò viene a far conoscere l'errore del Guglielmini, e del p. Grandi.

Se piacque all' Ermanno l' uso del quadrante per misurare la declinazione del filo dal perpendicolo, non mancò ch' il credette suscettibile di perfezionamento. Infatti vediamo nel mentovato trattato del p. Grandi, prop. 34. lib. I, che il sig. Giovanni Ceva propose di sostituire al quadrante una squadra a braccia disuguali, la quale si colloca in modo che il braccio più lungo rappresenti la tangente dell' angolo d'inclinazione del filo al perpendicolo, e per mezzo delle divisioni praticate in questo braccio, insegna il p. Grandi di calcolare la relazione delle velocità di una corrente, ne' diversi luoghi in cui è immersa la palla. Vediamo altresì nella prop. 45. dello stesso lib., che lo Zendrini adoperava una specie di compasso di proporzione, l'un gambo del quale si collocava paralello alla suprefície della corrente, e l' altro si alzava di tanto che il filo a cui era attaccato il piombino del perpendicolo, coincidesse con un determinato punto marcato nel primo gambo. Su questo erano incise le divisioni delle tangenti degli angoli di deviazione del filo dal perpendicolo, dalle quali lo Zendrini argomentava la proporzione delle velocità ne' diversi luoghi della corrente.

7. Oltre a questi tentativi, diretti allo scopo di perfezionare lo strumento del Guglielmini, non hanno tralasciato gl' Idrometri di pensare ad altre invenzioni, colla speranza di poter trovare un tachimetro idraulico facile a maneggiarsi, e sicuro ed esatto ne' risultamenti.

Il sig. dottor Giuseppe Antonio Nadi all' occasione della visita generale del Po fatta l' anno 1721, propose un nuovo strumento, al quale dal p. Grandi fu dato il nome di *Fiasca idrometrica*, ma che disgraziatamente fu tosto riconosciuto imperfettissimo. Consiste questo strumento in una casetta di latta di forma paralellepipeda assai più alta che larga, la quale è dovunque ben chiusa. Verso la sommità di una delle sue faccie è praticato un piccol foro circolare che si chiude ed apre col mezzo di un elastro. Nel coperchio di questa casetta sovrasta un sottilissimo tubo, la cui lunghezza viene proporzionata alla profondità della corrente che si vuole esplorare. Da questo tubo sporge un filo di ferro col quale si apre il foro circolare della casetta, il quale poscia si chiude mercè dell' elastro sumentovato. Immerso lo strumento sotto la corrente si apre il foro per

un determinato tempo, e dalla quantità d'acqua introdotta si deduce il rapporto delle velocità. Varj furono gli sperimenti istituiti con sì fatto strumento, ma così vaghi ne' loro risultamenti, che si dovette conclndere non essere idoneo un tale strumento, alla misura delle velocità delle acque correnti.

Consimile è l'artifizio che ci viene riferito dal p. Grandi nello scolio 2. lib. 1. prop. 46. del suo trattato più volte citato. Fu proposto di munire il foro circolare della cassetta poc'anzi descritta, d'un sottil cannellino, col quale entrava l'acqua nella medesima a modo di getto parabolico. Questo getto dovea urtare contro un' assicella inserita dentro pel coperchio della cassetta, e posta verticalmente dirimpetto al foro, la quale poteva levarsi e riporsi a piacimento. In essa assicella notavasi il punto a cui corrispondeva l' orizzontale condotta pel foro; si conosceva il punto in cui dal getto veniva bagnata, e si argomentava che la velocità della corrente fosse in ragion sudduplicata della distanza di questi punti. Considerando le diverse difficoltà che s' incontrano nel determinare e distinguere il vero punto in cui il getto batte l'assicella, si temette del buon esito dello sperimento, e perciò un tale artifizio non fu messo neppure alla prova. Il p. Grandi dice di non voler *disimularlo potendo essere, che altri, meglio speculandovi sopra, lo perfezionassero;* ma io credo che questo metodo, in un con quello del Nadi, siano tanto lontani dallo scopo a cui mirano, che non vi sarà, come pare non vi sia stato finora, alcuno che vi pensi.

8. Fu nel 1732. che il signor Pitot in Francia, propose di misurare le velocità di una corrente a diverse profondità sotto la superficie, mercè di uno strumento formato da due tubi di vetro, l' uno retto e l' altro ricurvo. Immerso questo strumento nella corrente in modo che la bocca del tubo ricurvo fosse volta contro la medesima, l'acqua nel primo si disponeva all' altezza del livello esteriore, nel secondo saliva a maggiore altezza. Misuravasi la differenza del livello dell' acqua ne' due tubi, e quant' era questa differenza, altrettanto stimavasi essere quell' altezza da cui cadendo un grave nel voto acquisterebbe la velocità propria della corrente che investe la bocca del tubo.

Vedremo a suo luogo che il vero uso di questa macchinetta è alcun poco diverso dal precedente; allora mostreremo altresì i pregj, e gli inconvenienti della medesima. Per ora ci contenteremo di riferire, che Belidor in Francia commendò tanto quest' invenzione di Pitot, che sembrava non si potesse aspettare di meglio: pure ad onta di queste commendazioni i nostri Italiani Manfredi e Zendrini si mostrarono di tutt' altro parere, e rimisero il giudizio definitivo all' inappellabile tribunale della sperienza.

9. Convien dire però, che anche gl' Idrometri stranieri s'accorgessero degl' inconvenienti che seco trae questa macchinetta, giacchè s'applicarono ad altri ritrovamenti. Infatti trovo negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1750. (pag. 169. della parte storica), che il corrispondente sig. Brouckner ha presentata una macchina propria a misurare la velocità dell' acqua, e questa si dice essere simile a quella inventata molto prima dal sig. Dubuisson pel medesimo uso. Leggesi nel citato luogo, che la macchina di quest' ultimo è inserita nel tomo 6. pag. 87. della raccolta di macchine approvate dall' Accademia; che è una specie di odometro; e che quella di Brouckner è più perfetta. A me non è stato dato di vedere questa Raccolta, e perciò non posso dare alcuna idea dell' odometro di Dubuisson, e molto meno di quello di Brouckner. Converrà quindi ch' io mi restringa ad indicare il nome degli Autori di queste macchinette, e l' epoca nella quale furono pubblicate.

Lo stesso mi resterà a fare di un altro tachimetro idraulico cui trovo citato in un opuscolo di Ximenes, del quale fra poco mi conviene parlare; ed è quello immaginato da Saverien, ed inserito nella sua opera che ha per titolo *L' art de mesurer sur Mer ec.*, stampata a Parigi l' anno 1750. Per quanto abbia fatto onde trovare quest' opera, non mi è stato possibile di rinvenirla, ond' è che anche di questa macchinetta ci dovremo contentare di accennarla.

10. Non solo gli stranieri, ma gl' Italiani ancora, e fors' anche con maggiore successo pensavano incessantemente a perfezionare cotesto ramo d' idrometria; chi immaginando nuove macchine, chi cercando di perfezionare le conosciute, e vi fu anche chi tentò di conseguire l' uno e l' altro.

Fra questi ultimi debbe annoverarsi per primo il p. Leonardo Ximenes, il quale nel suo Opuscolo che porta per titolo, *Dissertazione meccanica di due strumenti che possono servire alla giusta stima del viaggio Marittimo, e delle velocità delle acque e de' venti*, stampato in Firenze l' anno 1752, riferisce un suo pensamento onde modificare il quadrante di Guglielmini, e da due nuovi metodi per far uso della palla a pendolo, senza temere gli inconvenienti che s' incontrano ne' metodi conosciuti.

La modificazione del quadrante è come segue. Si circoscrive al medesimo un quadrato, che avrà due raggi e due tangenti per lati; e s' incidono in questi ultimi le parti millesime del raggio, onde misurare con esse la declinazione del filo dal perpendicolo. Sono pur' anche incise in questi lati medesimi, le velocità corrispondenti alle diverse declinazioni del filo, le quali sono state da Ximenes calcolate per una palla del diametro di 3. pollici, la cui gravità specifica sia doppia di quella dell' acqua. Volendo poi far uso di una palla di maggior

diametro, lasciando intatte le altre circostanze, le velocità che leggonsi nel quadrante debbono modificarsi, ed egli dimostra che coteste velocità sono come le radici de' diametri della palla, cosicchè ad un globo col diametro subquadruplo del normale corrisponde una velocità suddupla di quella che leggesi nel quadrante, e per un globo del diametro quadruplo del normale la velocità sarà doppia. Si vede però il vantaggio grandissimo che si ritrarrebbe da questo modo di adoperare il quadrante di Guglielmini; mentre con esso si determina la velocità assoluta della corrente, che coi metodi precedenti non si avea che la relativa. Commendevole adunque sarebbe per questo riguardo la modificazione di Ximenes; e lo sarebbe molto di più, se la teoria sulla quale è fondata non fosse sbagliata. Di ciò parleremo a suo luogo.

131. Non ostante che con questa modificazione siasi di molto perfezionato l' uso del quadrante, non lascia però di avere alcuni inconvenienti che lo mettono in qualche diffidenza. E per tacere degli altri il più ragguardevole è quello della curvatura in che si dispone il filo sott' acqua, la quale al dire dello stesso Ximenes, *può introdurre un errore, che non è infinitesimo*. Propone egli quindi un altro strumento *di facilità, e di accuratezza maggiore*, di cui dice essergli venuto il pensiero nello stendere la teoria del quadrante, e si meraviglia, che essendo così ovvia e facile l' idea di questo strumento, non sia passata per l' animo d' alcuno fra tanti *autori perspicacissimi che sulla stessa materia hanno consumato qualche studio*. Lo strumento di che si ragiona, è una specie di stadera a molla, la quale consiste in un cilindro cavo interiormente, e chiuso da una sua estremità. In questa cavità s' introduce una molla spirale cilindrica, l' un capo della quale è fissa nel fondo del cilindro anzidetto, l' altro porta un secondo cilindretto su cui sono incise le divisioni corrispondenti a' diversi pesi conosciuti; sono tali le dimensioni del cilindretto e della molla, che nel loro stato naturale, senza che nessuna forza li tragga, occupano tutta intera la cavità del primo cilindro. A questo cilindretto è sospesa la palla attaccata ad un filo sottile e flessibile. Si sospende ad un punto fisso l' estremità del primo cilindro, e s' immerge la palla nell' acqua a quella profondità che si desidera. L' urto della corrente contro la palla inclinerà lo strumento, e forzerà la molla a svilupparsi sicchè sorta dal primo cilindro una parte del secondo. Le divisioni di questo, che saranno per tal modo scoperte, indicheranno il peso corrispondente allo sforzo dell' acqua contro la palla, dal qual peso si deduce poscia la velocità della corrente, dietro la teoria delle resistenze de' corpi esposti all' urto della medesima. Preparato così lo strumento, ognun vede essere a portata di tutti l' uso del medesimo, e se non fossero

gravi inconvenienti, che a mio avviso sono inseparabili, e de' quali ragionerò a suo luogo, lo vedremmo forse adoperare quotidianamente.

12. Meno imperfetto sebbene più complicato, sembrami l'altro strumento proposto dal Ximenes nel citato Opuscolo. Consiste questo in uno degli ordinarj castelli da orologio, nel tamburo del quale è introdotta una molla, ed è accavalata una fune che porta la palla. Nel roteggio di questo castello sonovi tre assi ciascun de' quali porta un indice nella sua estremità, che indica il numero delle rivoluzioni dell'asse. La molla è di tale sperimentata energia, che per un dato peso sostituito alla palla, fa compiere al tamburo un dato numero di rivoluzioni, ond'è che col variare di questo peso varia pur anche il numero delle rivoluzioni, e conoscendosi queste si deduce viceversa il peso che le produsse. Ora queste rivoluzioni son conte dagli indici sumentovati; dunque questo apparecchio è atto a mostrarci in peso, lo sforzo dell'acqua contro la palla: e conoscendosi questo sforzo si determina facilmente la velocità corrispondente, come abbiamo detto poc'anzi. Se non fossero i molti attriti a cui va soggetta questa macchinetta, io la crederei meritevole dell'attenzione degli Idrometri; pur tuttavia non sarei lontano dal proporre che si assoggettasse alla prova, che forse nello sperimentarla si potrebbe scoprirne qualche perfezionamento.

13. Siccome poi nella pratica idrometria basta sovente il conoscere la velocità media di una corrente; così il p. Lecchi s'accinse a perfezionare lo strumento del Cabeo e del Barattieri, che, come vedemmo, a questo solo scopo fu immaginato. A tale intendimento pertanto, nell'occasione che ebbe di istituire delle sperienze nel fiume Muzza presso Lodi-Vecchio, all'oggetto d'indagare l'origine di que' vortici co' quali la corrente scalzava, ed abbatteva un grande sostegno costruito entro quel fiume, si determinò di adoperare un'asta cilindrica la cui uniforme grossezza sia maggiore di quella fino allora adoperata, e gravava una delle estremità di quest'asta di un peso, per assicurarsi che lo strumento si regesse verticalmente: questo peso poi, e la grossezza dell'asta doveano esser tali, che se l'asta prendeva alcun piegamento, riescisse questo di cotal leggerezza, da potersi trascurare come cosa di niun conto. Cotesto perfezionamento dell'asta del Cabeo, e del Barattieri, fu dal p. Lecchi pubblicato nel 1758, in una sua Dissertazione sulle origini del rovinoso sostegno del fiume Muzza poc'anzi indicato, e fu riportato ancora nella sua Idrostatica stampata nel 1765, là dove parla del modo di determinare prossimamente la velocità media di una corrente.

14. Collocherò in questo luogo l'invenzione della *Ruota* per misurare la velocità nella superficie di una corrente, giacchè non ho trovato autore che ne parli prima di Micheletti, cioè prima dell'anno

1767, nel quale pubblicò il primo tomo de' suoi Sperimenti, in cui è inserita la descrizione, e l'uso di tale strumento. Anche Dubuat ne' suoi Principj d' Idraulica, ne descrive una, fatta costruire da esso lui; ma questa sua opera vide la luce la prima volta l' anno 1779, e non credo che in questa prima impressione neppure si parli di cotesta macchinetta. Fu nel 1786. che riprodusse cotesti suoi principj Idraulici, riferendo quegli sperimenti, che colla protezione, ed incoraggiamento del Governo gli fu dato di istituire, e ne' quali dovette aver bisogno di adoperare la macchinetta, che in sì fatta edizione trovasi descritta.

Comunque ciò sia, la ruota, o molinetto (siccome la chiama Dubuat) è una piccola e leggera ruota a palmette, la quale gira attorno il proprio asse, con tutta la possibile agilità. È sostenuta questa ruota da un telaio, col quale si alza e si abbassa a piacimento, volendo far uso della medesima sopra una data corrente. Dal numero de' giri ch' essa compie in un dato tempo, si deduce la velocità della corrente nel luogo in cui essa investe le palmette della ruota. Ognun vede come con questo strumento si può conoscere la velocità superficiale dell' acqua in qualunque punto della proposta sezione; lo che non s' ottiene col galleggiante del Castelli, il quale non può indicare esattamente altra velocità che quella del filone, siccome ne avvertì il chiariss. Manfredi nella sua nota al Guglielmini, che abbiamo citata al num. 6.

15. Ma tornando alle macchinette immaginate per esplorare la velocità ne' diversi strati di una corrente, conviene quivi ricordare quella che immaginò e descrisse il sig. Lorgna, nelle sue Memorie intorno alle acque correnti, l' anno 1777. Un travicello di legno, qualche piede più lungo della profondità dell' acqua, e graduato, viene fermato nel fondo dell' alveo. In questo travicello è praticata una scanalatura da potervi assettare un cannoncino vuoto di lata o di legno, il quale porti una girella di metallo mobilissima intorno al proprio asse. Un lungo filo flessibile porta appeso ad un capo (diviso in tre), un semiglobo di legno reso del peso specifico dell' acqua, l' altro capo del filo, passando prima per la girella e pel vano del cannoncino, viene fermato nell' estremità del braccio più corto di una stadera, la quale oltre all' ordinario contrappeso, porta una lance da collocarvi le minuzie di peso necessarie all' equilibrio. Urtando la corrente contro la faccia piana del semiglobo, il peso indicato dalla stadera mostra l' urto dell' acqua contro il medesimo, dal quale si deduce poscia la velocità della corrente, col solito principio delle resistenze de' corpi esposti all' urto di un fluido equabile. Il sig. Lorgna ha suggerito di adoperare un semiglobo, perchè non conosceva a *qual superficie piana equivalga la superficie percossa della*

sfera; ed urtando la corrente il circolo massimo di esso globo si è avvisato che l' urto eguagli il peso di un prisma d' acqua che avendo per base la superficie urtata abbia per altezza, quella dovuta alla velocità dell' urto. Ora però si può far uso anche di una sfera intera, poichè l'esperienza ci ha fatto conoscere che l' urto dell' acqua contro la medesima, equivale alla metà di quello che soffrirebbe il suo circolo massimo.

Non mi fermerò a parlare degli inconvenienti che si presentano nell' uso di questa macchinetta, riserbandomi di farne parola nella seconda parte di questo mio scritto, nella quale di tutti i tachimetri idraulici dirò il mio qualsiasi sentimento.

16. Discenderò piuttosto a mostrare la pretesa invenzione del sig. Teodoro Augusto Mann Inglese, il quale nel suo trattato sui fiumi e canali, inserito nelle transazioni filosofiche di Londra per l' anno 1779, insegna il miglior modo e più semplice, per misurare la velocità di un'acqua corrente. Consiste cotesto suo metodo nel far uso di un cilindro di legno, secco e leggero, alquanto più breve della profondità dell' acqua; il quale in una delle sue estremità è gravato di pesi sicchè immerso nell' acqua stagnante si mantenga ritto perpendicolarmente, e coll' estremità superiore rada il livello dell' acqua. Il tutto conformemente a quanto prescrive il p. Lecchi, a riserva della grossezza del cilindro cui il sig. Mann lascia al totale arbitrio dello sperimentatore.

17. La memoria del sig. Mann fu letta all' Accademia Reale delle Scienze di Londra nel Giugno dell' anno 1779; e nel Settembre di questo stesso anno il sig. Ganthey in Francia scrisse quella, fra le sue memorie sui Canali di navigazione, nella quale è descritta una sua invenzione sul modo di misurare la velocità di una corrente. Ma dello scrittore Inglese fu pubblicato lo scritto nello stesso anno 1779, mentre dello scrittore Francese non furono pubblicate le Memorie, se non nel 1816, per cura del suo nipote il sig. Navier.

Consiste l' invenzione Francese in una paletta rettangolare di ferro bianco, munita di un' asta, che gira attorno di un' asse collocato nella metà della sua lunghezza. Con quest' asse si unisce alla precedente un' altr' asta, la quale porta nella sua estremità superiore un arco di circolo, le cui divisioni mostrano l' urto della corrente contro la paletta, corrispondente ad una conosciuta velocità. Si legano fra loro queste due aste mercè di un' elastro, il quale spiega la sua forza allorchè la paletta è premuta dall' urto della corrente. Si deve procurare che cotesta paletta si mantenga in situazione verticale, ed allora le divisioni dell' arco di circolo, mostrano la velocità con cui è urtata dalla corrente.

18. Siamo ora giunti all' epoca in cui il sig. Ximenes pubblicò le

sue nuove sperienze; voglio dire all' epoca del 1780. Tre sono i metodi da questo scrittore immaginati, ed inseriti di questa nuova sua opera, per misurare le velocità di una corrente, sebbene di un solo si faccia parola, dagli Scrittori che trattano di questo argomento.

La prima di sì fatte invenzioni è quella che nel suo primo nascere ebbe molta fama e molta voga, ma che nel progresso incontrò la sorte degli altri tachimetri idraulici. Viene ora conosciuta sotto il nome di *Ventola di Ximenes*, perchè costituita da un' asse verticale agirantesi attorno due perni fissi, il quale porta una lastra o ventola rettangolare, movibile di su in giù, lungo l' asse medesimo. Nell' estremità superiore di quest' asse, è infissa una ruota che gira con esso, ed alla quale è accavallata una fune, che passando poscia per un' agilissima puleggia, porta un peso nella sua estremità. Si dispone la ventola in modo che riceva l' urto della corrente direttamente, e si osserva qual peso è necessario per reggere la ventola in quella situazione; da questo peso si deduce la velocità della corrente, siccome abbiamo altre volte indicato.

La seconda macchinetta che quivi ci descrive il p. Ximenes, debbe servire a misurare la velocità dell' acqua in superficie, tanto nel filone, che verso le sponde. Consiste questa in un telaio di legno di forma rettangolare, ed in una lastra pure rettangolare, ch' egli chiama *Valvola*, la quale s' aggira liberamente attorno uno de' suoi lembi, pel quale è fissamente attaccata nel telaio anzidetto. Nel prolungamento di uno de' lati verticali della valvola, è collocata una freccia, colla quale si misura l' inclinazione di essa valvola al perpendicolo. Da questa inclinazione si deduce la velocità dalla corrente, in un modo analogo al quadrante di Guglielmini.

La terza ed ultima invenzione inserita in questo scritto, è una modificazione della precedente, colla quale si cerca di esplorare la velocità della corrente anche negli strati più profondi. Si assegna al telaio una lunghezza proporzionale alla profondità dell'acqua, e si fa girare dall' alto al basso entro due scanalature praticate su due collonne verticali e parallele, fermate stabilmente nel fondo dell' alveo. La velocità degli strati che urtano la valvola, si può dedurre o dall' angolo d' inclinazione, come nel caso precedente, o da un peso che faccia equilibrio coll' urto della corrente, mantenendo la valvola in situazione verticale.

19. Quattro anni dopo la pubblicazione delle invenzioni di Ximenes, cui abbiamo descritte nel numero precedente, il sig. Teodoro Bonati, idraulico Ferrarese di molto grido, cercò di riprodurre l' asta del Cabeo, del Barattieri, del Lecchi, e del Mann. Vuole quest' illustre scrittore, che l' asta sia cilindrica e gravata nella sua

estremità inferiore di tal peso, che sporga fuori dell' acqua, non uno stilo od una verga, ma porzione dell' asta medesima. Il Bonati poi ha cercato di scoprire con essa la scala delle velocità, mercè di una teoria molto giudiziosa. Anche il sig. professore Giuseppe Venturoli Bolognese, si è applicato con molta lode alla teoria di questo tachimetro idraulico del Bonati: ma i credo che io loro calcoli siano vere speculazioni teoriche, le quali nella pratica poco o nulla si verifichino. A suo luogo ne diremo le ragioni, e mostreremo che anche il sig. Venturoli non la pensa diversamente.

20. Mi occorre quivi descrivere uno strumento immaginato verso l' anno 1790. dall' ingegnere Tedesco Woltmann, il quale assai più tardi venne in cognizione degli Italiani. È questo lo strumento a cui in Tedesco è stato dato il nome di *Strom messer* (misuratore delle correnti); ed in Francese quello di *Rhèometre* (Reometro). Ad esso però conviene il nome generico di tachimetro idraulico.

Consiste cotesto strumento in un albero orizzontale girevole su due perni, nel quale sta infisso un piccolo volante guernito di due palette rettangolari, i cui piani sono obbliqui alla direzione dell' albero. Mediante un' antenna, fermata stabilmente nel fondo della corrente, si fissa lo strumento a quella profondità che si vuole, collocandolo in modo che la direzione della corrente coincida con quella dell' albero. L' acqua urtando le palette mette in giro il volante, e mediante una vite perpetua infissa nell' albero, si da movimento a due ruote dentate, le quali, a similitudine del roteggio di un orologio, muovono due indici, che mostrano il numero delle rivoluzioni del volante. Col mezzo di un elastro e di una funicella che sporge fuori dell' acqua, si leva il roteggio dal contatto colla vite perpetua, e per tal modo si calcolano i giri del volante in un determinato tempo; e conosciuta la velocità di questo, si viene a calcolare la richiesta velocità della corrente, mercè di una formola dedotta dalla teoria di questo movimento.

21. Contro l' uso dello strumento perfezionato dal Bonati, muove alcune difficoltà il p. Ferrari Bernabita, fra le quali quella pur anche, che non possa servire a determinare la scala delle velocità. Conoscendo poi il vantaggio grandissimo che ne ridonderebbe alla scienza delle acque se si potesse determinare cotesta legge delle velocità; propone egli stesso un nuovo strumento, che servir possa all' intento meglio di tutti gli altri fino a quell' epoca conosciuti, ma disgraziatamente d' assai s' allontana allo scopo cui mira. Cotesto strumento, in un coi dubbj poch' anzi mentovati, trovansi inseriti nelle sue Dissertazioni Idrauliche, pubblicate l' anno 1797; e viene costituito da un pendolo formato di un' asta cilindrica sospesa ad un filo flessibile, attaccato ad un punto fisso. L' asta debb' essere immersa nella

corrente in modo, che la sua estremità superiore rada la superficie dell'acqua: essa è formata di più pezzi piccoli a piacimento, i quali s'uniscono fra loro a vite. Si sperimenta prima uno di cotesti pezzi, poi due, poi tre ec., ed in ciascuna immersione si tien conto della declinazione del filo dal perpendicolo, dalla quale poscia, mercè alcune formole dall'autore calcolate, si viene a determinare la velocità di quegli strati acquei, che investono ciascuna porzione dell'asta.

Cotesto metodo che propone il p. Ferrari, siccome il migliore di tutti, è fallace quanto possa esserlo quello di Guglielmini. Bonati fu il primo a mostrarne gli errori, e noi pure li riferiremo a tempo e luogo.

22. Il Sig. Venturoli, che conobbe anch'esso le eccezioni a cui andava soggetta l'invenzione del p. Ferrari, propose all'Accademia delle Scienze di Bologna, l'anno medesimo 1797. un suo particolare strumento, di cui diede poscia la teoria e l'uso, in una sua dotta memoria consegnata alla Società Italiana li 15. Luglio 1808, e pubblicata nel Tomo XIV. di cotesta società l'anno seguente 1809.

Mentre piacque agli Idrometri di denominare lo strumento del Guglielmini = *pendolo idrometrico semplice* = piacque al Sig. Venturoli di attribuire alla sua invenzione il nome di = *pendolo idrometrico composto* : = e ciò forse perchè passa fra questi due pendoli idrometrici, pressappoco quella stessa differenza che si ravvisa in meccanica fra pendolo semplice e pendolo composto. Qualunque però sia la cagione di questa denominazione, lo strumento del Sig. Venturoli è formato da una semplice asta o canna cilindrica sospesa e girevole attorno un punto fisso, la quale s'immerge a poco a poco sotto il pelo della corrente, ed in ciascuna immersione si tiene conto della sua declinazione dalla verticale. Dal progresso di queste declinazioni, si argomenta la legge con cui varia la velocità ne' diversi strati di una corrente, mercè di una teoria semplice, ed ingegnosa.

23. Cinque anni prima della pubblicazione di questo strumento, vale a dire nel 1804, il sig. John Leslie pubblicò in Londra un suo *anemometro*, il quale secondo lui, può anche servire di tachimetro idraulico.

Cotesto strumento non è altra cosa che un termometro col bulbo alcun poco più grosso dell'ordinario. Volendo esplorare con sì fatto strumento, la velocità di un'acqua corrente, si adopera nel modo seguente. Si nota la differenza fra la temperatura dell'acqua stagnante e quella di un altro corpo più caldo, p. e. della palma della mano; e poscia si mette lo strumento a raffreddare nel fluido di prima, notando il tempo che il fluido termometrico impiega a discendere per

la metà dell' intervallo fra le temperature osservate. Si ripete inoltre le stessa operazione, colla sola differenza che lo strumento si mette a raffreddare nella corrente di che vuol conoscersi la velocità, e si nota anche qui lo stesso tempo del raffreddamento. Dal rapporto fra questi due tempi si deduce la velocità della corrente, con una regola semplicissima, cui mostreremo a suo luogo.

Sembra a me, che questo strumento non possa servire che a misurare la velocità dell' acqua in superficie. Pur tuttavia quando fosse bene studiato, e si avesse certezza della sua buona riescita, sarebbe lo strumento più acconcio per misurare le degradazioni delle velocità dal filone alle sponde.

24. Gl' Italiani, cui sanno d'avere il vanto d'essere stati i fondatori della Scienza delle acque, vorrebbero pur quello ancora, d'averla arricchita di un prezioso strumento atto a mostrare la legge delle velocità di qualsivoglia corrente, e perciò più che mai s' affaticano per rinvenirlo: ne si vede ritrovamento proveniente da qualsivoglia nazione straniera, che non ne succeda uno, o più altri, di autore Italiano. E in fatti nell' anno successivo al ritrovamento del sig. Leslie, l' egregio sig. Cav. Vincenzio Brunacci, presentò all' Istituto Nazionale Italiano una sua Memoria, in cui propone un nuovo strumento per misurare le velocità delle acque correnti, al dissotto della superficie. Cotesta Memoria ricevuta ai 26. d' Ottobre 1805, fu poscia stampata nel tomo 1.° parte 2.ª delle Memorie di quell' Istituto, l' anno 1806.

A cotesto strumento l' autore dà il nome di *Galleggiante composto*. Viene esso formato da due palle di eguale o diverso diametro, ma di gravità specifica differente. Queste palle sono unite fra loro da un filo o cordicella sottile, nel modo stesso che fu praticato dal Mariotte (5) per esplorare se una corrente sia più veloce verso il fondo, o verso la superficie. Determinata con un galleggiante semplice la velocità della corrente in superficie, e misurata opportunamente la velocità equabile dello strumento si viene tosto in cognizione della velocità che ha la corrente nel luogo in cui trovasi la palla più pesante, mercè di una formola semplicissima dedotta dalla teoria di questo tachimetro.

25. Nel tempo stesso che pubblicavasi dall' Istituto Nazionale Italiano il ritrovamento del Cav. Brunacci; la Società Italiana ricevette i tentativi del sig. Francesco Focacci, intorno al modo d' investigare le velocità di una corrente, che furono poscia pubblicati nel 1807.

Adopera il signor Focacci nelle sue ricerche, due aste di legno di lunghezza diseguale, delle quali una è conficcata nel fondo del canale mercè di alcune punte di ferro, l' altra è scorrevole di sù in giù, e si mantiene aderente alla prima col mezzo di due staffe da cui è

abbracciata. Quest' ultima asta porta nella sua estremità inferiore una cassetta paralellepipeda, alla quale sono adattati due tubi cilindrici posti orizzontalmente e nella direzione della corrente, i quali comunicano coll' interno della cassetta per due faccie opposte della medesima. Nel vano di essa cassetta è fisso un vette angolato e mobile attorno di un asse, il quale è destinato a ricevere la percossa della corrente. Si equilibra l' urto della medesima contro il vette, mercè alcuni pesi posti nel piatto di una bilancia che sta fuori dell' acqua, e che comunica col vette mercè di un filo di ferro che lega le estremità dell' uno e dell' altra. Questo filo è difeso dagli urti della corrente, col farlo passare attraverso di un sottile tubo, che sporge fuori dell' acqua, ed è saldato nella faccia superiore della cassetta. Le velocità della corrente ne' diversi strati ne' quali s' immerge la cassetta medesima, vengono dedotte dai pesi che fanno equilibrio colle pressioni sofferte dal vette.

Per variare gli sperimenti, il sig. Focacci, ha sostituito al vette della cassetta, un molinello posto orizzontalmente, il quale colla sua asta verticale (difesa dagli urti della corrente come il filo precedente) sporge fuori dell' acqua, e porta nella sua estremità superiore un circolo graduato, ed una lancetta, per calcolare il numero delle rivoluzioni compiute in un dato tempo dal molinello medesimo. Dal numero di questi giri si deducono le velocità della corrente nelle sue diverse profondità.

24. Un' altra invenzione Italiana l' abbiamo nello strumento, che il sig. ingegnere Tommaso Barbantini pubblicò col suo Opuscolo stampato in Bologna l' anno 1814, e a cui diede il nome di *Contrappeso Idraulico*.

Una zattera di legno di figura rettangolare, galleggia alla superficie, e viene fermata da tre ancore, onde sia resa immobile per quanto è possibile. Nel mezzo di questa zattera è praticata un' apertura per cui passa una lunga asta pertugiata, allo scopo di immergerla a quella profondità che si vuole. Alle due estremità di quest' asta sono fisse due carrucole abbracciate da un filo di seta, o da un nastro, all' estremità superiore del quale è attaccata una bilancia, ed all' estremità inferiore una palla del peso specifico dell' acqua. Questo filo o nastro di seta, debbe introdursi in un tubo cilindrico di metallo, onde non risentasi degli effetti dell' urto della corrente contro l' asta dello strumento. L' acqua urtando la palla esercita uno sforzo proporzionato al quadrato della velocità, ed equilibrandosi questo sforzo col peso collocato nella bilancia, si viene a conoscere con esso la velocità dell' urto, che è la velocità della corrente nel luogo della palla.

Ognuno ravvisa in questo processo del sig. Barbantini, quello stesso

immaginato da Lorgna l'anno 1777 (15). Se non che il sig. Barbantini, siccome vedremo, ha tentato di togliere quegli inconvenienti che potevano render dubbio l'uso di questo strumento, e spetterebbe alla sperienza il decidere se abbia o no, consegnito l'intento. Noi però non tralascieremo di fare, a suo luogo le nostre osservazioni, anche sopra questa pregevole invenzione.

27. A compimento pertanto di questa succinta narrazione storica delle invenzioni per misurare le velocità delle correnti, mi rimane a dire di una semplicissima modificazione del pendolo semplice di Guglielmini, suggerita dal sullodato sig. Venturoli, l'anno 1814.

Non ostante che gl'Idrometri conoscessero i difetti, e la fallacia di cotesto strumento, rincresceva loro moltissimo il doverlo abbandonare, e perciò alcuni si sono adoperati a correggerlo e a perfezionarlo, anzi che immaginarne de' nuovi, persuasi che non può esservi strumento più semplice, ne più spedito di questo; e fra le non poche modificazioni che abbiamo fin qui annoverate, non ve n'ha certo una che più soddisfi di quella cui ora imprendo brevemente a descrivere.

Invece che il filo, a cui è attaccata la palla sia fisso ad un punto del quadrante, o ad altro, si fa passare per un'agilissima puleggia, ed a questa estremità si sospende un peso atto a mantenere in equilibrio la palla nel luogo ov'è immersa. Da questo peso, con i soliti principj, si deduce la velocità della corrente nelle diverse sue profondità, qualunque d'altronde sia l'incurvamento del filo sott'acqua, e la sua declinazione dal perpendicolo.

Non debbo dissimulare però, che questo processo del sig. Venturoli ha molta analogia con quello di Ximenes dell'anno 1752 (11), quando attaccava il filo ad una stadera a molla, e misurava la velocità della corrente dal peso indicato da questa stadera. Il pregio di questa nuova modificazione del sig. Venturoli, messa a confronto con quella di Ximenes, consiste nella maggiore semplicità dello strumento, e nel minor numero d'inconvenienti cui mostra d'incontrare nell'adoperarlo.

Fin qui della storia delle nostre invenzioni; passiamo a darne un'idea più concisa.

PARTE SECONDA.

Concisa descrizione, uso ed inconvenienti, di tutti i tachimetri idraulici.

28. Tutte le macchinette di che abbiamo parlato nei numeri precedenti, si possono distinguere in due *generi*, poichè altre servono

alla misura delle velocità superficiali, altre delle velocità a diverse profondità sotto la superficie. Ciascuno di questi generi poi, può suddividersi in due *classi*, cioè in *galleggianti*, ed in *fissi*. Noi parlando di ciascuno di questi generi, diremo prima de' galleggianti, e poscia de' fissi, senza serbare altro ordine, rispetto all' epoca de' loro ritrovamenti, essendo già stato mostrato un tal ordine nella parte precedente.

Divideremo quindi questa seconda parte del nostro ragionamento in quattro capitoli. Nel primo parleremo de' galleggianti che servono alla misura della velocità di una corrente, in superficie; nel secondo diremo di que' tachimetri, che pur servono alla misura delle velocità in superficie, ma che a tale scopo si rendono fissi; nel terzo mostreremo que' galleggianti co' quali si è cercato di scoprire la velocità media di una corrente, od anche la scala delle velocità; e finalmente nel quarto esporremo i tentativi co' quali si è cercato di scoprire cotesta legge delle velocità, col mezzo di strumenti fissi.

CAP. I.

De' galleggianti, che servono alla misura della velocità in superficie.

29. Tutti questi galleggianti si riducono in sostanza a quello che propose il Castelli insegnando a misurare la proporzione che esiste fra le erogazioni di due bocche che servir debbono agli usi dell' agricoltura; o delle arti, non variando gli altri che, o nella figura, o nella materia di che sono formati. Ecco le parole colle quali il Castelli ci enuncia la sua invenzione „ si esamini la velocità dell' acqua per le bocche A, e B, (il che si potrà fare tenendo conto „ per quanto spazio sia trasportata dalla corrente una palla di legno, o di altro corpo, che galleggi in un determinato tempo, come sarebbe; v. g. in 50. battute di polso) „ (*).

A questo modo si esprime il Castelli nel suo primo lavoro sulla misura delle acque correnti; e cercando poscia di perfezionare il suo ritrovamento, promise, nella lettera scritta a Monsignore Cesarini li 12. Agosto 1639, di dare un metodo, onde „ misurare il tempo con „ minuzie tali, che si potrà dividere lo spazio d' un' ora in 4. e 6. „ e 8. mila parti senza un minimo errore „ (**). E questo metodo che gli fu insegnato dal suo maestro sig. Galileo Galilei, vedesi

(*) V. *Raccolta d' Autori Italiani* ec. Tom. 3. pag. 103. Bologna, Marsigli 1822.
(**) Luogo citato pag. 244.

riferito al principio del secondo libro del suo trattato, ne' termini seguenti. „ Debbesi prendere un filo lungo tre piedi romani, a capo „ del quale sia appesa una palla di piombo di due, e tre once in „ circa, e tenendo sopra l'altro estremo, si rimuova il piombo dal „ suo perpendicolo un palmo, o più, o meno, e si lasci andare li- „ bero, che farà molte andate, e ritornate, passando e ripassando „ il perpendicolo, avanti che in esso si fermi. Or occorrendo mi- „ surare il tempo che si consuma in qualunque operazione, si deb- „ bano numerare quelle vibrazioni che si fanno, mentre dura l'ope- „ ra, e saranno tanti minuti secondi d'ora, quando però il filo sia „ lungo tre piedi romani, ma ne' fili più corti le vibrazioni sono „ più frequenti, ne' fili più lunghi sono meno frequenti, e tutto „ questo segue sempre, o sia il piombo rimosso dal suo perpendicolo, „ molto o poco, o sia maggiore, o minore il peso del piombo (*) „.

30. La figura sferica ne' galleggianti semplici, non è già esclusiva; ella può essere qualunque. Talvolta si adoperano delle palle, tal'altra de' paralellepipedi, e non è mancato chi ha fatto uso di galleggianti della figura di un cubo. I galleggianti semplici possono anche

---

(*) l. c. pag. 172.

È certamente un errore del Barattieri quello in cui, trascrivendo quasi per intero cotesto metodo del Castelli, dice che il filo colla palla di piombo da esso sostenuta, si debbe accostare all'acquedotto lasciando che il piombo discenda nell'acqua, dove messo dal perpendicolo farà *molte andate, e ritornate, passando, e ripassando quel perpendicolo, avanti che in esso si fermi*. Come potrebbe allora dirsi che il pendolo compie ciascuna oscillazione in un secondo? ed essendo in movimento l'acqua dell'acquedotto, quali oscillazioni farebbe il pendolo in esso immerso? Bisogna dire assolutamente, o che il Barattieri interpretò male il concetto del Castelli, o che il manoscritto da cui attinse questa notizia, era anch'esso sbagliato.

In quanto alla lunghezza del pendolo, che compie le sue vibrazioni in un secondo, ognuno sa, ch'essa varia colla latitudine; e può vedersi nell'altra mia memoria registrata in questo stesso volume, come di fatta larghezza venga calcolata dalla formola

$$\lambda = 0{,}9909 + 0{,}00519 \ \text{sen.}^2 \psi ;$$

cosichè per la latitudine di Firenze sarà $\lambda =$ m.i 0,993384 circa, o siano braccia a panno Fiorentine 1 . 14 . 0 $\frac{47}{50}$. L'autore delle note all'opera del Castelli, assegna a cotesta lunghezza braccia 1 . 14 : 1 $\frac{33}{43}$, ma questa appartiene alla latitudine di Parigi.

Per chi bramasse la lunghezza del pendolo a secondi nella latitudine di Bologna, troverà $\lambda =$ m.i 0,993449 circa, o siano piedi Bolognesi 2 : 7 : 4 $\frac{7}{19}$.

essere di qualunque materia, e le sue dimensioni saranno maggiori pe' grandi fiumi, minori pe' piccoli canali e terrenti.

L'essenziale avvertenza che si debbe avere nell'uso di questi tachimetri idraulici, si è che stiano quasi totalmente immersi nell'acqua, e per distinguere il loro movimento, anche in qualche distanza considerevole, è stato suggerito di infiggervi una leggera e sottile asta verticale tinta di bianco; la quale tutta sporga fuori della corrente.

Oltre al pendolo a secondi, descritto e suggerito dal p. Castelli, si può far uso ancora di un orologio a secondi, ed anche a mezzi secondi, poichè quanto più son piccole le divisioni del tempo, tanto più precisamente si conosce quello, nel quale viene eseguita una qualunque operazione.

L'inconveniente principale di questi tachimetri idraulici si è, che con essi non può aversi con precisione altra velocità che quella del filone (14). Gettati nell'acqua in un punto più vicino alla sponda, essi percorrono delle linee sensibilmente convergenti col filone, e se si lasciassere interamente in balia di loro stessi, si vedrebbero tosto o tardi cader nel medesimo, ed in esso progredire sino alla foce.

CAP. II.

De' tachimetri idraulici fissi, coi quali si misura la velocità di una corrente in superficie.

31. È forse stato questo il motivo che ha indotto gl'Idrometri ad immaginare degli strumenti fissi, anche nella misura delle velocità superficiali. Tre ne abbiamo descritti nella prima parte di questo trattato, 1.° la ruota o molinetto; 2.° la valvola di Ximenes; 3.° il termometro di Leslie. Parliamo partitamente di questi tachimetri.

Il Michelotti ci descrive la ruota o molinetto, colle seguenti parole.

„ Si può conoscere la celerità verso la superficie di un'acqua corrente con una ruota a palmette, (*tav.* 6. *fig.* 1.) che liberamente si aggiri sul suo asse, numerandene le rivoluzioni fatte in un dato tempo; ed avrassi sempre la ragione delle celerità in differenti luoghi di una medesima, o diverse sezioni; e la velocità assoluta ne' canali sensibilmente inclinati, ne' quali l'acqua che precede, non impedisce il libero girare della ruota: perchè essendo noto il diametro, e quindi la circonferenza della ruota, noto il numero delle rivoluzioni fattesi in un tempo anche noto, facilmente trovasi lo spazio, che da un corpo percorrerebbesi in un minuto primo, o secondo di ora con quella velocità, con cui la ruota si

„ aggira, dove possa supporsi il suo moto uguale a quello dell' ac-
„ qua. „

„ La ruota delle nostre sperienze è fatta di sottil lastra di ottone
„ ad otto raggi, lunghi pollici 13 (m.i 0,5519); onde il diametro è
„ di pollici 26 (m.i 0,7038), alla circonferenza si possono adattare
„ 16 palmette lunghe pollici 2. (m.i 0,0541), larghe uno (m.i 0,0271);
„ quindi la circonferenza media, cioè quella, che passa per i cen-
„ tri delle palmette, si fa di pollici 88. (m.i 2,3821). „

„ Alla circonferenza medesima in luogo delle sedici possono adat-
„ tarsi altre palmette otto, lunghe pollici 5 ½ (m.i 0,1489), secondo
„ la regola del sig. Pitot, cioè tali che quando una di esse è verti-
„ calmente immersa, la precedente sia per uscire dall' acqua, e la
„ susseguente per entrarvi (*). Con queste palmette la circonferenza
„ media si fa di pollici 99. (m.i 2,6799). „

„ Il peso della ruota senza palmette è di libbre Torinesi 10 (chil.
„ 3,6884), quello delle 16 palmette insieme è di libbre 1, once 2,
„ ottavi 3, denari 2, e grani 12 (chil. 0,4036); le otto palmet-
„ te più lunghe insieme pesano libbre 1, once 9, ottavi 5, e gra-
„ ni 4 (chil. 0,6519). Fornita colle sue palmette la ruota equili-
„ brasi in ogni situazione verticale.

„ Per diminuire lo stropicciamento dell' asse, questo può farsi gi-
„ rare sopra due cilindretti anch' essi mobili sopra i loro assiciuoli;
„ e per poterne numerare con sicurezza le rivoluzioni, e notarne
„ ancora le parti nei moti più veloci, una delle estremità dell' asse
„ porta un piccolo pignone, che incontrando una piccola ruota den-
„ tata le fa fare una rivoluzione, mentre che la grande ne fa die-
„ ci, e con un indice ne mostra sopra un circolo diviso in dieci
„ parti uguali le rivoluzioni intere, e le decime parti di ciascuna. „

„ Essa ruota vien sostenuta da un telaio, che si alza, e si abbas-
„ sa a piacimento fra due incavi di un piede, che porta tutta la
„ macchinetta. Questo piede è di rovere assai pesante, e che può
„ rendersi più pesante quanto abbisogni. Con ciò la ruota si può a-
„ dattare alla corrente in modo, che le sole palmette s' immergano,
„ e che il tremore del telaio non ne alteri il movimento „ (**).

(*) Pitot stabilisce questa regola nella sua Memoria inserita fra quelle dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1729, registrata alla pag. 253. Egli non parla già di questa macchinetta, ma bensì delle palmette delle ruote de' molini, od altre macchine mosse da una corrente. Michelotti avendo sperimentata la ruota e con sedici, e con otto palmette, siccome suggerisce Pitot, trova che nulla si guadagna da questa disposizione di palmette, e che perciò è indifferente qualunque loro distribuzione.

(**) *Sperimenti Idraulici*. Tom. I. pag. 137.

32. Assai più leggera fu la ruota che adoperò Dubuat nelle sue sperienze pubblicate l'anno 1786 (*). D'essa non avea che 8. palmette, era di abete secchissimo, ed ogni palmetta avewa 3. pollici (m.[1] 0,0812) in quadro di superficie, ed un pollice e mezzo di grossezza (m.[1] 0,0406). Il peso totale dello strumento era di 11. once e 2. grossi (chil. 0,3442), il raggio medio era di pollici 12 (m.[i] 0,3248) in punto, e la sua circonferenza $75^{pol.}$, 43 (m.[i] 2,0416).

Dubuat nulla ci dice, in ordine al modo di notare il numero delle rivoluzioni della ruota, in un dato tempo. Ingegnoso e semplice, è l'artifizio adoperato da Michelotti, ma quello di Brewster mi sembra più complicato, e meno esatto. Infatti, consiste un tal metodo „ nel dare per asse a questa ruota una vite fissa, lungo la quale il „ suo moto di rotazione la trasporta, in un tempo dato, di una „ quantità proporzionale al numero de' giri ch' ella compie nel tem„ po medesimo. Lo spazio così percorso dalla ruota nel senso del suo „ asse è marcato sopra una scala, da un indice chè è fisso a que„ sta ruota, e che si muove con essa. Un altro indice immobile in„ dica le frazioni de' giri sopra una divisione stabilita sulla circon„ ferenza della ruota (**) „. Si vede da questa descrizione, che oltre all' aumentarsi l' attrito della macchinetta, pel moto di traslazione della medesima sopra una vite fissa, resta anche incerto, che possa indicare puntualmente la velocità che si cerca; imperocchè questa velocità non è la stessa in tutti i punti della medesima sezione, e la ruota cangia di sito ad ogni sua rivoluzione.

Se la ruota o molinetto, è preferibile al galleggiante semplice in quanto che è più acconcia a mostrarci la velocità superficiale di una corrente in qualunque punto di una stessa sezione, essa ha poi lo svantaggio di mostrarci questa velocità alcun poco sfigurata, mercè l' inevitabili alterazioni prodotte dall' apparato cui debbe adoperarsi nello sperimento. Se si potesse sospendere la ruota, sì ch' essa non presentasse alla corrente altra superficie che quella delle sue palmette, io direi che non vi fosse strumento più acconcio di questo per misurare sì fatte velocità, ma ne' grandi fiumi ciò rendesi impossibile, e perciò conviene pensare ad altro ritrovamento, se pure sarà possibile trovarne uno che meglio serva de' galleggianti.

33. Ximenes ci porge a quest' oggetto la sua valvola; ma vedremo ch' essa pure non è immune da gravi inconvenienti. Eccone pertanto la descrizione quale ci viene riferita dal suo inventore „ Sia „ ABCD (*tav.* 6. *fig.* 2.) un telaio di legno, che per la sua specifica

(*) *Principes d' Hydrau.* §. 441.
(**) V. Navier, Note all' Archit. Idrau. di Belidor. Tom. I. pag. 357.

„ minor gravità dell' acqua, in essa tengasi a galla. Alla sua metà si stabilisca un' asse di ferro KO, che possa liberamente girare sul concavo de' due rallini di bronzo, collocati in K, O. Al medesimo asse si unisca un quadrilatero di lamiera di ferro KGHO, di quella grossezza, che sarà più adatta al bisogno. La scelta del ferro, o di altra materia di maggiore specifica gravità è necessaria, affinchè la valvola KH col suo rispettivo peso graviti adosso all' asse KO. Se il fluido sarà stagnante, tal valvola penderà liberamente secondo la direzione de' gravi. Ma se il fluido cominci a correre con una data velocità, la valvola devierà dal perpendicolo, e si adatterà ad un piano inclinato KOgh, che sarà maggiore, o minore, secondo che la forza del fluido crescerà o scemerà. L' angolo della valvola sarà misurato in un quadrante KEST, che avrà le sue graduazioni, e che si farà di quel raggio, che renderà più sensibili le frazioni de' gradi „.

„ Una tal macchinetta si farà galleggiare a qualunque punto della superficie del fiume, accostandola, o scostandola dalla ripa destra e sinistra per mezzo di due funi BR, CM „.

„ Accadrà dunque, che la velocità e forza del fiume in quel dato punto farà deviare la valvola con un angolo, che sarà dall' indice manifestato nell' arco ES, dal quale piglieremo argomento della velocità dell' acqua in quel dato punto del fiume „.

„ Volendo nei misurare le grandi velocità delle piene di un fiume, delle quali in vero non abbiamo alcuna idea, e questa dall' altra parte è assai importante, io non credo che vi sia miglior meccanismo di questo. Il suo telaio può farsi di quella grandezza, e stabilità, che piacerà. Il raggio del quadrante similmente potrà ingrandirsi a piacere. I gradi indicati dalla lancetta ancor da lontano si osservano con un buon telescopio. Per mezzo di due canapi sostenuti da sugheri galleggianti, trasportasi la macchinetta sul vero filone del fiume, dove la velocità è massima, e da quel punto accostandola bel bello alla ripa, dalla diminuzione dell' angolo, pigliasi la misura della diminuzione della velocità. Noi non avremo chiara notizia delle portate de' nostri fiumi, se non trasporteremo una volta le nostre sperienze da' piccoli canaletti, dove sono state finora tentate, alla vastità de' fiumi, dove le velocità e le loro degradazioni sono finora assai oscure „ (*).

34. Abbenchè l' autore di questa invenzione mostri d' essere persuaso, che non vi sia meccanismo migliore, e più atto a misurare la velocità della corrente di un fiume alla sua superficie; pur tuttavia,

(*) *Nuove sperienze Idrauliche* ec. §. 138.

a me sembra involuta di molti inconvenienti. In primo luogo io trovo difficile, se non impossibile, il fermare il telaio in modo, ch' ei non oscilli insieme colla valvola, ond' è che la lancetta debb' esser in una continua oscillazione, senza mai indicare una costante inclinazione della valvola medesima. Inoltre le dimensioni che assegna Ximenes a questa valvola sono tali, da lasciar dubitare che le velocità da essa indicate (quand' anche si potessero calcolare), non fossero le superficiali, ma bensì quelle di uno strato sottoposto alla superficie. Infatti l' altezza della valvola che pesca nell' acqua è di soldi 10 (m.[i] 0,2915), e non so come si possa credere che a questa distanza dalla superficie, la velocità si mantenga costante. Come pure io dubiterei, che nel tratto di un braccio (m.[i] 0,5830), qual' è la larghezza cui viene assegnata alla valvola, la velocità dovesse pure variare, per cui essendo la superficie della valvola urtata con maggior forza verso uno de' suoi lembi, che non verso il suo opposto, dovesse inclinarsi alla direzione della corrente, piegando verso il filone del fiume. Si aggiunga di più che esposta alla corrente una macchinetta di queste dimensioni, ed alla foggia che l' autore ne insegna debbe alterare talmente il moto dell' acqua, che la sua velocità non si rimanga quella stessa di prima.

Per queste ragioni io credo, che la valvola di Ximenes soddisfi all' intento, meno della ruota e del galleggiante, e che perciò non meriti d' essere a que' tachimetri idraulici preferita. Più sicuro ed anche più semplice dovrebbe riescire il metodo del sig. Leslie, allorquando molte e ripetute sperienze avessero determinata una regola, per le acque correnti, analoga a quella ch' egli c' insegna per il vento.

35. Il sig. John Leslie nel 1804 pubblicò in Londra una sua memoria col titolo = An experimental enquiry ec. = o sia *Ricerche sperimentali sulla natura e propagazione del calore*, della quale si leggono sette estratti nella Biblioteca Britanica tomi 28, 29, 30, Scienze ed Arti. Il quinto di questi estratti è quello che ci riferisce l' *anemometro* di che si parla, e che dicesi possa anche servire di tachimetro idraulico. Io trascriverò le parole di questo estratto, che descrivono sì fatta invenzione, onde possa ognuno formarsi un' idea del metodo per misurare la velocità del vento, ed applicarlo con ogni studio alla determinazione della velocità dell' acqua in superficie.

L' anemometro del sig. Leslie „ non è altra cosa che un termometro a bulbo un po grosso. Si tiene primieramente sospeso nell' aria tranquilla, e si nota la temperatura ch' egli indica; in seguito, dopo averlo tenuto qualche tempo nella mano, si nota altresì „ il termine in cui giunge; poscia mettendolo a raffredare in luogo

„ difeso dal vento si osserva il tempo che impiega a percorrere la „ metà dell' intervallo compreso fra la temperatura della mano e „ quella dell' aria tranquilla: l' autore chiama quest' intervallo di „ tempo, l' *intervallo fondamentale*. Si ripete l' esperienza facen- „ do raffredare il termometro esposto al vento, e si da il nome di „ *intervallo occasionale* al tempo che impiega il termometro a di- „ scendere per la metà dell' intervallo fra le temperature anzidette. „ Dietro a questi preleminarj si applica la regola segnente. *Divide- „ te l' intervallo fondamentale per l' intervallo occasionale, e l' ec- „ cesso del quoziente sopra l' unità, moltiplicato per* $4\frac{1}{2}$, *esprimerà „ la velocità del vento, in miglia per ora*. Il bulbo dello strumento „ debbe avere più di mezzo pollice (m.[1] 0,0135) di diametro; si può „ riempiere di spirito di vino colorato, ed applicare sul tubo una „ scala, la quale serve a fissare i due termini, ed a dividere il loro „ intervallo in due parti eguali „.

„ Si può applicare lo stesso processo alle acque correnti. L'autore „ dietro alcuni saggi, giudica che la velocità ordinaria del raffredda- „ mento sia raddoppiata dall' impressione di una corrente che scorre „ con una velocità di circa sei pollici (m.[1] 0,1624) per secondo; o „ sia $\frac{1}{3}$ di miglio per ora. Si potrebbe così determinare delle picco- „ lissime velocità; ma siccome l' acqua consuma il calore più velo- „ cemente dell' aria, bisognerebbe che la massa del liquido termo- „ metrico, fosse proporzionatamente maggiore, affine che lo stru- „ mento avesse il grado conveniente di sensibilità „ (*).

36. Se chiamiamo v la velocità del vento, t l' intervallo fonda- mentale, t' l' intervallo occasionale; la regola precedente ci da

$$v = 4\tfrac{1}{2}\left(\frac{t}{t'} - 1\right)$$

Io non so come il Sig. Navier, alla fine della nota più sopra cita- ta, parlando di questo metodo del sig. Leslie dica, che la velocità sembra eguale ad una quantità costante, più una quantità propor- zionale al rapporto de' due tempi osservati; sarebbe allora

$$v = 4\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{t'}\right)$$

risultamento assai diverso dal precedente, che è la fedel traduzione della regola di Leslie.

Opina lo stesso Navier, che le costanti le quali entrano nella for- mola delle velocità, comecchè debbono determinarsi dietro sperienze

(*) *Bibliotheque Britanique* ec. Tom. 29. pag. 101. *Sciences et arts*.

istituite sopra particolari correnti di conosciuta velocità, non possono convenire ad altro termometro che quello adoperato in codeste sperienze, o ad un altro formato delle stesse materie, ed avente le medesime dimensioni. Che che sia di questa opinione che mi par giusta, egli è certo, che molto studio debbe adoperare, chi vuole trar profitto da cotesta invenzione ingegnosissima, la quale quando sia bene stabilita, può esser quella che meglio di tutte l'altre soddisfi, nella misura delle velocità di una corrente, in superficie.

La sola cosa di cui sembrami si possa dubitare, si è, che ne' grandi fiumi un tal metodo sia impraticabile. Imperocchè, in queste grandi e copiose correnti, non possiamo trasferirci da un punto ad un altro della superficie dell' acqua se non sopra di un batello, o di una zattera, e d'altro consimile galleggiante; e questo debbe alterare il moto del fluido in superficie di tal maniera da sfigurarne totalmente la sua velocità. E d'altronde non può immergersi lo strumento nell' acqua a molta distanza di chi lo tiene fra le mani, giacchè appena la mano abbandona il bulbo, questo debb' essere tuffato nella corrente. Adunque nell' uso di questo strumento conviene essere vicini alla superficie dell' acqua, e sopra di un sostegno che non ne alteri il movimento; e però non potrà adoperarsi che nelle correnti di limitata larghezza. Chi scrisse l'estratto della Memoria di Leslie, poc' anzi mentovato, ci dice solamente che è stato proposto per misurare la velocità del vento, o delle acque correnti; ma poi non ci dice se in ordine a queste ultime il suo inventore si contenti di misurare le velocità superficiali, o se voglia ancora determinare le velocità degli strati più profondi. Pare a me che con sì fatto metodo non possa sperimentarsi che la velocità dell' acqua in superficie. Imperocchè come costruire un termometro lunghissimo e tale, che l' intervallo fra la temperatura dell' acqua stagnante e quella della mano, sporga sempre fuori della superficie? ed ancorchè ciò si potesse conseguire, come reggerlo verticalmente nelle grandi profondità, e nelle piene de' fiumi. Ma ben altre difficoltà io ravviso nell' uso di questo strumento, allo scopo di cui si ragiona. Variando le velocità di una corrente dalla superficie al fondo, il termometro verrebbe investito con diverse velocità in tutti i punti della porzione immersa nel fluido, e male si argomenterebbe sulla velocità di quel punto in cui trovasi il bulbo del termometro, dalla causa produtrice l' osservato raffreddamento. È vero, che si potrebbe adoperare un artifizio tale, che lasciasse esposto il solo bulbo all' urto della corrente: ma bisognerebbe che con questo artifizio si sottraesse altresì il bulbo dall' influsso delle impressioni degli strati superiori, anche nel tempo dell' immersione dello strumento, il quale non può essere brevissimo nelle grandi profondità. Tale sarebbe un artifizio che lo esponesse

all' urto della corrente solo quando trovasi alla profondità che si vuole sperimentare: ma come avrebbesi allora con esattezza la misura del tempo, t', da cui dipende il buon esito dello sperimento? Come notare il principio di questo tempo, mentre il termometro comincia a raffreddarsi tosto che la mano si leva dal bulbo.

Sono queste le ragioni dalle quali fui indotto a credere, che questo strumento del sig. Leslie non potesse valere a determinare la scala delle velocità in una perpendicolare di un fiume, o canale qualunque. Ben mi persuado che nelle correnti di non molta larghezza possa servire alla misura delle velocità in superficie, e che con esso si possa determinare la degradazione di queste velocità dal filone alle sponde dell' alveo; la sola sperienza può trarci d' errore, ed in tanto ho creduto di dovere collocare in questo luogo sì fatta invenzione, nè mi pare di sbagliare gran fatto.

CAP. III.

De' galleggianti, che servono alla misura della velocità media, o della scala delle velocità, in una corrente qualunque.

37. Il primo sopra del quale cader debbe il nostro discorso, si è l' asta del p. Cabeo, cui hanno poscia cercato di perfezionare il Barattieri, il p. Lecchi, il Mann, ed il Bonati.

Dopo di avere mostrata l' insufficienza del galleggiante proposto dal Castelli, onde misurare l' assoluta velocità di una corrente, il Cabeo si esprime nel modo seguente . . . . . „ se voglia taluno avere, di questa velocità, almeno la fisica misura, onde non appaia, „ che totalmente se ne disperi, io reputo, che possa aversi approssimativamente vera, di questa guisa. = Prendi un' asta di legno „ bislunga, e adatta ad una delle sue estremità un peso di piombo, „ o di pietra a modo, che se metti l' asta nell' acqua, rimanga diritta perpendicolarmente, nè però tutta resti sommersa, nè tocchi „ il fondo: poni intorno all' altra estremità superiore una corona di „ zucche, o di vesciche piene d' aria, in guisa che però alle vesciche che sopravanzino due, o tre spanne di asta. Metti l' asta in tal „ maniera preparata nell' acqua, e abbassa la corona superiore tanto, che la parte grave dell' asta non tocchi il fondo. Da questo „ sperimento due cose vedrai risultare 1.ª quanto sia il movimento dell' acqua; 2.ª se tutta, è cioè tanto la superiore, quanto l' inferiore „ si muova con eguale velocità; imperocchè se tu ponessi l' asta „ in acqua stagnante, la parte eminente si vedrebbe perpendicolare „ alla superficie dell' acqua; e del pari, se si muovesse tutta con

„ eguale velocità, l'asta conserverebbe sempre la medesima posizio-
„ ne: ma all'incontro tu vedrai che la parte dell'asta, che sta so-
„ pra la superficie dell'acqua, inclina alla parte anteriore del fiume
„ e si ha con ciò un evidente argomento, che la parte superiore
„ dell'acqua scorre più velocemente, e seco trasporta la parte su-
„ periore dell'asta, ed all'opposto l'inferiore non iscorre con pari
„ forza e velocità . . . . . . „

„ Un secondo oggetto, che ricaverai dall'enunciato sperimento,
„ sarà la più esatta misura della velocità di tutta l'acqua, a secon-
„ da della sua profondità: imperciocchè sebbene io non neghi, che
„ la parte superiore dell'acqua sarà per condurre la parte inferiore
„ dell'asta ad una qualche maggiore spontanea velocità, pur nondi-
„ meno l'errore sarà piccolo, e in cose fisiche non molto valutabi-
„ le; avverti però che l'asta non debbe collocarsi soltanto in un
„ luogo, secondo la larghezza del fiume, nè devi esser contento di
„ una sola misura di velocità, ma ti fa d'uopo sperimentare con
„ quale velocità scorra l'acqua in più luoghi e presso le ripe, e
„ presso il mezzo mettendo insieme tre, o quattro osservazioni, e di-
„ videndone la somma pel loro numero. Con tali mezzi, dalla sezio-
„ ne, o ampiezza della parte del fiume assunta, potrai ricavare e-
„ sattamente quant'acqua trasporti il fiume in qualunque tempo de-
„ terminato „ (*).

38. Ognuno ravvisa in questo sperimento del p. Cabeo un metodo per misurare la velocità media di una corrente, e non la scala delle velocità; ed è per questo che il p. Grandi annovera fra i difetti di questo strumento quello di mostrare una velocità, che non si saprebbe a quale altezza dell'acqua possa corrispondere. Più ragionevole sembrami l'altra eccezione, che l'aria incontrata dalla porzione di asta che sporge fuori dell'acqua, possa alterare il movimento di questo galleggiante. Nè mi pare che l'asta possa in ogni incontro accomodarsi in situazione perpendicolare alla superficie dell'acqua; nè che a procurarle sì fatta situazione, valga l'energia del peso applicato alla parte inferiore, poichè l'acqua in superficie scorre più velocemente, che a qualunque profondità. Ben si debbe procurare che l'inclinazione dell'asta sia assai piccola, ond'ella mostri con abbastanza di precisione, la velocità media della corrente.

Il Barattieri dubita, che per essere appunto più pesante l'estremità inferiore dell'asta che non la superiore, possa essa camminare *di traverso*, e perciò propone la seguente modificazione.

(*) *Nicolai Cabei Ferrariensis Societatis Jesu, Philosophia Experimentalis* ec. Textus 60. quaestio 3. pag. 336. Romae 1686.

„ Abbiamo noi presa un'ascia, o tavola più sottile, che sia stato
„ possibile, e larga due, anche tre palmi, e quattro secondo la
„ quantità dell'acqua da misurarsi; e ne' fiumi anco una tavola as-
„ sai maggiore, ma leggiera al possibile, e fattosi un buco nel mez-
„ zo vi abbiamo fatto passare un legno dritto, rottondo, grosso
„ un'oncia almeno, e più, secondo i casi, accomodato a formare
„ angoli retti con la tavola medesima, e lungo di sotto dalla tavola
„ almeno la metà della misura dell'altezza viva dell'acqua da misu-
„ rarsi, e che nel capo verso il fondo abbia maggior gravezza, che
„ di sopra, per aiutarlo a star ben retto in piedi, ma non d'avan-
„ taggio, e che nel capo superiore sopravanzi tanto sopra la tavola,
„ che sia comodamente veduto, e conosciuto come egli camina in
„ piedi retto alla superficie dell'acqua, camminando al basso con la
„ corrente, nel modo che mostra la figura A (*tav.* 6. *fig.* 3.), e
„ fattolo discendere più volte dall'uno all'altro dei termini all'ope-
„ razione, abbiamo noi cavato quanto si poteva desiderare, cono-
„ scendosi con questo, che con certo tempo il fiume cammina una
„ tal lunghezza, la quale fa poi chiaro le altre parti della quanti-
„ tà . . . . (*) „.

39. Il p. Grandi crede, che l'asta del Cabeo si terrà diritta meglio colla tavola che non colle vesciche, ma che nondimeno lo strumento andrà soggetto alle altre eccezioni del precedente. Soggiungerò io di più, che codesta tavola cui viene sostituita alle zucche o vesciche del Cabeo, può in molti incontri procurare allo strumento un moto di rotazione attorno il proprio asse, attesa l'impressione della corrente contro la grossezza della tavola, la quale è maggiore verso il filone, che nell'estremo opposto. Questo moto di rotazione poi, potrebbe impedire di osservare esattamente, quale ne sia il moto progressivo, e quindi disturbare la giusta misura della velocità media della corrente, che da sì fatto movimento deducesi.

Anche il p. Lecchi nella sua idrostatica (pag. 420. e seg.) espone il proprio parere intorno alle invenzioni del Cabeo e del Barattieri, ma lo espone nel modo di coloro i quali volendo mostrare di correggere gli altrui difetti, ne trascrivono i paragrafi mutilati, e quali debbono essere perchè compaiano imperfetti. Così per correggere il Barattieri trascrive lo stesso paragrafo da noi esposto nel numero precedente, ma sino alle parole *si poteva desiderare*; dopo di che egli dice. *Ma quanto egli desiderasse, non lo soggiunge; e nulla dice a qual sorta di movimento si contemperi un tal galleggiante*. Se avesse trascritto quel paragrafo fino al suo termine, non credo che

(*) *Architettura d'acque*, Part. 2. Cap. V. pag. 10. Piacenza 1663.

avesse avuto luogo sì fatta osservazione; imperocchè quivi si dice, *conoscendosi con questo sperimento, che con certo tempo il fiume cammina una tal lunghezza*, ecco che egli dichiara di andare in cerca della velocità media del fiume; e perciò tacitamente ne dice, che il moto dello strumento non seconda nè la massima, nè la minima velocità, ma solo la media.

Lo stesso dee dirsi in tutto e per tutto, intorno alle eccezioni ch' egli da, a ciò che propone il p.Cabeo. Di questo egli trascrive la porzione di paragrafo che comincia. *Ex hac hasta duo videbis; primum, quantum acqua moveatur*,..... senza poi seguirlo dove soggiunge *alterum quod habebis ex hoc, erit velocitas exactior totius aquae secundum profunditatem*; .... e ne conclude, che non si vuole già da questa macchinetta la misura delle differenti velocità dell' acqua superiore ed inferiore, ma bensì la velocità media; quasi che il Cabeo non esponesse a chiare note, che col suo sperimento si determina altresì cotesta media velocità. Infatti, le prime parole di quest' autore, che il Lecchi trascrive, sono nel nostro idoma, le seguenti. *Da questo sperimento due cose vedrai risultare*, 1.ª *quanto sia il movimento dell' acqua* ....; ed è certo che cotesto movimento non da altro si conosce che dalla velocità. Ma più chiaramente risulta quanto noi significhiamo, dalle parole del Cabeo, che il Lecchi ha ommesse; le quali tradotte, dicono come segue. *Un secondo oggetto, che ricaverai dall' enunciato sperimento, sarà la più esatta misura della velocità di tutta l' acqua, a seconda della sua profondità* .... Ora questa velocità di *tutta l' acqua* di che parla Cabeo, quale sarà se non è la media?

40. Non è per questo però, che io non apprezzi le modificazioni, che il p. Lecchi suggerisce onde perfezionare il metodo del Cabeo, e del Barattieri; che anzi le stimo sommamente. Ma se un tal metodo ha delle imperfezioni, queste sono nell' apparecchio, non nell' uso del medesimo, il quale è quello stesso che il Cabeo per primo ci espose. Io sono d' accordo, e col Lecchi, e col Grandi, che a mantenere diritta l' asta sott' acqua, onde riceva le impressioni della corrente quasi perpendicolarmente, più valga la tavola del Barattieri, che non le vesciche, o le zucche adoperate dal Cabeo: come pure io trovo giusta l' altra eccezione del Lecchi alla macchinetta del Barattieri, dietro la quale risultano le citate modificazioni, che noi ora imprendiamo a mostrare. Ecco pertanto le parole del p. Lecchi, dalle quali si conosce l' eccezione anzidetta, ed il modo di correggere lo strumento in questione.

„ Mi cadde in mente un ragionevole sospetto, che la tavola del
„ Barattieri distesa sopra una notabile superficie, ed investita da
„ molti più filamenti d' acqua di quelli, che andassero ad urtare

„ immediatamente la sola verga sommersa; non potesse perciò questa sortire quel movimento medio, che vorrebbesi attemperato a tutte le differenti velocità d'una sola perpendicolare della sezione. Credetti essere miglior partito che il corpo attuffato nell'acqua, e con essa moventesi, fosse di uniforme volume, e grossezza in ogni sua parte; e che anzi potesse trascurarsi, come cosa di poco conto, un qualche suo leggier piegamento, il quale secondasse piuttosto i movimenti dell'acque nelle differenti loro altezze.

„ Feci pertanto segare un pezzo d'albero di pioppo già secco, e di uniforme grossezza, a guisa di un cilindro, e che aveva 2. braccia Milanesi (m.i 1,1898) di lunghezza, e 6. once (m.i 0,29745) di diametro. Ad un capo di questo feci legare strettamente tanti piccoli pesi, quanti, dopo molte pazientissime prove, bastassero, acciocchè il tronco si reggesse nell'acque attuffato per tutta la sua lunghezza, e perpendicolare al fondo; sicchè una delle sue estremità riuscisse soltanto a pelo dell'acque; e l'altra più pesante fosse a piombo sotto le medesime, senza però toccare il fondo, dal quale era distante poco più d'un mezzo braccio (m.i 0,29745). Nel centro di quella estremità, la quale era quasi a livello della superficie, vi piantai a piombo una sottil verga, acciocchè co' suoi piegamenti mi fosse l'indice de' movimenti più occulti del tronco sommerso „ (*).

41. Da alcune osservazioni che il p. Lecchi ci riferisce, intorno particolari sperimenti per lui instituiti nel canale manufatto del fiume Muzza presso a Cassano, si rileva; 1.° che quando l'estremità inferiore dello strumento, era distante dal fondo dell'alveo un braccio e mezzo circa (m.i 0,89235), la verga piantata nel centro dell'estremità superiore si piegava alquanto, in parte contraria alla corrente; 2.° che quando lo strumento entrava in un tratto d'alveo più dilatato, e per conseguenza di minore profondità, sicchè l'estremità inferiore del cilindro fosse pochissimo lontana dal fondo, si osservava in vece, che la verga piegavasi verso la corrente; 3.° che alcuni corpiciuoli leggeri notanti sott'acqua a diverse profondità, seguivano il cilindro con diverse velocità, essendovene alcuni che lo precedevano, altri che si rimanevano indietro, ed altri che camminavano di conserva; onde conchiudesi, che il movimento del cilindro era medio tra le diverse velocità de' filamenti acquei, e che perciò tenendo conto del tempo speso dal galleggiante nel percorrere uno dato spazio, si viene a determinare la velocità media di quella perpendicolare della sezione, nella quale sarà stato immerso lo strumento. A volere

(*) *Idrostatica esaminata ne' suoi principj* ec. Milano 1765. pag. 424.

poi conoscere qual sia la velocità media di tutta la sezione, conviene ripetere l' esperimento nel modo che suggerisce il p. Cabeo (37), e dalla media fra le medie velocità osservate, si avrà ciò che si cerca.

Prescrive inoltre il p. Lecchi, che si scelga un tratto di fiume o canale de' più regolari e diritti, di sponde perpendicolari, e di profondità quasi uniforme; *ma perchè, ciò nulla ostante, può accadere che le continuate incidenze delle acque correnti contro le rive, e le riflessioni verso il mezzo torcano il galleggiante, e lo riducano a quel sito che chiamano il filone, dov' è la massima velocità*, così è da provvedere a sì fatto inconveniente. Al quale scopo suggerisce, che si leghi il cilindro con un sottilissimo filo, col quale *l' osservatore che lo accompagna, or da una parte, ed or dall' altra, leggermente impedisca soltanto que' piegamenti verso il mezzo, e lo ritenga in quella distanza dalla riva, ove vuole ricavarne la velocità media di quella parte di sezione*.

Veramente questo modo di frenare il movimento degli strumenti idrometrici, non mi sembra praticabile con buon successo. A volere impedire i naturali piegamenti dello strumento verso il mezzo della sezione, conviene adoperare una forza in tutto straniera al suo movimento; una forza cioè che vinca la sua inerzia; e per quanto piccola possa essere sì fatta forza, il moto uniforme dell' asta cesserà di esser tale per qualche istante, e nel complesso dello sperimento risulteranno fallaci conseguenze. D' altronde risulta dalle sperienze istituite con simili strumenti, che quando si abbia cura di scegliere un tratto di fiume assai regolare, la direzione del cammino dell' asta, è sensibilmente parallela alla sponda, di modo che, non hanno luogo sensibilmente que' piegamenti di che si ragiona, a meno che non sia troppo lungo cotesto tratto di fiume.

Riferisce inoltre il padre Lecchi, che anche Ximenes si serviva di uno strumento consimile a quello ch' egli propone, e che con esso misurava la velocità media della corrente (*).

42. Ma vediamo come il sig. Teodoro Augusto Mann abbia saputo appropriarsi lo strumento del p. Lecchi, ed enunciarlo come suo ritrovamento. Nel trattato de' fiumi e canali, pubblicato l' anno 1779, così si esprime.

„ Il miglior metodo e più semplice di misurare la velocità della
„ corrente di un fiume o canale aperto, è il seguente.
„ Si prenda un cilindro di legno secco e leggero alquanto più bre-
„ ve della profondità dell' acqua; ad una estremità di esso si sospenda-
„ no tanti piccoli pesi quanto saranno necessarj per tenerlo nell' acqua

(*) L. c. pag. 430.

,, a perpendicolo, ed in modo che l'altra sua estremità rada la superficie dell'acqua. Nel centro di questa estremità si fissi una piccola verga diritta precisamente nella direzione dell'asse del cilindro; a questo oggetto che quando si sospende lo strumento nell'acqua, le deviazioni della verga dalla direzione perpendicolare alla superficie, possa indicare quale estremità del cilindro si avanzi più presto, e con ciò rilevarsi le differenti velocità dell'acqua a differenti profondità, perchè se la verga inclina a seconda della corrente, questo prova che la superficie dell'acqua ha la maggiore velocità, ma se inclina a ritroso mostra che la corrente più veloce è nel fondo; e se rimane verticale indica che sono eguali le due velocità ,,.

,, Essendo questo strumento posto nella corrente d'un fiume o canale riceverà tutte le impressioni dell'acqua per tutta la profondità, ed avrà la velocità eguale a quella di tutta la corrente *dalla superficie al fondo* nel luogo ove è immerso, e con questo mezzo si può con facilità ed esattezza ritrovare la velocità media di quella parte del fiume per ogni distanza e tempo determinato ,,.

,, Ma per ottenere la velocità media di tutta la sezione del fiume, conviene porlo successivamente nel mezzo, e verso i lati, perchè in questi luoghi le velocità spesso differiscono molto tra loro. Trovata con questo mezzo la *differenza di tempo in cui le correnti trascorrono un eguale spazio, o le differenti distanze trascorse in tempi eguali*, *la media proporzionale* di queste prove, che si trova dividendo la somma comune di esse tutte pel numero delle prove stesse, sarà la velocità media del fiume o canale ,,.

,, Se si tratta di trovare la velocità della corrente, soltanto nella superficie, o nel mezzo, o nel fondo, sarà del cilindro più opportuno una sfera di legno di tal peso che rimanga equilibrata coll'acqua nella superficie o nel fondo che vogliamo misurare, la ragione si è che rimane affetta dall'acqua di quella sola parte della corrente ove è sospesa ,,.

,, È facilissimo condurre il cilindro o il globo, in quella parte che vogliamo misurare, per mezzo di due fili, o funicelle, che due persone debbono tenere e diriggere da una parte e dall'altra del fiume, avendo cura nel tempo stesso di non ritardare nè accelerare il moto dello strumento ,, (*).

(*) *Philosophical transactions* ec. Tom. 69. London 1779. Questo frammento del trattato del sig. Mann sui fiumi e canali, mi è stato graziosamente tradotto dall'Egregio sig. professore ab. Giuseppe Mezzofanti, il quale essendo Bibliotecario di questa Pontificia Biblioteca, si compiacque di donarmi quella traduzione e di assistermi, colla sua solita cortesia, nelle ricerche biografiche, di che ho avuto bisogno, nella compilazione di questo scritto.

Nessuno crederebbe che il sig. Mann proponesse come cosa sua, cotesto metodo di misurare la velocità di una corrente, senza ignorare quanto avea scritto su questo proposito il p. Lecchi; pure si può dimostrare che la cosa cammina tutta diversamente. Imperocchè, dopo le parole che di quest' autore abbiamo or ora trascritte, segue egli a dire „ Diversi altri metodi furono inventati per misurare le velo„ cità dei fiumi, e dei canali, i quali possono vedersi nel maggior „ numero degli autori riferiti al principio di questo saggio „: ma fra questi autori, e fra le opere citate trovasi appunto l' Idrostatica del p. Lecchi; dunque il sig. Mann non poteva non conoscere, che altri prima di lui avea già pubblicato, quanto egli s' avvisava di proporre. Che il sig. Navier nella nota altre volte citata, dica che cotesto metodo di misurare la velocità di una corrente, è dovuto al sig. Mann, non me ne fa meraviglia, perchè egli, imitatore di quasi tutti gli scrittori Francesi, sdegna di leggere, od almeno di citare le opere Italiane.

43. Fa d' uopo ora che imprendiamo a descrivere il perfezionamento immaginato dal Chiarissimo Cav. Bonati, onde rendere di uso quotidiano lo strumento, del quale in questo Cap. abbiamo fin qui favellato.

„ Il metodo, ch' io sono per proporre [sono le parole di Bonati al „ §. 50. della sua Memoria (*)], è tale, che si può praticare anche „ in tempo delle piene . . . . Non è altro che una modificazione del „ p. *Cabeo*, voglio dire, che dove il p. *Cabeo* adoperava delle aste „ A B (*tav. 6. fig.* 4.) di legno con un peso in B, e con delle vesciche „ in C, io propongo delle aste consimili, ma senza vesciche, e con una „ parte infima E B o di metallo, o armata di metallo in modo, che „ tutta l' asta A B sia un cilindro, ed il metallo dev' esser tanto, „ che l' asta così preparata posta in un acqua stagnante abbia a met„ tersi da sè in una positura verticale, e galleggiare con una porzio„ ne A B di un piede, o due fuori dell' acqua.

Verso la fine della sua Memoria, e precisamente al §. 96. e seg., il Bonati c' insegna il modo di preparare le sue aste, ch' ei chiama *ritrometriche*, colle seguenti parole. „ Se l' asta di legno destinata „ per lo sperimento sarà di poca lunghezza, per trovare quanto me„ tallo vi si debba unire acciocchè messa nell' acqua sporga sopra la „ superficie un piede o due, ciò si potrà ottenere facilmente met„ tendo l' asta nell' acqua di un pozzo, ed attaccandovi all' estremo „ inferiore ora più, ed ora meno di metallo, finchè si veda, che „ l' asta abbandonata all' acqua si metta in una positura verticale

(*) V. *Società Italiana* Tom. II. par. 2. Verona 1784.

„ rimanendo fuori dell' acqua quel piede o due che si vorrà. Egli è „ però da avvertire, che quell' asta di legno deve essere stata tenu„ ta per qualche tempo sott' acqua acciocchè il legno s' imbeva di „ quella quantità di acqua, che può assorbire, particolarmente se „ il legno sarà secco, e poroso. Altrimenti si potrebbe dare, che „ nel principio dello sperimento l' asta sporgesse fuori dell' acqua per „ esempio un piede, e che nel fine non ne sporgesse fuori che un „ mezzo piede per essersi imbevuta alquanto di acqua nell' atto dello „ sperimento, e divenuta così alquanto più pesante „.

„ Ma se l' asta sarà così lunga, onde non si abbia un pozzo con „ tant' acqua, che sia sufficiente pel sopra descritto esame, si potrà „ fare uso di un acqua qualunque stagnante di qualche vasca, o bu„ ca ABC (*tav.* 6. *fig.* 5.) nella seguente maniera. L' asta sia da „ comporsi di due pezzi, cioè di uno DE di quattro in cinque pie„ di da unirsi all' altro GH con viti, o in altra maniera. Al pezzo „ DE si unisca tanto metallo in F, onde posto nell' acqua o di un „ pozzo o della buca stessa ABC, resti fuori dell' acqua con quella „ lunghezza DN che si vorrà. Si trovi il centro di gravità dell' altro „ pezzo GH, o sia quel punto K, dal quale sospeso rimanga in equili„ brio. Vi si attacchi uno spago IOL, e si metta sull' acqua AC ed al „ punto O dello spago nella verticale KO si attacchi tanto metallo, „ che appena basti per fare che il pezzo GH si sommerga tutto. Il „ metallo in O coll' altro in F sarà la quantità di metallo da unirsi „ all' asta composta dei due pezzi GH, DE, onde questa così messa „ nell' acqua possa galleggiare con una porzione DN fuori dell' acqua, „ com' è manifesto. Non mancheranno altri metodi per trovare lo „ stesso, e forse più comodi secondo le circostanze. A me basta „ d' averne indicato uno „.

„ Trovata la quantità del metallo da unirsi all' asta saremo in li„ bertà di attaccare lo stesso metallo a un estremo dell' asta dopo di „ averlo conformato in un cilindro del diametro dell' asta, oppure „ di unirlo all' asta incastrandovelo distribuito come si crederà più „ opportuno, purchè col legno venga a formare un cilindro solo. „

Non tralascierò di dire, che oggidì si costuma d' inverniciare le aste, onde non s' imbevano d' acqua, e si prescrive che nello sperimento sporga fuori dell' acqua una piccola parte delle medesime, lunga due o tre decimetri al più, onde non abbia grande influenza nel moto loro, l' aria atmosferica (*). In questo io sono del parere del Lecchi, e credo che sia miglior partito che le aste restino del

(*) V. *Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri Pontificj*. Milano 1822. pag. 63.

tutto sommerse, e sporga fuori dell' acqua una sottil verga, onde tener dietro al moto dello strumento.

Prescrisse da prima il Bonati, nella sua Memoria più sopra citata, che per l' esperimento si dovesse scegliere un tratto del fiume da sperimentare, il più regolare possibile, e lungo ducento o più tese (m.i 389,8080); ma poscia in un' altra sua Memoria inserita nel Tomo 8. parte 2. della stessa Società Italiana, disse che dopo molte riflessioni si era persuaso che bastasse una lunghezza di sessanta tese (m.i 116,9424). È questo un punto totalmente arbitrario; dipende dalla natura del fiume che si sperimenta, e dalle regolarità che s' incontrano nel tratto che si vuol scegliere. Così nelle Ricerche Idrometriche della scuola degli Ingegneri Pontificj per l' anno 1820. (*), trovo che fu scelto nel Po un tratto lungo 100 metri, e nelle ricerche dell' anno seguente, più sopra citate, fu scelto nel Tevere un tratto di metri sessanta.

Niente di più facile che l' uso di questo strumento, quale viene suggerito dal Bonati. Si getta l' asta nel fiume in un punto alquanto superiore a quel tratto che si avrà scelto per l' esperimento, onde giunga al principio del medesimo dopo di avere concepito un moto equabile, camminando parallela a se stessa. Si tien dietro alla sua corsa in una navicella, notando l' inclinazione al perpendicolo, nel modo più preciso possibile; e nel tempo stesso si terrà conto, con un orologio, o con un pendolo a secondi, del tempo impiegato a percorrere la lunghezza di quel tratto. Con questi dati si tenta di scoprire la scala delle velocità, siccome mostreremo a suo luogo.

44. Navier, che come abbiamo detto (42) ha veduto il pensiero del Mann, è di parere che il legno di che sono formate queste aste debba avere una gravità specifica pochissimo differente da quella dell' acqua, onde poco sia il peso cui dee porsi nella loro estremità inferiore, *altrimenti lo strumento s' inclinerebbe in addietro, anche allorquando la velocità dell' acqua, fosse la stessa in tutta la sua altezza*. Io ben m' accorgo ch' egli parla di una corrente inclinata all' orizzonte, e quando sia sensibile una tale inclinazione trovo giustissimo il suo suggerimento. Ma i fiumi naturali nelle pianure hanno un' insensibile declività; dunque per essi almeno vien tolto, od, in grandissima parte diminuita una tale obiezione. Consta poi dalla sperienza, che cotesti fiumi corrono più velocemente verso la superficie che non verso il fondo; e perciò l' asta debbe inclinarsi in avanti, siccome già vedesi accadere (**). Ben è vero però, che la lunghezza

(*) Quest' Opuscolo fu stampato in Roma.
(**) V. le Ricerche Geometriche del 1822 poc' anzi citate, pag. 54.

delle aste debb' esser tale, che colla loro estremità inferiore vadano assai vicino al fondo; diversamente, potrà avvenire quanto osservò il p. Lecchi (41), che cioè pieghino in senso contrario alla corrente.

Quello che rende imperfetto cotesto metodo di Bonati, si è il dover misurare l' angolo d' inclinazione dell' asta così all' ingrosso, e per approssimazione, tenendo dietro alla medesima con una nave, od osservandola di lontano stando sulla ripa coll' occhio armato. E difficile anzi impossibile adoperando per tal modo, il giudicare esattamente di quanto sia cotesta inclinazione; e dipendendo da essa la determinazione della scala delle velocità, non so con quanta confidenza se ne possano aspettare risultamenti esatti.

45. Il Sig. Geminiano Poletti di Modena ha immaginato il seguente artifizio, onde togliere all' uso dell' aste ritrometriche di Bonati il difetto di cui si ragiona. „ Sia AC (*tav.* 6. *fig.* 6.) un' asta ritrometrica (così il sig. Poletti), della quale rappresenti EC quella „ porzione che rimane immersa nell' acqua, ed AF la parte rimanente che ne sporge fuori. Si segnino sulla superficie ABFE le „ circonferenze *a*1, *b*2, *c*3, *d*4 ec. orizzontali ed egualmente distanti tra loro, a cagion d' esempio di un centimetro, o per meglio „ dire di quella misura che la grossezza dell' asta permetterà, acciocchè quando se ne segua la sua corsa nel fiume con una navicella agevolmente abbiansi a discernere: nè si mancherà di tracciarne alcune al di sotto della EF. All' effetto poi che le descritte periferie si distinguano senza confusione, potrassi intonacare „ l' asta di una vernice bianca, e segnarvele colla scala dei quattro „ colori rosso, azzurro, giallo e verde, i quali si ripeteranno quel „ numero di volte che si stimerà convenevole „.

„ Preparata una tal asta, e buttata in un' acqua corrente fingasi ch' essa abbia acquistata la posizione obliqua A′B′C′D′. Apertamente si manifesta che il pelo d' acqua, o toccherà nel punto *h* della parte anteriore più elevata dell' asta, o nel punto *k* della sua parte posteriore più depressa due delle differenti descritte „ periferie, ovvero sarà ad esse assai prossimo. Quindi seguitata l' asta nella sua corsa con una barca, non sarà disagevole l' osservare „ e il notare quali siano i colori che contraddistinguono le due circonferenze toccate dall' acqua ne' punti sopraddetti, o le altre „ due prossime superiori nel caso che l' acqua non tocchi. E con „ questa semplicissima osservazione, la quale ci rende noto la lunghezza *hi*, potremo conoscere l' angolo di declinazione dell' asta „.

„ Imperocchè immaginato condotto un piano verticale che passa „ per l' asse dell' asta, le sezioni colla superficie del cilindro saranno le rette A′D′, B′C′. Onde chiaro apparisce che l' angolo *hki* uguaglia l' inclinazione dell' asta dalla verticale. Pertanto chiamato *ar*

„ il diametro dell'asta, d la lunghezza *ki* osservata, e ω l'angolo
„ d'inclinazione, si avrà a tang. $\omega = \frac{d}{2r}$ (*) „.

Vorrebbe inoltre il sig. Poletti, che nel preparare lo strumento si dovesse distribuire il metallo in guisa, che il centro di gravità fosse assai vicino al punto di mezzo; poichè allora l'asta s'inclinerà maggiormente, e quanto è maggiore cotesta inclinazione, tanto più grande è la quantità d e più esatto il valore di ω. Io al contrario sono dell'opinione del Barattieri, e vorrei che l'asta camminasse rettamente, od almeno avesse un'inclinazione insensibile. E la ragione si è, ch'io dubito, che questo strumento non possa in alcun modo servire alla determinazione della scala delle velocità; e che quando l'inclinazione sia nulla, od almeno piccolissima, mostri la velocità media dell'acqua, lo che per la pratica è più che sufficiente. Infatti, nella teoria di questo tachimetro idraulico, colla quale (siccome vedremo a suo luogo) si determina la scala delle velocità, supponesi che l'inclinazione dell'asta si faccia, e si mantenga costante; ed al contrario io dubito, che cotesta condizione non possa generalmente adempirsi. Imperocchè, se si osserva il moto dell'acqua in un fiume, allorchè scorre a poca altezza, si vede che la superficie della medesima non è liscia, ma piena di protuberanze, le quali nascono dalle irregolarità del letto: si vede eziandio che queste protuberanze sono più o meno sensibili e manifeste, secondo che minore o maggiore è l'altezza dell'acqua nel fiume, cosicchè ad una data altezza la superficie diviene levigata, mostrando così di nulla risentirsi degli effetti cagionati dalle irregolarità del letto. Esiste adunque una profondità di acqua, dopo la quale gli strati inferiori debbono avere un movimento irregolare, dipendente dall'irregolarità dell'alveo del fiume. Ora dovendo le aste essere tanto lunghe da avvicinarsi al fondo senza però toccarlo, non può a meno che l'estremità inferiore delle medesime non risenta gli effetti di questi movimenti irregolari, e quindi dee nascere, generalmente, un moto ondulatorio, che per mio avviso alterar debbe la costanza della loro inclinazione.

Questa mia opinione viene confermata dalla sperienza; noi lo vedremo più innanzi.

46. L'ultimo strumento fra i galleggianti, che servir puote alla determinazione della scala delle velocità, è il *galleggiante composto* di Brunacci (24). Abbiamo già detto essere questo strumento quel medesimo di cui Mariotte si serviva per riconoscere se la velocità degli strati inferiori era maggiore ovver minore di quella de' superiori.

(*) *Opuscoli Scientifici*. Bologna 1818. Tom. pag. 395.

Sarà bene adunque mostrar prima, come adoperava Mariotte cotesto strumento, per poscia apprezzare meglio gli usi a cui è destinato dall'Illustre Italiano.

Mariotte la discorreva così. „ Ho messo in una piccola riviera
„ scorrente con moto uniforme, due palle di cera attaccate ad un
„ filo della lunghezza di un piede (m.ᵗ 0,3248). Nel mezzo di una
„ di queste palle erano introdotte delle pietre, onde la sua gravità
„ specifica fosse resa alcun poco maggiore di quella dell' acqua, in mo-
„ do che quando le due palle erano nell' acqua, la più pesante tendeva
„ il filo e procurava alla più leggera un' immersione maggiore di quella
„ a cui sarebbbe giunta se fosse stata libera; e con questo mezzo la sua
„ parte superiore era quasi a fior d'acqua, affine che il vento non
„ vi avesse presa, e non agisce contro di esso. Ho sempre osservato
„ che la palla inferiore rimaneva indietro, principalmente ne' luoghi
„ in cui il fondo dell' acqua, presso cui passava la palla, conteneva
„ dell' erbe; giacchè questa riviera non aveva che circa 3. piedi
„ (m.ᵗ 0,9744) di profondità „ (*).

Brunacci destina l' uso di questo strumento, a più utili studj, e per qualunque fiume o canale si voglia. Ecco le parole colle quali enuncia il suo ritrovamento.

„ L' istrumento per misurare la velocità nei diversi strati d' un' ac-
„ qua corrente al di sotto della superficie, denominato il *galleg-*
„ *giante composto*, è formato di due palle di egual diametro, una
„ delle quali è di gravità specifica minore, e l' altra maggiore del-
„ l' acqua, unite con una sottil cordicella di peso sprezzabile, e tali
„ che gettato quest' istrumento nell' acqua una palla si profonda men-
„ tre l' altra galleggia „ (**).

„ La grandezza di queste palle è diversa secondo la larghezza del-
„ le correnti in cui si adopera lo strumento: in generale essa è quel-
„ la che richiedesi per poter scorgere distintamente dalla sponda la
„ palla superiore, la quale per rendersi visibile bisogna che sporga
„ fuori dell' acqua un picciol segmento. Nei nostri canali navigabi-
„ li le palle del galleggiante composto non avevano più di quattro-

(*) *Traité du Mouvement des eaux*. Paris 1700. pag. 197.

(**) Non si creda già che il sig. Brunacci ometta di dire che l' invenzione di questo strumento è dovuta a Mariotte, imperciocchè come è geloso del proprio nome, così non s' arroga gli altrui diritti. Ecco in fatti la nota ch' egli ci ha data in questo luogo.

Mariotte è in vero il primo che abbia immaginato di unire in tal guisa due palle per ispiare le velocità inferiori; ma l' istrumento non ha avuto alcun successo per un secolo intiero, giacchè nè egli nè altri viddero come da esso poteva esattamente aversi il quanto preciso delle velocità medesime, e come adoprarlo nei gran fiumi.

„ centimetri di diametro, e volendo sperimentare in Po, la di cui larghezza è talnua volta al di là di cinquecento metri, si è fatto il diametro di tre decimetri e mezzo „ (*).

Semplicissimo è l' uso di sì fatto tachimetro. Si misura da prima con un galleggiante semplice, la velocità superficiale; poscia gettato lo strumento nell' acqua si tien dietro al suo movimento, e si nota la velocità eqnabile colla quale cammina, nel che la palla superiore serve di guida. Dopo questo, si deduce la velocità di quello strato in cui si trova la palla inferiore, *sottraendo la velocità superficiale dal doppio della velocità dello strumento*.

Soggiunge quivi il Cav. Brunacci, che la profondità dello strato in cui trovasi la palla più pesante; „ è sensibilmente eguale alla distanza dei due centri delle palle; giacchè in pratica si è sempre „ riconosciuto essere di pochi gradi l' inclinazione della cordicella, e „ trascurabile affatto la sua curvatura „.

Se debbo dire sinceramente il mio sentimento, io sono di tutt' altra opinione. Finchè si tratta di piccole profondità son d' accordo che si potrà prendere la palla inferiore così pesante, che tenda il filo in linea retta, e poco lo devii dalla situazione verticale; ma non so persuadermi che nelle correnti di molta profondità, come sarebbe appunto nel Po, nelle quali si esige una lunghezza di filo considerevole, possa il peso della palla inferiore impedire che la corrente non lo incurvi, giacchè questo peso non può crescersi oltre un dato limite, attesa la natura dello strumento; e come misurare allora la situazione della palla sottoposta senza conoscere la curvatura del filo? E come determinare sì fatta curvatura se dipendendo dalla scala delle velocità, bisognerebbe ci fosse noto ciò che si cerca.

Anche il sig. Venturoli opina che non possa trascurarsi la curvatura del filo sott' acqua; imperocchè, *per piccola ch' ella sia, può produrre uno svario troppo grande* (**). Di più nelle profonde ed assai veloci correnti, la grossezza del filo temo non possa esser tale che il suo peso rimanga spregevole, poichè un filo sottile potrebbe giugnere a spezzarsi. E d' altronde si dovrà tener conto eziandio dell' urto della corrente contro un tal filo, lo che costituirà un' altra difficoltà nell' uso dello strumento, dipendendo sempre quest' urto dalla scala delle velocità, che è l' incognita del problema. Lo stesso dicasi se si avvisasse di unire le palle con un verga rigida. So bene che si suol dire, che avendo cura di mettere la maggior differenza

---

(*) *Memorie dell' Istituto Nazionale Italiano* Tom. I. parte II. pag. 285. Bologna 1806.

(**) Elementi di Mec. ed Idr. Tom. II. pag. 218. Milano 1818.

fra le gravità specifiche delle due palle, onde il filo sia teso con molta forza, la lunghezza del filo stesso poco differisce dalla profondità della palla inferiore; ma con ciò si richiede altresì, che la velocità alla superfiaie, quella del galleggiante, e quella della corrente nel luogo della palla inferiore, differiscan poco tra loro (V. Venturoli luogo citato); la qual condizione non so se sarà in nostro potere il procurarne l' adempimento.

Possiamo adunque concludere, che cotesto strumento (se mal non m' appongo) non può servire se non ne' piccoli canali, ne' quali è sufficiente un filo di poca lunghezza, che può essere teso in linea retta prossimamente, per l' azione della palla più pesante.

Dove poi si volesse, o fosse mestieri tener conto anche dell' inclinazione del filo alla verticale, il sig. Cav. Brunacci ne addita un metodo semplicissimo colle parole seguenti. „ Si divida la superficie „ della palla superiore in tante zone di cinque gradi ciascuna più „ o meno secondo la grandezza del diametro, facendosi queste zo- „ ne di due diversi colori, alternativamente bianche e nere, per e- „ sempio; esse debbono essere in tal modo segnate, che posto l' i- „ strumento in acqua stagnante conservino il paralellismo all' oriz- „ zonte. Se nel tempo della sperienza s' inclina la palla superiore, „ tante zone si occultano sott' acqua da una parte, quante se ne „ scoprono dall' altra: così contando quante sono le zone che si tro- „ vano fuor d' acqua da una banda, e dall' altra, e prendendone „ la metà della differenza, ci dà questa l' inclinazione del filo „.

Da questo ingegnoso metodo di misurare l' inclinazione del filo dalla verticale nel galleggiante composto, forse fu tratto quello di misurare l' inclinazione dell' asta ritrometrica dal perpendicolo (45); e ciò con assai maggior sicurezza, poichè l' asta ritrometrica, essendo rigida, s' inclina appunto sotto quell' angolo che da un tal metodo risulta, mentre il filo flessibile del galleggiante composto può incurvarsi, e l' angolo che si determina essere assai diverso dell' angolo utile dello strumento, che è quello del filo nel luogo della palla inferiore.

Terminerò questo capitolo colla seguente osservazione. Tutti i tachimetri idraulici de' quali abbiamo in esso favellato, appartengono alla classe de' galleggianti, e come tali hanno il difetto di tendere ad avvicinarsi al filone della corrente (30), e perciò percorrono linee poco parallele alle sponde dell' alveo. Per tuttavia da questo loro difetto, può nella pratica prescindersi, giacchè nelle correnti assai regolari, non è molta la divergenza delle linee che percorrono, colla direzione delle ripe, o sponde dell' alveo. Ad ogni modo però, quando fosse possibile ritrovare un tachimetro fisso, il quale avesse il pregio della semplicità del maneggio, e di una sufficiente esattezza

ne' risultamenti, io lo preferirei sempre a qualunque galleggiante, per quanto grande ci sembrasse la sua perfezione. Di questi tachimetri fissi passo a farne parola.

CAP. IV.

De' tachimetri idraulici fissi, coi quali si determina la scala delle velocità di una corrente.

47. Il quadrante di Guglielmini, che fu il primo di cotesti tachimetri ad essere proposto, è di una semplicità così grande, e di così facile maneggiamento, che tutti gl' Idrometri lo abbracciarono; e molti cercarono di liberarlo da que' difetti, che l' uso del medesimo ne facea scoprire. Mostreremo adunque qual fosse il primo pensamento di Guglielmini, ed in seguito esporremo le modificazioni che a mano a mano sono state proposte, allo scopo di perfezionarlo.

Guglielmini nel libro secondo prop. 9 del suo trattato sulla misura delle acque correnti, espone il suo divisamento, in ordine alla determinazione meccanica della proporzione delle velocità di una corrente qualunque, colle seguenti parole.

« Per ritrovar adunque la ricercata proporzione delle velocità, si
« adatti un pendolo ad un quadrante spartito in gradi, e in minuti,
« e si ponga uno de' suoi lati verticalmente, e si lasci andare il
« peso B (*tav.* 6. *fig.* 7.) nell' acqua di qualche canale, in modo
« che il suo centro sia al pari della superficie dell' acqua; è chiaro,
« che la velocità dell' acqua divertirà la direzione del pendolo verso
« il centro. Si osservi diligentemente l' angolo dell' inclinazione.
« Dipoi lasciato andare il pendolo (senza variare la lunghezza del
« filo) sino al fondo del canale, di maniera però, che non sia dal
« medesimo fondo impedito, di nuovo si osservi l' angolo dell' incli-
« nazione. E perchè la potenza, che tiene il pendolo nell' angolo
« dell' inclinazione, è la stessa velocità dell' acqua corrente, tanto
« nel fondo quanto nella superficie, imperocchè nell' acqua stagnan-
« te il pendolo senza angolo alcuno s' indirizza verso il centro, sarà
« la proporzione delle potenze la medesima, che quella delle veloci-
« tà; sicchè se la superficie dell' acqua non è in alcun modo, o è
« insensibilmente inclinata all' orizzonte le tangenti degli angoli dell' in-
« clinazione avranno la medesima proporzione, che le velocità (*) ».

48. La prima modificazione introdotta nell' uso di questo tachimetro, fu di correggere l' errore commesso dal Guglielmini, allorchè

(*) Raccolta d' Autori Italiani ec. Bologna 1822, Tom. II pag. 27.

stimò essere la proporzione delle potenze quella stessa delle velocità. L'Ermanno nella sua Foronomia alla prop. 41. del libro 2.°, fu il primo a mostrare che tali potenze sono proporzionali al quadrato delle velocità. Il p. Grandi si mostrò del parere di Guglielmini, forse perchè dovette credere che la forza cui tiene sospesa la palla, sia quella medesima dalla quale verrebbe animato un galleggiante libero, che si lasciasse trasportare dalla corrente, il quale concependo una velocità eguale a quella della corrente medesima, la forza con cui cammina è proporzionale a cotesta velocità. Ma in questo caso la forza che fa equilibrio alla palla è quella ch'egli chiama nella prop. 25. del 1.° libro del suo trattato, *momento o forza motiva* della corrente, giacchè è quella stessa con cui le acque incontrandosi vicendevolmente, o in altro ostacolo qualunque, si urtano. E questa forza egli stesso dimostra essere proporzionale al quadrato della velocità; dunque è falsa l'opinione precedente, e già tutti gl'Idrometri ne convengono.

Inoltre il Guglielmini propone questo metodo onde determinare le velocità rispettive nelle diverse profondità di una data corrente, anzi pare ch'ei non si curi se non delle velocità alla superficie ed al fondo; mentre sarebbe stato necessario di determinare il valore assoluto di queste velocità, e per qualunque profondità sotto la superficie. Fu il Corradi, che ne diede per primo il metodo onde determinare, col quadrante di Guglielmini, la misura assoluta della velocità. Leggiamo nell'opera di Vallisneri sopra l'origine delle fontane a carte 228, che il Corradi stima l'urto della corrente contro la palla del pendolo, siccome equivalente al peso di un prisma d'acqua che avendo per base il circolo massimo della palla abbia per altezza quella dovuta alla velocità dell'urto; e con questo principio, e col peso di una nota misura d'acqua, egli deduce il valore assoluto della velocità in qualunque punto della corrente. Eustachio Manfredi nella nota 12. al Cap. VII. di Guglielmini ci riferisce, che dietro le conseguenze che il Gravesande ricava ne' §§. 376, 382 delle istituzioni della filosofia Newtoniana risulta, essere l'urto di una corrente contro una sfera immobile, *eguale al peso d'un cilindro d'acqua, che abbia per base il cerchio massimo della sfera, e la di cui altezza sia la metà di quella onde un corpo che cade nel vacuo, acquisti la velocità, con cui l'acqua si muove;* e perciò conclude, che la velocità assoluta dell'acqua, sarà meglio, e più esattamente conosciuta per mezzo di questo teorema, che non per mezzo di quello del Corradi.

49. Ben molte altre correzioni sono state immaginate onde rendere più esatto l'uso di cotesto strumento: ma non è forse riescito a perfezionarlo al segno che si può desiderare, se non all'ultimo Idrometra

Italiano (il sig. Ventnroli), che pose mano a sì fatto perfezionamento.

Il sig. Giovanni Ceva nel suo opuscolo de' fiumi alla prop. 4, propone di sostituire al quadrante del Guglielmini una squadra a braccia disuguali NOP (*tav. 6. fig. 8.*), girevole attorno il punto O. All' estremità N del braccio più corto di questa squadra, è sospeso un piombo Q, che disponesi in linea verticale. Si porta il braccio più lungo OP a coincidere colla direzione OL del filo del pendolo, e si nota la porzione OS di questo braccio. L' urto della corrente contro la palla riescirà inversamente proporzionale alle distanze OS. In fatti rappresentando LH il peso o gravità della palla, sarà HD l' urto della corrente in L: e poichè i due triangoli HLD, ONS sono simili, così starà HL : HD :: OS : ON; onde risulta $HD = \frac{HL.ON}{OS}$ (*).

Il p. Grandi nel riferire cotesto metodo del sig. Ceva, vuole che le velocità sieno inversamente proporzionali ad OS; al qual pensamento fu certamente condotto da quello stesso errore che il trasse a dire col Guglielmini, che la forza cui tiene equilibrata la palla in un' acqua corrente, è proporzionale alla velocità. Ma poichè questa forza, è ora dimostrato essere proporzionale al quadrato di tale velocità; ne viene viceversa, che le velocità sono reciprocamente, come le radici delle lunghezze OS. Soggiunge il p. Grandi in questo stesso luogo, che si può perfezionare lo strumento del Ceva, e renderne l' uso più facile, col dividere *la gamba più lunga* OP *della squadra in una gran moltitudine di parti minute*, poichè quanto è maggiore il numero delle divisioni contenute nella porzione OS, tanto più esatto riescirà il rapporto fra le velocità ne' diversi luoghi di una corrente.

50. Riferisce inoltre il p. Grandi d'aver veduto adoperare dal dottor Bernardino Zendrini un certo strumento per misurare la velocità dell' acqua, il quale era una specie di compasso ACD (*tav. 6. fig. 9.*), cui aprivasi col tenere il gambo inferiore CD nella direzione della corrente, alzando tanto l' altra gamba AC, che il piombino BF cadesse in un determinato punto E, dal quale, andando verso l' estremità D, si contavano le divisioni corrispondenti alle tangenti delle inclinazioni CBE del pendolo al perpendicolo. Per tal modo si avrebbero le velocità della corrente, proporzionali alle radici delle distanze CE, conformemente a quanto abbiamo detto poc' anzi.

Convien dire, che Zendrini si persuadesse delle eccezioni, che a quanto ne dice il p. Grandi, le furono mosse all' atto dello sperimento;

(*) Raccolta cit. Tom. IV. pag. 58.

giacchè nella sua opera = *Leggi e fenomeni* ec. = in cui riferisce molte sperienze fatte col pendolo di Guglielmini, non parla per nulla di questa sua modificazione. Gli è certo però, che se il perfezionamento di questa macchinetta consistesse nel trovare la più esatta e sensibile misura dell'inclinazione del filo al perpendicolo, la piccolezza del compasso di Zendrini, la renderebbe più imperfetta che mai.

51. Dirò finalmente di un'altra modificazione di questo genere proposta dal p. Ximenes nella sua = *Dissertazione meccanica di due strumenti che possono servire alla giusta stima del viaggio marittimo, e delle velocità delle acque e de' venti* =, stampata in Firenze l'anno 1752.

Immagina egli una tavoletta di legno mobile attorno di un centro, e sulla quale è descritto un quadrante diviso ne' suoi gradi. Propone che si adoperi una palla del diametro di 3. pollici (m.ⁱ 0,0812), la cui gravità specifica sia doppia di quella dell'acqua, e con una teoria, che non so quanto sia esatta, ha calcolato in parti millesime del raggio, le tangenti della declinazione del filo dal perpendicolo, corrispondenti alle velocità da 5. piedi (m.ⁱ 1,6242) sino a 900. (m.ⁱ 292,3551), per ogni minuto primo. Nei due lati del quadrato circoscritto al quadrante, che sono tangenti al medesimo, vengono incise le parti millesime del raggio, e le velocità corrispondenti; cosicchè adoperando una palla delle suddette dimensioni e peso, si legge tosto nel quadrante la velocità della corrente, senza ulteriori calcoli. Per le inclinazioni del pendolo minori di 45°, si leggono le velocità nel lato orizzontale del quadrante anzidetto; e per le inclinazioni maggiori, cotestè velocità si trovano incise nel lato verticale. Ma ognuno vede, che per far uso di questo quadrante conviene mai sempre adoperare una palla del diametro di 3. pollici, e della gravità specifica doppia di quella dell'acqua, e perciò cotesto strumento non può servire per tutte le correnti, essendo tal volta bisogno di adoperare una palla se non di peso, almeno di diametro maggiore; ed è chiaro, che quella velocità che procurava al pendolo un'inclinazione p. e. di 30.° adoperando la prima palla, gli procurerà un'inclinazione maggiore se la palla avrà un diametro minore; e viceversa. Anche a questo inconveniente ha provveduto il p. Ximenes, mentre dimostra, che in pari inclinazione le velocità sono come le radici de' diametri della palla; cosicchè ad un globo subquadruplo del normale corrisponde una velocità suddupla di quella che leggesi nel quadrante, e per un globo del diametro quadruplo del normale la velocità sarà doppia.

Vuole Ximenes che si faccia uso di globi di legno secco, con tale interna cavità, da potervi introdurre tanto piombo che la loro gravità

specifica sia doppia di quella dell' acqua, e perchè non s'imbevino di questa, prescrive che siano inverniciati tanto internamente, che esternamente (*).

Nè già si creda che Ximenes con questa modificazione del quadrante di Guglielmini, in tenda d'averlo totalmente perfezionato, giacchè egli pure confessa che rimangono altre considerevoli difficoltà da superare. Dice egli in fatti essere difficile l'assicurarsi che il piombino che sta fuori dell' acqua prenda una situazione assolutamente verticale, distogliendolo da questa le continue oscillazioni a cui va soggetto. Inoltre le divisioni portate nel lato verticale del quadrato circoscritto al quadrante, sono assai ristrette per le grandi deviazioni del filo, e perciò poco esatta riesce la misura delle velocità che si leggono nello strumento. Nè tace Ximenes l'errore proveniente dalla curvatura del filo sott' acqua, la quale dic' egli può *introdurre un errore, che non è infinitesimo*. Finalmente la deviazione della palla dal piano verticale del quadrante, e la declività del fondo dell' alveo, a cui dovrebb' esser paralello il lato orizzontale del medesimo, sono altrettante cagioni dell' imperfezione di questo strumento. Si può aggiungere a tutto questo, la difficoltà di misurare esattamente l'angolo di deviazione del filo dal perpendicolo, in causa delle oscillazioni continue, che si osservano nel filo stesso, più o meno forti, secondo che maggiore o minore è il contrasto del filo e della palla, coll' acqua che urta l'uno e l'altra, con tutta la sua velocità.

52. A togliere tutte queste dubbiezze pensava Ximenes, allorchè scriveva la teoria del suo nuovo quadrante, e gli parve in fatti d'avere ottenuto l'intento, colla macchinetta che ci descrive alla pag. 49. della citata sua dissertazione. Ecco in che consiste cotesta nuova invenzione.

„ Primieramente ci si presenterà al pensiero uno strumento assai
„ antico e volgare, che da alcuni è adoperato per pesare ciò che oc-
„ corre. Questo è un cilindro di ottone AB (*tav.* 7. *fig.* 1.) inte-
„ riormente scavato. Nel fondo A della parete inferiore si conficca

(*) Il sig. Ducrest nel suo Trattato sull' idroferia (pag. 42.), ci descrive un suo metodo per rendere il legno impenetrabile a qualunque sorta di umidità: e questo consiste nel far bollire il legno entro un olio essiccativo, mantenendolo costantemente alla temperatura di 75 in 80 gradi; poichè se il calore eccedesse quello dell' acqua bollente, la qualità del legno verrebbe alterata. Spetta alla sperienza, egli dice, il prescrivere la durata dell' ebolizione, la quale dipende dalla grossezza e porosità del legno. Ha trovato v. g., che per una tavola di abete grossa un pollice (m.[i] 0,0270) bastano due ore di ebolizione a renderla *perfettamente impermeabile all' umidità*.

„ l'estremità E di una molla EF, la quale ha la figura di una spi-
„ rale cilindrica, di una lunghezza EF, che possa servire all'inten-
„ dimento. Nell'inferiore estremità F della stessa molla è saldato
„ un cilindretto FH nel quale sono incise le divisioni indicanti i
„ diversi pesi. Una tal molla con tal cilindro essendo chiusi nel ci-
„ lindro scavato AB vagliono benissimo per la stima de' pesi. Poi-
„ chè essendo la molla nello stato suo naturale il punto C conviene
„ col punto B, ma attaccando ad un unico il peso M esso stenderà
„ la molla, e farà forzatamente distendere il cilindretto segnato BC.
„ Quanto maggior sarà il peso, maggior sarà la discesa, e le divisio-
„ ni che restano sotto il fondo B, se sono ben fatte, indicano il
„ giusto peso del solido attaccato in M. Questo è uno strumento,
„ che può molto perfezionarsi, e rendersi sensibile alle più minute
„ differenze di peso. Poichè se la molla spirale cilindrica si assotti-
„ gli, e si allunghi, se per conseguente si allunghi il cilindretto
„ FH, si può giungere a dividere una libbra di peso non solamente
„ nelle sue once, ma ancora nei suoi denari. Se la FH facciasi di 6.
„ pollici Parigini (m.ʲ 0,1624), e porti una libbra da H sino in F,
„ converrà dividerla in 288. parti, perchè possa tener conto di cia-
„ scun denaro. Or queste parti sono sensibilissime, tornando cia-
„ scuna di $\frac{1}{4}$ di linea Parigina (m.ʲ 0,0068) ove le divisioni fossero
„ uguali; ed una lunghezza, che sia di un quarto di linea, è ben
„ sensibile agli occhi nostri. Se dunque un simile arnese sia con
„ diligenza lavorato dall'artefice, e le sue divisioni sian fatte se-
„ condo l'uso delle velocità, basterà attaccare ad un filo il globo M
„ di quel diametro, che sarà determinato, sospendere l'altra estre-
„ mità del filo all'uncino C (*tav.* 7. *fig.* 2.), e tenendo ferma l'e-
„ stremità A dello strumento, lasciar che l'azione del fluido HO
„ trasportante il globo venga ad abbassare il cilindretto segnato CB
„ sino al punto d'equilibrio B; dove riscontrando la divisione si
„ verrà a trovare la velocità del fluido, che si cercava. Ciascun
„ vede, che qui niente nuoce la curvità del filo CM niente la ec-
„ centricità, e adattandosi da se lo strumento AB nella giusta posi-
„ zione, esso sarà agevole a maneggiarsi, e sarà esente dagli errori
„ del quadrante. Che era ciò che si voleva. „

Ma ben altre rimarchevoli difficoltà sembrami riscontrare nell'uso di questo strumento, che lo rendono imperfettissimo. Finattantochè il cilindro AB sarà verticale (*tav.* 7. *fig.* 1.) il peso M che trae la molla EF nella stessa direzione, voglio credere che sarà perfettamente indicato dalle divisioni del cilindro BC; ma quando il cilindro AB debbe portarsi in direzione obbliqua, il suo peso, unitamente a quello del cilindretto BC e della mola EF, si opporrà allo sforzo con cui la corrente inclina il filo, e non so se questo filo si disporrà

nella direzione dell' asse del cilindro. Oltre di che portandosi il cilindro AB a contatto colla molla EF, debbe nascere uno sfregamento, ed un attrito, cui debbe vincersi dallo sforzo della corrente. Ben si vede, che quand' anche ABCM (*tav.* 7. *fig.* 2.) fosse in linea retta, lo sforzo o peso indicato dalle divisioni BC, non sarà veramente tutto intero quello, con cui la corrente tende il filo; ma bensì questo sforzo diminuito dall' attrito anzidetto. Difficile oltremodo sarebbe il mettere a calcolo il peso del cilindro AB e sue appendici: bisognerebbe conoscere la situazione del centro di gravità di questo sistema, per ogni distendimento della molla, onde determinare il momento con cui agisce un tal peso. Adunque, e per la difficoltà di mettere a calcolo il peso della stadera a molla, e per l' altra di valutare l'attrito della medesima; sembrami che questo nuovo strumento del sig. Ximenes, posto a confronto col quadrante di Guglielmini, non possa dirsi uno strumento *di facilità e di accuratezza maggiore*.

53. Di qualche miglior uso potrebb'essere l' altro strumento che il p. Ximenes ci descrive in seguito dell'antecedente, se la sua complicazione non ci facesse desiderare maggiore semplicità, e non desse luogo a dubitare di quella esattezza di risultamenti che ci viene promessa.

Ecco pertanto le parole colle quali ci viene enunciata cotesta invenzione. „ Chi fosse vago di una minutezza, e squisitezza maggio„ re, potrà certamente ottenerla in un altro strumento, ch' io pro„ porrò, il quale non è al caso per le mani volgari, e per le per„ sone di poca intelligenza, ma ordinariamente non si può sfuggire „ questo difetto negli strumenti di gran sottigliezza, che sempre in „ se stessi congiungono una difficoltà maggiore nell' usarli, ovvero „ richieggono maggior perizia in chi li maneggia „.

„ KYZX (*tav.* 7. *fig.* 3.) è un piccol castello composto, come „ è solito negli oriuoli, di due grosse piastre d' ottone, e quattro „ colonnine, che insieme le commettano. ABCD è un tamburo di „ quegli appunto che servono agli oriuoli a molla, con dentro la „ sua molla fissata sull' albero, o fusto *ha* nella cima interiore, e „ nel concavo del tamburo nella cima esteriore. Su questo tamburo „ si avvolga dentro le sue spire scavate una funicella FB, o un „ budello di giusta grossezza, e ad esso sia raccomandato il peso P, „ che può essere uno de' globi, che nel quadrante sono stati adope„ rati. Allo stesso tamburo è innestata una ruota DC di 80. den„ ti, a cui corrisponde un rocchetto H di 8. denti. Questo rocchet„ to si avvolge intorno al fusto *nc*, il quale porta una ruota dentata „ IL di 80. denti. Finalmente un terzo fusto *me* conduce il roc„ chetto M di 8. denti, con una piccola ventola NO, la qual serva

„ per soffermare, e reggere il moto velocissimo del fusto *me*. E ciò „ per quanto spetta alla costruzione interiore. Esteriormente vi so- „ no tre indici. Il primo è l'indice *fe* attaccato al fusto *me*. Que- „ st' indice può indicare le parti centesime delle sue rivoluzioni. „ Al quale effetto si è adesso sottoposto un cerchio, o fascia cir- „ colare divisa in cento parti uguali. Similmente intorno al centro „ *c* descrivesi un altro cerchio, il qual potrà dividersi in 10. parti „ uguali. Al fusto *nc* nella sua porzione *pc*, che riman fuor del ca- „ stello, s' incastri un dente, o una punta d' acciaio, la quale ad o- „ gni rivoluzione del fusto *nc* faccia scorrere un solo dente della „ ruota esteriore GQ; la quale abbia 40. denti, possa girare con un „ canaletto cilindrico intorno all' albero immobile *ha*, e conduca se- „ co l' indice *ba*; il quale in una mostra divisa in 40. parti vada „ indicando le rivoluzioni della ruota *nc*. Tutto questo è fatto, af- „ finchè si possa tener conto delle rivoluzioni di ciascuna ruota, e „ qualunque menomissimo moto del tamburo ABCD possa essere e- „ stremamente sensibile nell' indice *ef*. „

„ Il che affinchè meglio si concepisca, immaginiamo, che il peso „ P si vada tanto aumentando, che ristringendo la molla del tam- „ buro, le faccia scorrere una intera spira. È manifesto che essa „ traendo seco il tamburo, e questo la ruota DC, la ruota DC avrà „ così fatta una intera rivoluzione. In tanto la ruota IL ne avrà fat- „ te 10, e il fusto *me* ne avrà fatte 100. Ma l' indice *ef* indica le „ parti centesime delle sue rivoluzioni. Dunque nel tempo, che la „ ruota DC ha fatta una sola rivoluzione l'indice *ef* avrà indicate „ 10000. parti nella sua mostra, e perciò l' azion di quel peso, che „ ristringendo la molla le avrà fatta scorrere una sola spira, vien „ ad esser divisa in diecimila parti. Intanto l'indice *cd* avrà indi- „ cata la rivoluzione della ruota DC con far 10. rivoluzioni, e l' in- „ dice *ba* avrà indicata la stessa rivoluzione con girare per un quar- „ to di cerchio. Onde se il tamburo farà 4. rivoluzioni, quante so- „ no le spire, che alla molla si possono fare scorrere comodamente, „ l' indice *ba* avrà girato una sol volta, ed indicato così 4. rivolu- „ zioni del tamburo. Ora la molla del tamburo può scegliersi di tal „ grossezza, che coll' aggravarla di una sola libbra di peso, essa ri- „ stringasi in modo, che ne' suoi ristringimenti faccia le 4. detto ri- „ voluzioni. Dunque una libbra, o l' azione di una libbra, sopra „ la detta molla potrà con questo strumento sensibilmente dividersi in „ 40000. parti indicate dal primo indice *ef*. „

„ Or ciò, che fa l' aumento del peso nell'aria ferma, nel fluido „ mosso lo fa l' azione del medesimo fluido sopra il peso P sommer- „ so, congiunta col peso respettivo del globo P. Onde quando l' a- „ zione del fluido insiem col peso respettivo verrà ad equivalere

„ all' azion di una libbra, la macchina avrà patito que' medesimi mo-
„ ti, che pativa per l'aumento del peso di una libbra fuor del flu-
„ ido; cioè il tamburo ABCD colla sua ruota avrà fatte 4. rivolu-
„ zioni, la ruota IL col suo indice *cd* ne avrà fatte 40, il fusto *mo*
„ coll' indice *ef* ne avrà fatte 400, e lo stesso indice *ef* avrà indi-
„ cate 40000. parti nelle divisioni del suo cerchio.

„ Esposte così le parti della macchina, e dimostrata la sensibilità
„ delle piccole differenze, convien pensare ad una rettificazione, di
„ cui essa ha bisogno prima di metterla in uso. Le tensioni della
„ molla, che fanno equilibrio col peso, non sono nella stessa propor-
„ zione delle rivoluzioni delle ruote, come è facile ad intendere.
„ Dunque non si può mettere in opera questo strumento senza pri-
„ ma rettificarlo. Due sorta di rettificazioni possono comodamente a-
„ doperarsi. La prima è di aggiungere alla macchina stessa un altro
„ pezzo simile a quello, che negli oriuoli suol chiamarsi *la pirami-*
„ *de*. L'uffizio di questa piramide scavata a spire è negli oriuoli di
„ uguagliare il momento della molla, facendo, che le distanze delle
„ spire dal centro siano reciprocamente come le tensioni della mol-
„ la, col quale artifizio si viene ad uguagliare il momento della mol-
„ la. Somigliantemente si potranno in un altro solido scavare tali
„ spire, che vengono a rendere il momento della molla in ragion
„ diretta delle rivoluzioni del tamburo. La seconda rettificazione
„ può senza questo nuovo pezzo mettersi in opera. Si comincia ad
„ attaccare all' estremità P della funicella un piccol pesetto, che sia
„ giusto bastante a dar la prima spinta all' indice *ef*. Indi si vada
„ questo di mano in mano, e gradatamente aggravando di pesetti e-
„ guali v. g. di un quarto d'oncia per volta, notando accuratamen-
„ te in una carta il numero delle rivoluzioni, e delle divisioni, che
„ a ciascun quarto d'oncia si conviene. Così giungerassi alla libbra,
„ ed a più, se più bisogna, e si potrà formare una tavola, in cui
„ sia registrato il numero delle divisioni, che ciascuna porzione di
„ peso fa trascorrere, pigliando la parte proporzionale, quando biso-
„ gna. Questa tavola sarà la tavola della rettificazione di questo stru-
„ mento, e dalle divisioni trascorse si potrà subito trovare la gran-
„ dezza del peso, che facendo equilibrio colla molla, le ha fatte
„ trascorrere. „

„ Con questa tavola di correzione l'uso della macchina potrà esse-
„ re il seguente. Il globo P, che potrà essere uno di que' medesi-
„ mi o di ferro o di piombo, che serve al quadrante delle velocità,
„ si lasci primieramente sommergere nel fluido fermo. Il che potrà
„ farsi ancorchè o l'osservatore viaggi, o stando esso fermo, l'ac-
„ qua trascorra. Poichè basterà nell'uno, e nell'altro caso far cala-
„ re il globo dentro un cilindro scavato interiormente, ed aperto da

„ ambe le parti. Tuffando nel fluido di questo stesso cilindro, e lasciando calare il piombino tanto, che resti tuffato nel fluido, ma non esca dal cilindro, si averà il peso respettivo del globo nel fluido, come quieto. Si noti accuratamente il numero delle divisioni, che il peso respettivo farà trascorrere, e da esso nella tavola di correzione si avrà la giusta misura di questo peso. Indi si lasci trasportare il piombino del fluido mosso, e quando l'indice *fe* si sarà fermato, si osservi il numero delle divisioni trascorso, dal quale si ricaverà dalla tavola di correzione la quantità della spinta. Facciasi questa analogia. *Come il peso respettivo del globo sommerso nel fluido quieto, alla spinta dello stesso nel fluido mosso, così il sen totale, al quarto termine di proporzione*, il quale sarà uguale alla segante dell'angolo di deviazione. Conosciuta la segante si conoscerà la tangente dell'angolo stesso. Ma saputa la tangente, e il globo adoperato, si sa la velocità del fluido. Dunque sarà così nota la cercata velocità; e assai più sottilmente, che con altri strumenti finora trovati. Questo strumento pare di maggior perfezione, e si può adattare a qualunque velocità. Ma a me basterà di accennare le parti, e gli usi principali di esso. Poichè qualunque geometra potrà dalle cose già dette ricavar diversi metodi di determinar le velocità, e diverse maniere di applicare, e adoperar lo strumento, che ho proposto. „

Ximenes con questi tachimetri non sa allontanarsi dal metodo di determinare la velocità delle correnti per mezzo dell'inclinazione del filo. È persuaso che la curvatura del medesimo possa indurre un divario non trascurabile (51.), ma ne vuol sempre prescindere. Se avesse riflettuto, che lo sforzo cui egli determina colla sua macchinetta, non è altro che la tensione del filo fuori dell'acqua, e che questa tensione è la medesima anche per tutti i punti del filo immerso, avrebbe trovato un modo più semplice e più esatto, onde determinare la misura delle velocità di qualsivoglia corrente. Ma noi vedremo più innanzi come di ciò si sia avveduto l'illustre professore Venturoli, e come abbia cercato di dar l'ultima mano al perfezionamento del pendolo di Guglielmini senza valersi nè di ruote, nè di molle, nè di altri complicati artifizj, che rendono sempre incerte le operazioni, e poco esatti i risultamenti delle medesime.

54. Il p. Ferrari Bernabita, in una sua dissertazione idraulica stampata in Milano l'anno 1797, dopo di aver mostrato il suo pensamento in ordine all'uso delle aste ritrometriche di Bonati, propone una sua modificazione al pendolo di Guglielmini, colla quale pretende di supplire ai difetti delle aste anzidette, e di avere trovato l'opportuno strumento onde misurare *la scala delle velocità in tutta un'intiera sezione di un fiume, che a molta profondità si estenda*.

Non avendo tra le mani la dissertazione del p. Ferrari, ne riferirò l'invenzione, trascrivendo le parole colle quali il Bonati la descrive nella sua memoria inserita nel tom. 8. parte seconda della Società Italiana.

„ Consiste questo strumento in un pendolo, o sia in un filo AB „ (*tav.* 7. *fig.* 4.) attaccato a un punto fisso A fuori dell'acqua, e „ che sostiene un cilindro BC più pesante dell'acqua, immerso sotto „ la superficie DV di un' acqua corrente da D verso V, e che tiene „ il pendolo deviato dal perpendicolo AD. Prescrive l'autore, che „ l'estremo superiore B stia sempre appena sotto la superficie DV „ dell'acqua, il che si ottiene, allungando, ed accorciando opportunamente il filo AB „.

„ Questo cilindro BC si dee poter fare lungo, e corto a piacere „ perchè dev' essere composto di più cilindri piccoli, tutti eguali „ tanto nella lunghezza che nel peso, che devono potersi unire e „ disunire quando si voglia „.

„ Comincia una sperienza con un solo dei cilindri piccoli CF „ (*tav.* 7. *fig.* 5.) lungo per esempio mezzo piede, e nota l'angolo „ BAC. Indi aggiunge un altro cilindro KG. Nel caso, che la velocità dell'acqua dalla superficie in giù si conservi la stessa, mostra „ l'autore che il filo resterà in AC, e che se la velocità dalla superficie al fondo sarà crescente il filo passerà come in AD. In „ quest' ultimo caso nota l'altr' angolo BAD. Indi aggiunto un nuovo cilindro OP nota il terzo angolo BAE; e così di seguito. „

„ Con questi angoli, e col sapere il peso di ogni cilindro, e quello di un egual volume di acqua, calcolando trova delle formole di „ velocità, una per l'acqua che va contro il cilindro CF, un'altra „ per l'acqua, che dee investire il cilindro KG, un'altra per l'acqua del cilindro OP, ec. „

Bonati esaminando la teoria di cotesto strumento, ha trovato falsa l'ipotesi in essa stabilita, che cioè l'inclinazione del filo al perpendicolo sia quella stessa del cilindro urtato dalla corrente. Ma oltre di questo difetto teorico, di cui ragioneremo a suo luogo, sembrami che anche in pratica l'invenzione del p. Ferrari patisca le sue eccezioni. Nota già il Bonati, che sperimentando in una sezione della profondità di venti o venticinque piedi, quaranta o cinquanta immersioni si dovrebbero effettuare, giacchè vuole l'autore, che ciascun cilindretto di che è composto il nuovo pendolo, sia lungo mezzo piede. Ora i cinquanta angoli BAC, BAD, BAE ec. anderanno successivamente crescendo se le velocità cresceranno dalla superficie al fondo, ed anderanno diminuendo, se le velocità diminuiscono. In quest'ultimo caso, che è quello appunto cui segue la natura nel corso de' fiumi, esigendo la perfezione di un tale strumento che i

decrementi dell' inclinazione del filo al perpendicolo siano sensibilissimi, bisognerà che il maggior angolo sia assai grande, e perciò che il peso di ciascun cilindro non sia molto raguardevole. Se dunque dovrà esser piccolo il peso di ciascun cilindro, come potremo esser certi di non avere quelle stesse agitazioni che nell' uso del pendolo ordinario, impediscono che si conosca esattamente l' inclinazione del filo? Ma è già inutile fermarsi a parlare degli usi di questo strumento, dopo che è stato dimostrato esser falso il principio su cui fondasi la sua teoria.

55. Passerò piuttosto a mostrare la più perfetta fra tutte le modificazioni fin' ora suggerite onde perfezionare il pendolo di Guglielmini (53); colla quale il prof. Venturoli, che ne è l' inventore, si lusinga che possa adoperarsi sì fatto strumento, senza temere la fallacia della curvatura del filo, e di molti altri inconvenienti, che rendono l' uso del medesimo, incerto ed inesatto. Ecco quali sono le parole colle quali ci enuncia il suo divisamento.

„ L' impressione della corrente che incurva il filo AMG (*tav.* 7. „ *fig.* 6.) spinge ogni suo latercolo o elemento MN secondo la dire„ zione NR perpendicolare ad esso latercolo. Adunque se noi tra„ scuriamo il peso proprio del filo, il qual peso è pochissima cosa „ a fronte dell' estrinseco impulso dell' acqua che lo investe, questo „ filo AMG è sollecitato in ogni suo punto da una forza normale al „ filo stesso. Ma ella è proprietà conosciuta d' un filo flessibile in„ curvato da forze normali, che la tensione del filo è costante, cioè „ uguale in tutti i punti della curva. Pertanto qualunque siasi la „ scala delle velocità della corrente tra i punti A, e G e qualunque „ siasi la curva AMG che il filo ne prende, abbiam di questo cer„ tezza, che la tensione del filo sarà in tutti i suoi punti la stessa; „ e però uguale alla GF che rappresenta lo sforzo composto del pe„ so proprio della palla, e dell' urto ch' essa riceve dall' acqua „.

„ Questa semplice osservazione suggerisce da se medesima il modo „ di trarre buono e sicuro partito dal pendolo per la misura delle „ velocità. Si tralasci di osservare la declinazione del filo, e in „ quella vece si misuri piuttosto la sua tensione, la quale non di„ pende punto dalla sconosciuta curva AMG, ed è sicuramente e„ spressa dalla diagonale GF. Il modo di misurar la tensione è fa„ cilissimo. Basta far passare il filo in B sopra un' agilissima puleg„ gia, ed attaccare all' altro capo un equipondio T capace di sostene„ re la palla. Il peso T rappresenterà la ricercata tensione, e quin„ di la GF. Essendo poi GF diagonale d' un rettangolo del quale „ già si conosce il lato verticale GH, peso della palla sull' acqua, „ se ne conoscerà subito il lato orizzontale GK, cioè la spinta del„ l' acqua contro la palla, e quindi la velocità del corso nel punto G.

„ Così la misura delle velocità che per via dell' angolo di declina- „ zione riusciva incerta ed ingannevole, si ottiene sicurissima me- „ diante l' osservazione del peso che tiene la palla in equilibrio. „ (*)

Niuno certo potrà negare, che questo metodo del sig. Venturoli di far uso del pendolo idrometrico, non sia il più semplice, ed il più sicuro di tutti gli altri già descritti. Rimarrebbe solo a desiderare che fosse messo alla prova, per verificare se in atto pratico riesca agevole il determinare con tutta precisione il peso T che tiene equilibrata la palla, e la profondità della medesima sotto la corrente. Quelle agitazioni del filo, che prima impedivano di misurare esattamente la sua inclinazione, dubiterei che potessero disturbare la giusta misura di questo peso. Pur tuttavia l' errore sarebbe sempre tale, da non condurci a risultamenti così erronei, come col metodo ordinario; onde io concludo esser questo, il miglior modo di far uso del pendolo idrometrico.

56. Vuole ora l' ordine del mio ragionamento, che si continui a parlare di que' tachimetri idraulici, ne' quali s' adoperano palle attaccate a fili flessibili. Due ne abbiamo, i quali per la loro somiglianza, debbono esser descritti l' uno dietro l' altro, secondo che si succedettero. Il primo fra questi è quello che il sig. Anton-Mario Lorgna ci descrive in una sua memoria idraulica, ne' termini e modi seguenti.

„ Sia ABBDC (*tav. 7. fig. 7.*) un' asta di legno lunga qualche „ piede più che non è la profondità del canale in cui si vuol far „ saggio della velocità, e grossa due pollici o tre al più per ogni „ lato. Lungo la faccia DB sia fatto un incavo in cui possa appli- „ carsi e assettarsi un cilindretto vuoto di latta EF, o di legno an- „ cora, di un pollice in circa di diametro, il quale in una fessura „ fatta in G porti stabilmente una girella di metallo di un pollice „ parimenti di diametro, mobilissima intorno al proprio asse. Que- „ sto tubo vuol essere fermato, ove più aggrada, per mezzo de' due „ braccialetti HI, KL. Un filo o cordoncino di seta cruda sia legato „ in M al braccio più corto d' una bilancia MN appesa e mobile in- „ torno all' uncino O di metallo assicurato alla testa dell' asta DG; „ il qual cordoncino passando pel tubo, quasi asse, si applichi alla „ girella G, e uscendo fuori metta capo, diramato in tre, al cer- „ chio massimo d' una mezza palla P. Questa mezza palla d' un pol- „ lice e mezzo o due di diametro in circa, sia, se si vuole, di le- „ gno, in cui abbiasi a poco a poco infuso tanto piombo, quanto „ è sufficiente per renderla di gravità specifica eguale a quella

(*) *Opuscoli Scientifici* Tom. I. pag. 82. Bologna 1817.

„ dell' acqua dolce, sicchè obbedisca al solo impulso del fluido in qua-
„ lunque parte sia collocata, e sia poi con ottima vernice ricoperta,
„ perchè si renda all'acqua impenetrabile. La bilancia oltre il suo
„ cotrappeso ordinario Q porti in N una piccola conchetta metalli-
„ ca, o voglia dirsi lance, sospesa al solito per tre fili al punto N,
„ affinchè mentre il peso Q indica le libbre, le once ec., nella
„ conchetta possano le più piccole minuzie di peso aggiungersi co-
„ modamente. Su d' una delle facce del travicello finalmente si fac-
„ cia una scala di piedi, pollici ec.; onde possa sempre fermarsi la
„ girella, come in G, a qual distanza si vuole da BB. Veduto della
„ forma veggiamo l' uso dello strumento. „

„ Fermato, che sia il tubo al segno voluto, s' immerga nell' ac-
„ qua corrente l' asta colla faccia DB a seconda, conficcando la pun-
„ ta A nel fondo sino a BB, e mantenendola ritta quanto è possibile.
„ Svincolato il filo M, si lasci che l' acqua trasporti l' emisfero a due
„ o tre piedi di distanza circa, come in P, cioè a tanta unicamen-
„ te a quanta può giudicarsi esente l' acqua dal risentirsi dell' impe-
„ dimento dell' asta, e si equilibri poi l' impulso che riceve l' emi-
„ sfero col peso Q, e col di più che s' avesse aggiunto in N. Si no-
„ ti il peso totale che risulta dall' esperimento, e l' assoluta veloci-
„ tà ragguagliata di quella parte di fluido che investe la superficie
„ piana dell' emisfero sarà immediatamente cognita, come vedremo.
„ Imperciocchè se sia noto qual velocità assoluta può imprimere co-
„ tal peso ritrovato alla superficie istessa, e se abbia egli da mover-
„ la uniformente per un' acqua stagnante, dessa per appunto è
„ l' assoluta velocità ragguagliata competente al sistema di forze dif-
„ formi, che attualmente urtano nella stessa superficie ridotta ad u-
„ na forza uniforme. „ (*)

Per poco che si consideri, l' uso di questo tachimetro, di leggieri se ne scoprono gl' inconvenienti. Acciocchè il peso che si legge nella stadera sia l' esatta misura dello sforzo della corrente contro l' emisfero P, bisogna che il filo GP si distenda mai sempre nella direzione della corrente, alla qual direzione dovrà essere perpendicolare l' asta ACD. Ora essendo il peso specifico dell' emisfero P quello stesso dell' acqua, una tale condizione sarà adempita allorchè si misura la velocità superficiale, ma nelle immersioni più profonde, porto opinione che il filo si disporrà in linea obbliqua, e che quindi una sola parte dell' urto sarà notato dalla stadera. Nè si può togliere sì fatto inconveniente col prendere una palla più pesante dell' acqua, perchè allora poi tenderà al fondo, ed il filo s' inclinerà

(*) *Memorie intorno alle acque correnti*. Verona 1777.

in senso contrario. Bisognerebbe avere tante palle quanti sono gli strati nell' altezza della corrente che si sperimenta, le quali fossero di tal peso specifico da fermarsi, e mantenersi stabilmente, in quello di questi strati che piacesse. Ma ognuno vede quanto ciò sarebbe penoso e difficile.

57. L'altra invenzione da me or' ora accennata, è quella che il sig. ingegnere Tommaso Barbantini ci ha descritta nella sua lettera dedicata al sig. Cav. Giovambatista Giusti; e che immaginò senza conoscere la precedente del sig. Lorgna. Suppone il sig. Barbantini, che si debba fare le sperienze in un fiume d' insigne portata, come sarebbe il Po-grande, e perciò nel descrivere la sua macchinetta le assegna misure tali che in altri alvei sarebbero esuberanti. Ecco pertanto la descrizione di questo strumento quale si legge nell' opuscolo di quell' ingegnere (*).

„ Costruita una zattera AB sopra travi robusti (*fig.* 1.) (**), della larghezza di metri 5, e della lunghezza di metri 6; il primo „ pensiero sarà quello di tenerla immobile sulla superficie dell' acqua corrente (potrebbono forse contribuire all' immobilità della „ zattera, delle dimensioni anche maggiori). A tale effetto io, „ immagino un' ancora C alla parte anteriore, a corso d' acqua, e „ due D, E alla parte posteriore, disposte come nella fig. 2. L' estremità anteriore de' travi sarà tagliata in ismusso nella parte inferiore, e nelle parti laterali, onde finisca in punta, e non presenti che il minore ostacolo possibile al corso superficiale del „ fiume „.

„ Un' asta di abete lunga circa met. 6,84, larga nella parte posteriore m.i 0,14, e tagliata a pigna o partiacqua nella parte anteriore (*fig.* 3.) in modo che l' angolo in S sia distante dalla faccia posteriore m.i 0,18. „

„ Quest' asta traforata ad ogni distanza di m.i 0,38 come si vede „ nella fig. 1, onde introdurre ne' fori una caviglia P (*fig.* 5.), per „ sostenerla sul ceppo M (*fig.* 1. e 5.), che potrebbe essere alto „ sopra il piano della zattera m. 0,38. „

„ Alla estremità superiore, ed inferiore dell' asta, saranno solidamente collocate due carrucole di uguale diametro, e per rapporto „ alla costruzione di quella inferiore G (*fig.* 1.), se ne parlerà in „ seguito „.

(*) *Nuovo tentativo per iscoprire la scala delle velocità ec.* Bologna 1814. pag. 15.

(**) *Le figure che si citano, appartenenti a questo tachimetro del sig. Barbantini, sono nelle tavole 8.ª e 9.ª. Ciò sia detto per non avere da citar sempre queste tavole.*

„ Sopra le carrucole, che si suppongono sempre perfettamente
„ mobili, si passerà un cordonetto di seta sottile, fatto a quattro
„ capi, e non torto, ovvero un nastro all' estremità superiore del
„ quale sarà attaccata la bilancia L, ed alla estremità inferiore la
„ palla T. „

„ Questa palla del diametro di met. 0,19, sarà formata di legno
„ compatto, o di metallo, vuota in due semisfere che possano unir-
„ si a vite esattamente, rimanendo tornita con perfetta sfericità. Se
„ la palla sarà di legno, dovrà essere ricoperta di una vernice im-
„ penetrabile all' acqua „.

„ Invece del cordonetto, io crederei più opportuno un nastro di
„ stretta superficie, perchè questo non ha rigidezza, ed è di più
„ facile flessibilità. La difficoltà che si trova a far piegare le corde
„ secondo una data curvatura, è una delle cause che diminuiscono
„ l' effetto delle forze applicate alle macchine „.

„ La bilancia L (*fig.* 4.) ha un piano quadrilatero in L, da quat-
„ tro angoli del quale, partono quattro fili che si uniscono insieme,
„ e si attaccano al nastro „.

„ Alle due estremità di una diagonale sorgono due piccoli ferri ri-
„ curvi, come LQ, uno de' quali termina in punta, che serve da
„ indice, l' altro Q è fatto solo per l' equilibrio della bilancia. Sot-
„ to la base L vi è una coda V, la di cui destinazione sarà espres-
„ sa nel metodo di fare le sperienze „.

„ Lateralmente all' asta, ed in qualche distanza da essa, sarà col-
„ locata verticalmente una lastra d' ottone, sostenuta da un piano
„ orizzontale, solidamente fermato coll' asta, come si vede nelle fi-
„ gure 1, 3, 5 colle lettere H, ed R. Nella metà verticale di questa
„ lastra, sarà collocata una stretta lamina O, che può essere inar-
„ gentata, sulla quale sarà fatta un' esatta divisione in millimetri: ed
„ affinchè questa lastra d' ottone non sia soggetta a movimenti, sarà
„ nella sua parte superiore fermata colla incassatura della carruco-
„ la F. „

„ La lastra orizzontale d' ottone R, avrà un' apertura rettangolare,
„ espressa per ZZ (*fig.* 8.), dentro la quale passerà la corda V del-
„ la bilancia L: ed acciocchè nell' ascendere e discendere la bilan-
„ cia lungo l' apertura del piano sottoposto, soffra la minor possibi-
„ le quantità di frizioni, si apporranno a giusta distanza, e per-
„ fettamente mobili, due rotelle, come si veggono disegnate nella
„ fig. 3. „

„ Il secondo motivo che mi ha determinato all' idea di queste
„ rotelle, sarà espresso nella descrizione dell' uso di questo stro-
„ mento „.

„ Il filo o nastro disteso fra le carrucole F, e G, sarà racchiuso

„ da un tubo cilindrico di metallo, in modo che il moto, e la si-
„ tuazione del nastro sia sempre indipendente da ostacoli nella
„ parte interna del tubo, che deve essere perfettamente pulita, e
„ dalla impressione che potesse essere prodotta sopra di esso dalla
„ corrente di qualche filamento acqueo, da cui fosse urtato. Ogni
„ ostacolo immobile posto contro la corrente dell'acqua, per quanto
„ la figura dell'ostacolo stesso sia vantaggiosa alla facile separazione
„ de' filamenti acquei, non ostante produce sempre una intumescen-
„ za alla parte anteriore, ed una cavità alla posteriore.

„ Le altezze verticali di questo disequilibrio, producono una pre-
„ sione verso la cavità, che viene generata dal fluido che s'intro-
„ duce nella cavità stessa, mentre scende dalla intumescenza lungo
„ i lati dell'ostacolo „.

„ Mediante il suddetto tubo si rende nulla sul filo l'azione dell'ac-
„ cennato disequilibrio.

„ Finalmente la carrucola G ha bisogno di una incassatura fatta in
„ modo, che il cordone o nastro, non vada mai per qualunque com-
„ binazione ad incastrarsi nella cassa della medesima carrucola. Que-
„ sto disordine l'ho io veduto seguire frequentemente nelle taglie,
„ o girelle semplici, nell'atto di alzare de' pesi, o trasportare de'
„ materiali sopra le fabbriche. Un urto accidentale leva la corda di
„ forza, la discosta dalla superficie della girella, e nel ricadere in
„ gargame, alle volte s'impegna fra la girella e la cassa, dopo di
„ che diventa laboriosa, e non disgiunta da pericoli, l'operazione
„ di rimettere la corda in azione „.

„ La fig. 6. dimostra il mio pensiero per questa incassatura. Due
„ lastrine di ottone *aa* (*fig.* 1., e 6.) saranno traforate in manie-
„ ra, che le teste, o parti piane della carrucola possano passarvi. Il
„ diametro del foro nelle lastrine, sarà di una piccola cosa maggiore
„ del diametro delle teste della carrucola, onde possa girare senza
„ la minima frizione. Queste medesime teste piane saranno larghe
„ tanto, che la metà di esse resti dentro, e l'altra metà fuori delle
„ due lastre d'incassatura. Un telaro esterno *bb* avrà i fori, dentro
„ i quali aggireranno i perni della carrucola. In questo modo per
„ ogni dibattimento, o non tensione del nastro, esso dovrà sempre
„ ricadere nel gargame della carrucola „.

Nell'uso di questo strumento, propone il sig. Barbantini, che si
scelga „ un tratto di fiume, della lunghezza di circa 880. metri per
„ quanto è possibile rettilineo, e regolare nelle sponde, senza bot-
„ te, e ostacoli nel fondo „.

Io non credo che sia necessaria tanta lunghezza; imperocchè se il
sig. Bonati, che avea bisogno di un tratto considerevole onde deter-
minare colla possibile diligenza la velocità del cammino dell'asta,

soggiunse che bastava una lunghezza di m.[i] 116,9424 (43); non basterà ora cotesta lunghezza, mentre si tratta di uno strumento fisso, e di una palla che poco dal medesimo s' allontana? A me pare che sì: ma qualunque siasi questa lunghezza, la scelta di un tratto di fiume de' più regolari, è certo cosa essenzialissima.

Insegna inoltre il sig. ingegnere il modo di fermare stabilmente la zattera nel filone del fiume, il quale consiste nel ridurre le funi delle ancore alla maggior tensione possibile, col mezzo del seguente congegno. „ Si avranno tre pezzi di corda, un capo delle quali fermato al punto A, e gli altri due al punto B (*fig.* 2.), passeranno „ gli altri capi in tre taglie semplici assicurate ai punti y, y, y „ delle funi delle ancore. Stando sulla zattera si può dare a questi „ tre capi di corde quella tensione che si desidera, assicurando le „ corde tese a tre anelli che saranno fermati sulla superficie della „ zattera. Questa tensione deve essere però tale, che la zattera abbassandosi, non permetta all' acqua di salire sopra di essa. „

Perchè poi l' asta FG, insieme alla palla T (*fig.* 1.) possa più e più profondarsi sotto la corrente, prescrive il sig. Barbantini, che nel mezzo della superficie della zattera vi sia tale apertura, onde possa passarvi liberamente l' asta e sue appendici. E perchè poi cotesta apertura sarà troppo grande all' intendimento di far scorrere per essa l' asta verticale FG, così immagina che il ceppo M sia diviso in due parti nel senso verticale, abbia nel mezzo un incastro corrispondente alla figura dell' asta, e si possa fermare intorno alla medesima, col mezzo di opportune viti di pressione, siccome vedesi rappresentato dalla fig. 3.

La coda V della bilancia, è destinata alla verificazione del perpendicolo dell' asta; il qual perpendicolo viene procurato, o col distribuire opportunamente alcuni pesi sulla zattera, od in altro modo qualunque. „ Allora che la circonferenza di questa coda V (*fig.* 3.) „ si manterrà a uguali distanze dalle girelle senza toccarle, sarà l' a„ sta verticale, poichè il centro V della coda, e la circonferenza, „ dalla parte esterna, della carrucola F, debbono essere equidistan„ ti dall' asta. „ Ecco il secondo motivo pel quale il sig. Barbantini immaginò queste due girelle.

Dopo tutto questo è facile concepire il modo di adoperare lo strumento. Si comincia coll' immergere l' asta a tale profondità, che abbandonata la palla alla corrente stia tutta immersa sott' acqua, ed abbia tangente la superficie di questa. La lunghezza GT (*fig.* 1.) del filo, per questa prima immersione (e fors' anche per tutte le altre, giacchè più non se ne parla), oppina il sig. ingegnere debba essere di metri 9,50, onde la superficie dell' acqua non risenta le alterazioni prodotte dalla zattera e sue armature. Trovato quel peso che fa equilibrio coll' urto della corrente contro la palla, si può

calcolare la velocità della medesima in superficie, dietro le conosciute leggi delle resistenze de' corpi esposti all'urto di una corrente. Ripetendo l'esperimento coll'andar profondando successivamente l'asta per la lunghezza di 38. centimetri circa, si troverà con qual serie di pesi fa equilibrio l'urto che riceve la palla nelle successive immersioni, e quindi con qual legge variano le velocità della corrente dalla superficie al fondo.

I pesi dai quali risulta la legge delle velocità, si debbono dedurre; 1.° dal peso della bilancia; 2.° dal peso ond' è caricata; 3°. dal peso del filo; 4.° e dall'attrito delle carrucole e rigidezza del filo.

L'uso a cui è destinato l'indice della bilancia, viene indicato dal sig. Barbantini colle seguenti parole. „ L'indice della bilancia „ stabilirà un segno della divisione della scala O (*fig.* 1.), che sa„ rà sempre il piano d'equilibrio di tutte le immersioni. La diffe„ renza nelle indicazioni della scala, farà conoscere lo sbaglio nella „ somma de' pesi, e dalla parte del filo, e dalla parte della bilan„ cia, o per parte degli attriti, o per la frizione della coda della „ bilancia stessa „.

Fa osservare il sig. Ingegnere, che atteso il poco accordo fra la teoria e l'esperienza, in ordine alla determinazione dell'urto di un fluido contro una data superficie immobile, può servire, nell'uso pratico di cotesto strumento, l'espressione de' pesi per la scala delle velocità; e può quindi bastare una misura relativa di queste, non potendosene avere con certezza, la misura assoluta.

Non si può negare, che generalmente parlando, la misura dell'urto de' fluidi contro i corpi solidi non sia ancora incerta, o poco esattamente stabilita. Pur tuttavia per l'oggetto del quale si tratta, sembra che l'esperienza abbia abbastanza comprovato, che la misura assoluta dell'urto di un fluido indefinito contro una superficie piana qualunque, eguaglia il peso di un prisma del fluido premente, il quale abbia per base la superficie urtata, e per altezza quella da cui cadendo un grave liberamente, acquista la velocità dell'urto. Inoltre, che l'urto di una corrente contro una sfera (almeno nelle mediocri velocità), è la metà di quella cui soffrirebbe il suo circolo massimo (*). Da questi principj si può trarre facile e sicuro partito, onde ottenere la misura assoluta delle velocità, da quegli strumenti che sono fondati sui medesimi divisamenti.

58. Passiamo ora a parlare delle difficoltà cui sembrano affacciarsi nell'uso di cotesto strumento. E giacchè trovo che il sig. Barbantini le propone a se stesso, e cerca di appianarle; così io mi

(*) Belidor, *Arch. Hyd.* Paris 1819. Tom. I. pag. 353, Nota del sig. Navier.

contenterò di trascriverle siccome stanno nell' opuscolo summentovato, soggiungendo i miei riflessi quali che siano, onde possa ognuno conoscere il mio pensamento.

„ La prima di queste difficoltà riguarda l'altezza troppo grande
„ della bilancia sopra il piano della zattera, posto che la carrucola
„ F e la bilancia, sieno fissate alla estremità superiore dell'asta, e
„ che l'asta stessa sia fermata al primo foro inferiore, e la palla al-
„ la superficie dell'acqua. Questa posizione può essere malagevole
„ per qualche esperimentatore „.

„ La seconda si aggira sul dubbio di non riuscire che a stento,
„ a ridurre la palla specificamente pesa come l'acqua, e più ancora
„ come i diversi strati dell'acqua stessa del fiume sotto la super-
„ ficie „.

„ La terza, sulla possibiltà che la palla, qualora la zattera non
„ sarà nel filone, ma lateralmente ad esso, devii dal paralellismo del-
„ le sponde, dirigendosi, all'esempio de' galleggianti, verso il filo-
„ ne, facendo fare al filo o nastro, un angolo col diametro della
„ carrucola G „.

„ La quarta, che il mio stromento non rassomiglia nella semplici-
„ tà, e nella facilità di esperimentare, al tubo di Pitot, alla fiasca
„ di Nadi, alla palla-a-pendolo, alla ventola di Ximenes, alle sfere
„ di Brunacci, all'asta di Cabèo, e dalla ritrometrica di Bonati „.

„ Per la prima, io credo che le dimensioni prescritte per la zat-
„ tera sieno tali, da permettere che l'osservatore si accosti alla som-
„ mità dell'asta, mediante una scalinata di tavole di sette, o otto
„ scalini, armata di manutegno laterale per sicurezza dell'osservato-
„ re. Ma laddove questi non avesse abbastanza franchezza per ascen-
„ dere in alto, nè trovasse in questa situazione abbastanza comoda
„ per operare, allora può farsi la lastrina H, e l'armatura della
„ carrucola F, scorrevole intorno all'asta; mediante una lastra d'ot-
„ tone che circondi l'asta medesima da fermarsi colla vite N, come
„ nelle fig. 1, 3, 5. Il tubo che racchiude il filo, basterà che giun-
„ ga alla carruccola F, allora che si trova nella prima posizione
„ che sarà comoda all'osservatore. In questo modo per la prima im-
„ mersione della palla, la bilancia potrà essere alta sopra il piano
„ della zattera m.^{i} 1,90. A questa altezza si potranno fare con comu-
„ do le osservazioni, e potranno continuarsi per l'altezza di m.^{i} 1,52,
„ discendendo l'asta per le successive immersioni. Giunta la lastrina
„ H col piano N al ceppo M, e ritirata col filo la palla presso la
„ carrucola G, s'innalzerà la lastrina per m.^{i} 1,52, tenendo a calco-
„ lo il peso del filo allungato „.

„ Operando così successivamente ogni m.^{i} 1,52 di altezza, si giun-
„ gerà alla estremità superiore dell'asta, senza incomodo e pericolo.

„ Qualora poi la lunghezza dell'asta non si volesse tutta di un pez-
„ zo, si può fare di due o tre pezzi, da unirsi co' metodi comu-
„ ni, la descrizione de' quali mi renderebbe soverchiamente pro-
„ lisso „.

Pare a me, che si debba quivi aggingnere, che anche il tubo che racchiude il filo debba essere di più pezzi, da unirsi fa loro a vite, o in altro modo qualunque, ogni qual volta la bilancia sarà sollevata per lo spazio di m.i 1,52, di altrettanto dovendosi alluogare il tubo, a volere ch'ei giunga fino alla carrucola G.

„ Sarà distrutta la seconda e terza difficoltà (segue il sig. Barban-
„ tini), sostituendo alle palle della di cui specifica gravità si dubi-
„ tasse, uno de' due metodi seguenti. „

„ 1.° Cotesta palla potrebbe essere specificamente più grave del-
„ l'acqua, e si potrebbe sostenere alle diverse profondità corrispon-
„ denti alle immersioni dell'asta, con un galleggiante di sughero A
„ (*fig.* 7.), al quale restasse unita con un filo DAB, da allongarsi
„ per ogni immersione „.

„ In un foro preparato nel mezzo della superficie del sughero,
„ che può essere quadrilatera, può scorrere un filo accomodato con
„ diversi gruppi, distanti fra loro come i fori dell'asta. Nel ritira-
„ re la palla, come si è detto per ogni immersione, si può far di-
„ scendere un gruppo del filo, fermandolo al sughero in modo che
„ il capo B dal filo stesso possa essere tenuto in mano stando sulla
„ zattera, per regolare il galleggiante, affinchè non si acosti dall'a-
„ sta di più della palla, e sia sempre in una linea perpendicolare
„ ad essa. Se si lasciasse libero il galleggiante, egli precederebbe
„ sempre la palla, esercitando sopra di essa un'azione estranea a
„ quella della semplice percossa del fluido. La curva filare ACD,
„ non dovrebbe esser mai tanto grande, da avvicinare sensibilmente
„ la palla al galleggiante, togliendola di posizione „.

„ 2.° Il tubo che racchiude il filo, ch'io faceva giungere fino alla
„ carrucola G, volterà in isquadra all'asta, e a seconda della dire-
„ zione del filone, per la lunghezza di m.i 1,90, sostenendone il
„ peso con un tirante, che dalla metà della lunghezza di questo
„ tubo, vada alla parte superiore dell'incassatura della carrucola. La
„ palla dovrà mantenersi sempre m.i 0,38 lontana dall'orificio del
„ tubo, affinchè il di lei moto sia libero; sarà sempre facile di as-
„ sicurarsi se la palla è libera, e discosta dall'orificio del tubo,
„ movendo il filo dalla parte della bilancia „.

„ Anche in questo caso la palla dovrà essere specificamente più
„ pesante dell'acqua, e sostenuta collo sughero, come si è accenna-
„ to di sopra, affinchè la direzione dell'asse del tubo, al centro del-
„ la palla sia rettilinea. Se la palla non fosse sostenuta, inclinerebbe

„ verso il fondo, facendo soffrire una frizione sensibile al filo, sul- „ l'orificio del tubo.

„ Con questo piccolo meccanismo, quando anche la palla deviasse „ dalla direzione del tubo, cotesta deviazione sarà tanto piccola, sia „ nel senso orizzontale, che verticale, che non porterà alcuna aber- „ razione nell'esperimento „.

La prima di queste due difficoltà è quella stessa cui abbiamo osservata nel tachimetro di Lorgna (56). Il modo col quale il signor Barbantini cerca di ovviare a questo inconveniente, oltre che introduce maggior imbarazzo nell'uso dello stromento, non mi pare il più opportuno. Le forze che sollecitano la palla in ciascuna immersione, non è più il solo urto della corrente. La curva filare ACD sostiene la palla con una forza eguale alla tensione del filo nel punto D (*fig.* 7.), diretta secondo la tangente della curva, e questa tensione è prodotta dal contrasto fra le impressioni dell'acqua contro il filo, e il peso della palla. La determinazione di questa tensione non è cosa di poco momento; essa dipende dalla cognizione della scala delle velocità, che è ciò che si cerca. Pare che il sig. Barbantini sia persuaso che questa curva sarà sempre piccolissima; ed io la dubito considerevole, massimamente nelle profondi immersioni, e nelle circostanze, ch'egli considera, di un fiume di insigne portata, ed in piena. Per quanto sia piccola la grossezza del filo, la grande forza dell'acqua produrrà una pressione contro di esso, in virtù della quale sarà tanto più incurvato quanto più piccola è la differenza fra il peso della palla e quello di un eguale volume di acqua. Ma sia pur piccola quanto si voglia questa curvatura, non sarà mai una linea verticale; e la tensione nel punto D non sarà mai eguale e contraria al peso con cui la palla tende a discendere, lo che è ciò cui debbe verificarsi nell'uso di questo tachimetro, se vuolsi esattezza ne' risultamenti.

Soggiunge inoltre il sig. Ingegnere, che „ la posizione della zattera per gli esperimenti sulla linea trasversale del fiume, al di „ qua, e al di là del suo filone, non è rigorosamente prescritta: che „ quando anche la palla deviasse verso il mezzo del fiume, questa deviazione sarà costante per tutte le immersioni, onde si „ avrà la scala delle velocità sopra una linea perpendicolare, che si „ scosta da per tutte di qualche piccola cosa dalla linea dell'asta „.

Convengo anch'io, che cotesta inclinazione debb'essere assolutamente piccola, giacchè ne' tratti regolari di un fiume i galleggianti percorrono linee che poco s'allontanano dall'essere parallele alle sponde: ma dove avesse luogo una sensibile inclinazione, non so se fosse costante per tutte le immersioni, dovendo dipendere dal moto dell'acqua che certo è variabile. E quand'anche si potesse ritenere

siccome costante, come potrà determinarsi, onde conoscere la perpendicolare a cui corrisponde la scala delle velocità, che si vuol calcolare, e la sua influenza nell'urto della corrente contro la palla. Nè a togliere quest'inconveniente sarebbe opportuno il tubo orizzontale che racchiude il filo, perocchè con esso si aumentano le resistenze, per lo sfregamento del filo stesso contro le pareti interne di cotesto tubo.

Risponde finalmente il sig. Barbantini alla quarta difficoltà più sopra indicata, colle seguenti parole. „ Se colla pura semplicità delle „ macchine proposte fin'ora, non si è potuto riconoscere lo stato „ reale e fisico in cui si trovano i fiumi in natura: se il numero „ degli elementi che concorrono a produr moto in una massa fluida, „ che si presentano simultaneamente in un fiume, non possono essere „ separati da strumenti semplicissimi: se per il corso di tanti anni „ non si è ritratto alcun sensibile vantaggio dalla semplicità de' „ mezzi impiegati per iscuoprire la scala delle velocità, bisogna „ concludere che per siffatti ritrovamenti, è necessario d' impiegare „ de' metodi più efficaci, e che una gelosa semplicità di macchine „ non pare approposito, perchè non ha prestato al genio degli inventori di esse, quantunque dottissimi nelle scienze fisico-matematiche, che de' soccorsi insufficienti per affrontare il complesso „ delle proprietà coesistenti nel moto de' fiumi, ed ha reso disgraziatamente i loro tentativi sterili e infruttuosi „.

„ Non crederò pertanto di essere redarguibile, se scostandomi, „ benchè di poco, dalla semplicità de' metodi che conosciamo, ho „ sperato che si possa con qualche accrescimento di meccanismo, „ indagare nella natura di un fiume, fra i materiali ch' egli comprende indistintamente, la legge della sua velocità „.

Io non istarò qui a discutere, se possono più soddisfare, all' intendimento del quale si tratta, le macchine semplici, o le composte. Sembrami però che di primo sbalzo, ognuno si troverebbe propenso per le prime; e di tal pensamento avrei creduto fosse stato anche il sig. Ingegnere, mentre alla pag. 14 del suo opuscolo, ragionando col sig. Cav. Giusti, così si esprime.

„ Non è molto tempo che io vi ho sentito ripetere, che non sarà „ facile di giungere alla scoperta di questo recondito mistero delle „ variate velocità di una sezione di fiume senza il soccorso de' corpi di gravità specifica uguali all' acqua, poichè voi avete preferito „ sempre nelle esperienze di questo genere, per un savio principio, „ i metodi i più semplici, e quelli che hanno il minore possibile „ apparecchio, affinchè si possa avere maggior confidenza ne' loro „ resultati, per quanto si può, o almeno tanto quanto basta per conoscere la legge, secondo la quale l'acqua produce la sua azione „.

,, Dietro questo principio, io mi sono occupato ad immaginare u-
,, no strumento a' vostri pensamenti conforme, del quale troverete
,, qui unita la figura, e la descrizione . . . . ,, E lo strumento del quale ragiona; è appunto quello per noi or ora esaminato.

Lascierò che altri giudichino, se cotesto strumento sia conforme ai pensamenti del sig. Cav. Giusti, od almeno se con esso possa ottenersi quella esattezza di risultamenti, che dal medesimo si desidera. Ben mi persuade che a tale scopo sia più opportuno lo strumento del Guglielmini (47) modificato nel modo che propone il sig. Barbantini nella nota alla pag. 50 del suo opuscolo. Cotesta modificazione però, è in sostanza quella stessa che contemporaneamente immaginò il signor Venturoli (26. 27.); se non che quest'ultimo ne spiegò i principj, e ne addusse l'uso ed il modo di adoperarlo, onde determinare la misura assoluta delle velocità (55), mentre il sig. Barbantini si contenta di indicare il metodo per conoscere la proporzione di queste velocità. E in fatti ecco la nota di che si parla. ,, Tra le
,, indicazioni di questi strumenti (parla de' tachimetri idraulici fi-
,, n' allora conosciuti) quella della pala-a-pendolo potrebb' essere su-
,, scettibile di correzione; aggiungendo una carrucola all' estremità
,, superiore dell' asta, sopra la quale passando il filo avesse dalla par-
,, te opposta alla palla una bilancia, da agire come nel mio *Contrap-*
,, *peso*. In questo modo può essere disprezzato l'angolo che fa il fi-
,, lo coll' asta, la di cui indicazione è fallace, per la curva in che
,, si dispone sotto la superficie dell' acqua ,,

Qualunque possa essere il giudizio degli Idrometri intorno all' invenzione del sig. Barbantini, non potrà certo mancarle quella lode che meritano il suo ingegno ed i suoi talenti; de' quali non è incerta prova il modo con cui ha immaginate e descritte le diverse parti componenti il suo meccanismo.

58. Lo strumento che ora passeremo a descrivere, si è quello che il dottor Nadi propose all' occasione della visita generale del Po per l' affare del Reno l'anno 1721; in cui intervennero il celeberrimo p. Grandi, come matematico di Sua Santità Papa Clemente XI. di gloriosissima memoria; il sig. dottor Eustachio Manfredi come matematico Bolognese; ed il sig. dottor Bernardino Zendrini, come matematico del Serenissimo di Modena, indi della Serenissima Repubblica di Venezia.

Ma poichè l' invenzione del sig. Nadi fu pubblicata dal p. Grandi all' occasione che scrisse il suo trattato delle acque correnti, da inserire nella prima raccolta d' Autori d' acque, che si fece in Firenze l' anno 1723; così trascriverò le stesse parole del p. Grandi, per non avere quelle dell' autore di questa invenzione.

,, ALM (*tav.* 10. *fig.* 1.) è un vaso parallelepipedo di latta assai

„ più lungo, che largo, ben chiuso da per tutto, eccetto che per „ un sottilissimo foro A, aperto verso la sommità della parte più „ stretta: poteva entrarvi dentro l'acqua, allora che aperta fosse u- „ na cateratta, che lo chiudeva per di dentro. Si apriva poi la detta „ cateratta per mezzo di una susta congegnatavi; la quale poteva „ alzarsi con un filo di ferro, che per un sottilissimo tubo BG at- „ taccato al coperchio di esso vaso, passava al di sopra, ed arriva- „ va sopra la superficie dell' acqua, anzi poteva ad arbitrio, e se- „ condo che richiedesse il bisogno d' immergere più profondamente „ la macchina, vie più allungarsi, aggiungendo altri canaletti si- „ mili sopra il primo BG, l' uno inserto nell' altro, e bene stucca- „ to, perchè non vi entrasse acqua nell' immergersi entro l' alveo „ del fiume. Lo stesso tubo BG dava esito all' aria quando si volea „ introdurre l' acqua in detto vaso. HN è un palo di ferro che si „ pianta nel fondo del fiume, per tener ferma la macchina, e per „ mezzo della fune KHI attaccata alla fiasca in K, la quale passa „ per un anello o puleggia posta in cima del ferro H si alza, e si ab- „ bassa la detta fiasca, che ancora in O, P, F, E ed altri simili „ punti ha vari occhielli inserti in esso palo di ferro, rimanendo „ sempre diritta, ed attaccata al detto palo. Nel tubo BG vi sono „ alcuni cerchietti a luogo a luogo, i quali lo dividono in piedi, „ mezzi piedi, e once, perchè mandando in giù la macchina fino a „ tanto, che uno di detti segni notati nel tubo, resti a fior d' ac- „ qua, si sappia a quale profondità resti immerso il foro A, che „ dee ricevere l' acqua „ (*).

Con questo strumento furono fatte diverse sperienze nella fossa Polesella, nel Po, ed in un tino d' acqua stagnante. Il modo col quale adoperavasi, è il seguente. S' immergeva la fiasca nell' acqua a quella profondità che volevasi, e tosto si apriva il foro per tanto tempo, quanto ne impiegava un pendolo della lunghezza di piedi 2. 4. 7. circa di Bologna, a compiere 60. vibrazioni (**). Scorso questo tempo si chiudea immediatamente il foro, e si estraea la fiasca fuori dell' acqua. Aprendo poscia un altro foro praticato verso la base della medesima, si facea sortire l' acqua introdotta nel tempo anzidetto, e si pesava, per poscia dedurre il rapporto fra la velocità della corrente e la sua profondità.

Chi desiderasse conoscere i risultamenti delle sperienze poc' anzi citate, può leggere il cap. V. parte prima dell' opera di Zendrini

(*) *Raccolta d' Autori Italiani* ec. pag. 60. Tom. IV., Bologna 1822.

(**) Cotesto tempo corrisponderebbe ad un minuto primo esattamente, se la lunghezza del pendolo fosse di piedi 2. 7. $4\frac{7}{19}$. (V. la nota al §. 29. pag. 414.)

sulle acque correnti, in cui sono interamente descritte e calcolate. Dirò io solamente, che tanto nella Polesella, che nel Po, si trovò che le velocità erano a un dipresso, in ragione suddupplicata delle altezze: ma poichè un tale risultamento si ottenne pur anco quando la fiasca fu immersa nell' acqua stagnante, così si dovette conchiudere che un tal metodo è imperfettissimo, e non può in verun modo sussistere. Osserva in fatti il signor Manfredi nella nota più volte citata, che quando si presenta all' acqua il foro della fiasca, si altera il suo movimento per modo, che la sola pressione sovrincombente, è quella che opera la velocità con cui l' acqua s' introduce nella medesima, senza che vi abbia parte alcuna la resistenza degli ostacoli, da cui dipende la velocità reale dell' acqua negli alvei: onde non è meraviglia se l' acqua così opera in un fiume scorrente, come in una vasca stagnante.

Io credo però che vi abbia la sua parte anche la picciolezza del foro. Imperocchè, il p. Grandi, che fu presente agli sperimenti che con sì fatto strumento furono istituiti, ci riferisce; che *tenuto il foro* A *a fior d' acqua, per moltissimo tempo, non entrava nella fiasca nè pure una goccia d' acqua*. Per il che convien dire che la pressione atmosferica, dalla parte interna del foro, si equilibra colla pressione sulla faccia anteriore; lo che certo non può avvenire se non quando il foro è piccolissimo, per cui riesce spregievole la colonna acquea, che dalla parte anteriore, preme, insieme colla colonna atmosferica.

Nel tempo stesso, che furono istituite le suscitate sperienze; fu pensato di adoperare cotesta fiasca del Nadi con altri artifizj. „ Si volea (sono parole del p. Grandi) nella cassetta ALQ (*tav.* 10. „ *fig.* 2.) simile alla passata, e da maneggiarsi con somigliante maniera, nell' applicarla allo sperimento, al foro A porre un cannellino, che obbligasse l' acqua nell' entrarvi dentro a farvi un zampillo parabolico AX; e da un assicella FIN inserita dentro pel coperchio di sopra, che potesse levarsi, e riporsi dirimpetto al detto foro verticalmente sospesa in una proporzionata distanza, si pretendeva di poter determinare l' impeto dell' acqua, secondo che da esso zampillo fosse percossa in un punto X più, o meno distante dall' orizzontale AV tirata dal foro. Imperocchè bagnandosi l' assicella dell' acqua intrusa dal cannello A nel punto X, era certo che l' acqua ivi tanto impeto, e velocità esercitasse, che potesse scorrere lo spazio AV secondo la sua direzione, nel tempo, che per la forza della gravità era tirata abbasso per l' altezza VX; onde se fatto l' esperimento, si trovasse bagnata l' assicella in un punto superiore, o inferiore ad X, era certo che la velocità dell' acqua ivi farebbegli passare lo stesso spazio AV in minore,

„ o maggiore tempo, quale è quello in cui la gravità dell' acqua le
„ farebbe scendere un' altezza minore o maggiore della VX; sicchè
„ essendo le velocità reciproche de' tempi, ne' quali scorre il me-
„ desimo spazio, ed essendo i tempi in suddnplicata ragione delle
„ altezze scorse per la forza della gravità; ne seguiva, che le velo-
„ cità ricercate erano reciprocamente in ragione suddnplicata delle
„ altezze VX interposte fra l' orizzontale AV, ed il luogo ove bat-
„ terebbe lo zampillo parabolico dell' acqua AX.... (*) „.

Ognuno ben vede, come questa macchinetta sia affetta dagli stessi inconvenienti cui rendono tanto imperfetta la precedente. Si aggiunga inoltre la difficoltà grandissima che s' incontrerebbe, allora quando si volesse determinare l' ampiezza, e l'altezza di quel getto parabolico. Ximenes nella prefazione alla sua Dissertazione meccanica più sopra citata, ne annovera gli stessi inconvenienti; ed il p. Grandi ci dice, che nel proporre che fecero sì fatta invenzione, furono considerate tante difficoltà, che nemmeno fu tentato di mettere in pratica questo artifizio.

60. Al contrario lo strumento che ora imprendiamo a descrivere, fu universalmente abbracciato; e molti si occuparono di fare con esso lui delle sperienze, alcuni di perfezionarlo. Era tanta la confidenza riposta nella sua semplicità, che veniva preferito ad ogni altro: ma oggidì che se ne conoscono gli inevitabili inconvenienti, ha di molto perduta la procacciata confidenza. È questo lo strumento denominato comunemente il *tubo di Pitot*, dal nome del suo inventore. Eccone per tanto la descrizione e l' uso, quale leggesi alla pagina 366. degli atti dell' Accademia di Parigi per l' anno 1732.

„ AB (*tav.* 10. *fig.* 3.) è un prisma triangolare di legno, in una
„ delle facce del quale viene praticata una scanalatura, capace a
„ contenere due tubi di vetro bianco: uno di questi tubi è piegato
„ ad angolo retto in D, e l' estremità DE passa per un foro aperte
„ nel prisma „..

„ La faccia CD, nella quale i tubi sono impostati, è divisa in
„ piedi e pollici. FGIL (*tav.* 10. *fig.* 4.) è un Regolo di rame nel
„ mezzo del quale è praticata una fenditura larga quanto importa la
„ somma de' diametri de' tubi è lunga in modo che i tubi stessi
„ non vengono coperti che alle loro estremità, e qualche poco nel
„ mezzo. Uno de' lati del regolo è diviso in piedi e pollici per le
„ altezze delle cadute d' acqua, e l'altro lato è pure diviso in piedi
„ e pollici delle velocità dell' acqua relative alle altezze; siccome ben
„ tosto si farà manifesto. Cotesto regolo è tenuto fermo da piccole

(*) L. c. pag. 68.

„ lastre di rame che abbracciano il prisma, e che, col mezzo di tre
„ viti K, lo chiudono in modo che si può fermare il regolo a quel-
„ l'altezza che si desidera „.

„ In quanto alle misure o dimensioni della macchina si potrà pren-
„ dere la velocità dell'acqua ad una profondità tanto maggiore, quan-
„ to più lunghi saranno i tubi ed il prisma, osservando di aumentare
„ la grossezza o la forza di questo, in proporzione della sua lunghez-
„ za. A ciascuna faccia si darà una larghezza di circa un pollice e
„ mezzo (m.ⁱ 0,0406) sopra una lunghezza di 6. piedi (m.ⁱ 1,9490.),
„ e si costruirà del legno il più forte che si troverà. E poichè
„ le maggiori velocità de' fiumi non oltrepassano guari i 10. piedi
„ (m.ⁱ 3,2484) per secondo, così basterà al regolo mobile di rame,
„ una lunghezza di 18. in 20. pollici (49 in 54 centimetri) „.

„ Il primo tubo essendo piegato ad angolo retto, ed il secondo
„ essendo tutto retto, se si mette la macchina in un acqua stagnan-
„ te, questa si comporrà ne' due tubi all'altezza del suo livello.
„ Ma in un'acqua corrente, s'innalzerà nel primo tubo all'altezza
„ relativa alla forza della medesima, frattanto che rimarrà al suo li-
„ vello nel secondo tubo „.

„ Aggiungeremo ancora, che per rendere più sensibile e mani-
„ festo il livello dell'acqua ne' tubi, abbiamo inverniciata la scana-
„ latura del prisma con una vernice bianca ad olio, formata colla
„ biacca bene polverizzata „.

„ Niente v'ha di più facile del modo di servirsi di questa mac-
„ china. Se si vuole, per esempio, misurare la velocità dell'acqua
„ alla sua superficie, si fermerà col mezzo delle viti il regolo di ra-
„ me sulla prima divisione del prisma, e si presenterà l'apertura
„ del tubo ricurvo alla corrente; allora il livello dell'acqua nel se-
„ condo tubo, essendo sulla prima divisione del regolo, si vedrà
„ l'acqua salire nel primo sino ad una cert'altezza; quest'altezza
„ sarà marcata in pollici e linee, sul lato dritto del regolo, e si a-
„ vranno i piedi e pollici della velocità della corrente, marcati sul
„ lato sinistro del medesimo „.

„ Se si vuole avere la velocità della corrente a uno, due e tre
„ piedi di profondità, si fermerà semplicemente il regolo mobile so-
„ pra queste stesse divisioni del prisma, e si opererà come poc'anzi. „

„ Gli è facile il diriggere la bocca del tubo, sicchè venga incon-
„ trata dirittamente dalla corrente; imperocchè girando dolcemente
„ la macchina, si vedrà il punto di massima elevazione dell'acqua
„ nel primo tubo. Che se si gira l'apertura verso la parte opposta
„ alla corrente, oltrepassata la linea perpendicolare alla sua direzione,
„ l'acqua si fermerà alla medesima altezza in ambedue i tubi. „

61. Eustachio Manfredi nella più volte citata annotazione al

Guglielmini, dubitò che questa invenzione del sig. Pitot potesse andare soggetta agli stessi inconvenienti della fiasca del Nadi; ma non volle pronunziare alcun giudizio, perchè non era a lui nota una tale invenzione, se non per mezzo di un giornale in cui la trovò enunciata.

M. Belidor, che pubblicò la sua Architettura Idraulica nel tempo stesso in cui Manfredi ultimava le sue annotazioni, riferisce, che il metodo di Pitot non lascia nulla a desiderare, mentre egli stesso, lo ha sperimentato con molto successo, non avendo trovato ostacolo che con questo strumento non si sormonti. Vuolle però il Belidor, che il ramo orizzontale del tubo ricurvo sia terminato ad imbuto, avvisandosi forse, che l'acqua per tal modo meglio s'insinui nell'interno, e salga con tutta la sua forza all'altezza corrispondente.

Bernardino Zendrini, che pubblicò il suo trattato sulle acque correnti nel 1741, e cioè dopo di aver veduta la Memoria di Pitot, ed il primo tomo dell'opera di Belidor; dubita che le oblique pareti dell'imbuto, possano servire d'impedimento al moto di que' filamenti acquei, che direttamente corrispondono alla libera sezione del tubo, e ciò per le ripercussioni che avvenir debbono contro sì fatte pareti. E siccome oppinava egli con tutti i foronomisti, che le velocità delle correnti dovessero crescere dalla superficie fin verso il fondo; così ebbe per sospetto l'uso dello strumento di Pitot, dal quale emergeva che le velocità dalla superficie al fondo sempre diminuivano. Gli è ben vero, diceva egli, che per le resistenze del fondo, le velocità debbono diminuire; ma siccome la Senna, nel luogo e all'epoca in cui Pitot fece le sue sperienze doveva avere 8. piedi (m.i 2,5987), poco più poco meno di profondità, così è difficile che a tale altezza giugner possa cotanto sensibile l'effetto della resistenza dal fondo. E per dare maggior peso a cotesta sua oppinione, rammenta i suoi sperimenti fatti sul Po col pendolo idrometrico, dai quali appunto risulta, che la velocità dopo la superficie cresce fino a poca distanza dal fondo dell'alveo. Ma noi che abbiamo veduto la fallacia del metodo con cui furono fatte le prime sperienze con sì fatto strumento; siamo indotti a credere che i risultamenti ottenuti dal Zendrini, poco valgano contro l'esattezza del metodo di che ragioniamo. Ha creduto Zendrini di ravvisare la causa del cotanto sensibile declinare della sua velocità, nella forza perduta dalla corrente, cui deve penetrare attraverso dell'altezza di quella porzione di acqua che sale nel cannello, e che se ne sta ferma, e morta, la quale appunto è tanto maggiore, quanto più si profonda il tubo. Volea finalmente cotesto idraulico insigne ricorrere al tribunale della sperienza, persuaso che la decisione di questo, sarebbe stata più d'ogni altra congettura, esatta e concludente. Ma la morte

s' interpose ad ogni suo divisamento, e noi restammo privi di questa, e forse d' altre ancora più rilevanti operazioni.

Il padre Lecchi alla pag. 245. della sua idrostatica, dopo di aver mostrato il poco peso che meritano le eccezioni di Zendrini, espone i suoi dubbj intorno all' uso dello strumento di Pitot, colle seguenti parole.

„ Tutta la difficoltà, a mio credere, più veramente si risolve in „ questa considerazione. Convien vedere, se realmente nel caso del „ fluido mosso, la pressione agisca ugualmente, come agirebbe, se „ il fluido stesse fermo. L' azione della pressione sul fluido mosso „ s' impiega, almeno in parte, appunto nel generare, o mantenere la „ velocità con cui l' acqua corre, ed urta il fluido del tubo ricur„ vo; quindi, ove questo fluido è urtato non pare che debba consi„ derarsi la pressione intera, che si ha nell' altro tubo diritto, che „ è dietro la riga, ove il fluido arrestato dalla medesima riga sta „ fermo, ed oltre ad essa, *l' intera velocità del fluido, che urta.* „ Almeno può dubitarsi, che a pigliare le cose in questo modo, u„ na parte della pressione si pigli due volte; onde si faccia corri„ spondere alla velocità dell' urto quella sola parte dell' acqua, che „ va sopra la superficie; quando converrebbe pigliarne d' avantaggio, „ non attribuendo alla pressione, che una parte di quella, la quale „ si termina nella superficie medesima „.

Pare a me, che questa osservazione del p. Lecchi collimi esattamente, in quanto alla conseguenza, con ciò che deducesi dalla teoria dell' urto de' fluidi ne' corpi immersi; poichè da questa teoria rilevasi appunto, che l' altezza dovuta alla velocità della corrente, è generalmente maggiore della porzione di colonna d' acqua entro il tubo, cui sporge fuori del livello esterno. Ma di ciò parleremo più innanzi.

Il sig. Francesco Domenico Michelotti pretese di dimostrare colla sperienza, che il dubbio dello Zendrini era giusto in quanto che le velocità dalla superficie al fondo debbono crescere anzi che diminuire, ed asseriva, che se l' innalzamento dell' acqua nel tubo sopra il livello esterno diminuisce ad ogni immersione, non è per questo che si debba concludere che anche la velocità diminuisce, dovendo questa misurarsi da tale alzamento, congiunto all' altezza viva della corrente libera (*). Il sig. Bonati volle verificare col fatto tutte queste ragioni, e facendo uso di un tubo di latta, e di una bacchetta sottile e leggera, per misurare gli alzamenti dell' acqua nel tubo, trovò che le difficoltà del Zendrini e del Michelotti non sussistevano,

(*) *Sperimenti Idraulici*. Tom. I. pag. 148.

giacchè le velocità dalla superficie al fondo, diminuivano sensibilmente.

I motivi pei quali il tubo di Pitot non è quello strumento che meriti tanta confidenza, sono brevemente indicati dal sig. Bonati colle seguenti parole. „ In primo luogo l' acqua interna al tubo è soggetta ad oscillazioni sensibili, particolarmente dove il corso dell' acqua „ è più veloce, onde convien scegliere un' altezza di mezzo con una „ estimazione oculare, che non può tenersi per molto precisa. Oltre di che nei fiumi grandi, ed in tempo di piena, come poter „ fermare il tubo nel filone, ed a profondità considerabili? „ (*). Aggiungasi a tutto questo, che nelle tardi correnti l' altezza della colonna prominente è così piccola, che ogni menomo errore può produrre un divario notabile (**).

A togliere le oscillazioni dell' acqua nel tubo, propone il sig. Michelotti, nel tom. 2. de' suoi sperimenti, di chiuderne la bocca inferiore con un coperchio, il quale porti scolpito un foro circolare, di superficie eguale alla sedicesima parte dell' area di questa bocca. Insegna inoltre il vero modo di adoperare lo strumento; ma senza mostrarne i veri principj.

Propone egli un tubo di latta fatto in più pezzi, se pur lo esige la profondità della corrente; ed introduce nel medesimo una bacchetta sottile e graduata, sostenuta da un galleggiante di sughero al modo e per l' uso suggerito dal Bonati. Ecco come egli adopera lo strumento. Immerge il tubo nell' acqua colla bocca volta nel senso della corrente, ed osserva quanta parte della bacchetta sporge fuori del medesimo; poscia lo immerge colla bocca volta in senso contrario, e ripete la stessa osservazione. Dalla differenza fra le due porzioni prominenti della bacchetta, deduce egli la massima elevazione dell' acqua entro il tubo, e quindi l' altezza dovuta alla velocità della corrente nel luogo in cui è immersa la bocca dello strumento.

La ragione di tutto questo, secondo il sig. Michelotti, è la seguente. Dice di aver osservato, che quando s' immerge il tubo in una corrente col imbuto volto nel senso della medesima, l' acqua si ferma all' altezza del livello esterno, perchè in questo caso la sola pressione fa salire l' acqua nel tubo. Adunque, la differenza fra le due porzioni prominenti del galleggiante, mostrano di quanto s' innalzi l' acqua nel tubo, per l' azione del suo movimento. E con ciò viene a confermare il metodo di Pitot, ed a suggerire il mezzo per

(*) *Memorie della Società Italiana*. T. 2. parte 2.ª, §. 50. della memoria del signor Bonati.

(**) V. la prefazione della citata Dissertazione del signor Ximenes, e il Tomo XIV. della Soc. Ital., §. 6. della memoria del sig. Venturoli.

escludere il tubo retto, e rendere più semplice l'invenzione dell'illustre straniero.

Nella mia nota all'ultima edizione dell'opera di Zendrini (*) ho già mostrato, qual fondamento può avere l'osservazione precedente del Michelotti. Quando la bocca del tubo è volta nel senso della corrente, l'acqua non può neppur giungere all'altezza del livello esterno. E la ragione si è manifesta, dietro le belle sperienze di Dubuat istituite per determinare la legge delle resistenze che oppongono i corpi solidi esposti all'urto di una corrente. L'espressione di queste resistenze contiene due termini, l'uno rappresenta la pressione contro la faccia anteriore del corpo, l'altro rappresenta la pressione contro la faccia posteriore. La prima di queste pressioni equivale ad uno sforzo positivo, mentre la seconda equivale ad uno sforzo negativo, col quale il corpo vien tratto nel senso della corrente: ma la pressione di una corrente contro un corpo qualunque immerso nella medesima, si misura dalla differenza fra la pressione anteriore e la pressione posteriore; dunque l'altezza della colonna d'acqua con cui rappresentasi la pressione assoluta contro un dato corpo, si ottiene aggiungendo alla colonna che misura la pressione positiva, quella che misura la pressione negativa. (**) Quando adunque la bocca del tubo è volta contro la corrente ha luogo la pressione positiva, e perciò l'acqua s'innalza sopra il livello esterno: ma quando la bocca è volta in senso contrario, avrà luogo la pressione negativa, e l'acqua si fermerà ad un'altezza minore del livello esterno. Adunque, la differenza del livello dell'acqua nel tubo, in queste due osservazioni, ci darà la misura della colonna d'acqua colla quale si calcola l'urto della corrente contro la bocca del tubo, e quindi l'altezza dovuta alla velocità della medesima: ma questa differenza di livello è misurata dalla differenza delle due porzioni prominenti della bacchetta; ecco adunque dimostrato il vero uso dello strumento di Pitot, quale ci fu insegnato da Michelotti; ma dedotto da' suoi veri principj.

Il sig. profess. Venturoli nel tom. 2. de' suoi Elementi di Meccanica e Idraulica pag. 226, disapprova il suggerimento di Michelotti, per quietare le oscillazioni dell'acqua entro il tubo, e dice che essendo chiusa la bocca del tubo, ed aperto soltanto un piccolo foro nel centro della medesima, pare che l'altezza della colonna prominente debba riuscire alquanto maggiore della dovuta alla velocità. E ciò in grazia di alcune sperienze di Dubuat, le quali mostrano, che

(*) *Raccolta d'Autori Italiani* ec. più sopra citata; T. VIII. pag. 426.
(**) V. *Navier*. Note al Belidor, Tom. I. pag. 339.

la pressione contro la superficie di un corpo non è la stessa in tutti i punti della medesima, ma maggiore nei punti situati verso il mezzo, minore presso gli orli.

Dubuat al contrario trae partito da questa circostanza; e suggerisce un nuovo metodo di far uso della macchinetta di Pitot.

Avendo dimostrato al §. 454. (parlo dell'edizione del 1786.), *che l'altezza della pressione contro il centro d'una superficie piana urtata direttamente, è uguale ad una volta e mezzo, l'altezza dovuta alla velocità;* passa nel §. 573. ad esporre il suo divisamento. Propone egli pertanto lo stesso tubo, e le stesse modificazioni suggerite dal Michelotti, e varia soltanto il modo di calcolare l'altezza dovuta alla velocità della corrente, la quale, giusto il risultamento poc' anzi accennato, equivale ai ⅔ dell'elevazione dell'acqua nel tubo, sopra il livello esteriore.

Ma Dubuat con questo modo di adoperare il tubo di Pitot non calcola se non la pressione anteriore, e non so se saranno giusti i risultamenti che da un tal metodo si ottengono. A volere tener conto altresì della pressione posteriore, risulterebbe dalle sperienze di Dubuat, che l'altezza della colonna d'acqua che misura la pressione assoluta contro il centro della bocca del tubo, è più che doppia, dell'altezza dovuta alla velocità della corrente. Sperimentava infatti Dubuat una corrente, la cui velocità era di 36. pollici; e quindi dovuta ad un'altezza di linee 21,5 circa. La pressione anteriore contro il centro della superficie immersa nell'acqua, era misurata da un'altezza di linee 32,8 (§. 450.), che sono appunto una volta e mezza l'altezza dovuta alla velocità della corrente. La colonna acquea, che misura la pressione posteriore, contro il centro dell'anzidetta superficie, era di linee 12,7 (§. 462.). Dunque la pressione assoluta sarà misurata da una colonna acquea di linee 45,5 d'altezza, che sono due volte e un quarto l'altezza dovuta alla velocità della corrente.

Il sig. Gauthey, al contrario di Belidor, dice di avere sperimentata l'invenzione di Pitot in molte maniere, e di non avere mai ottenuto un risultamento giusto. Oltre agli ondeggiamenti dell'acqua entro il tubo, trova i suoi dubbj nella parte ricurva dello strumento. Avendo adoperato un tubo terminato ad imbuto, siccome prescrive Belidor, dice d'essersi avveduto, che quando la coda di quest'imbuto è ad angolo retto col tubo verticale, l'acqua sale a minore altezza che non quando l'imbuto è unito a cotesto tubo con una piegatura curvilinea; e che inoltre, quanta è maggiore la larghezza dell'imbuto, altrettanta è maggiore l'altezza a cui sale l'acqua entro il tubo verticale. Conclude pertanto, che un tale strumento non potrebbe adoperarsi se non dopo averlo sperimentato in una corrente

di conosciuta velocità, giacchè l' acqua non sale giammai all' altezza della sua caduta (*).

Io dubito che il sig. Gauthey, non abbia sperimentato il tubo di Pitot, giusta i suoi veri principj, e che perciò gl' inconvenienti da lui trovati, non siano i veri difetti di quest' invenzione. Già a buon conto rilevasi dalle sperienze di Michelotti, essere indifferente che il tubo sia terminato ad imbuto, o che sia tutto retto; come è indifferente qualunque larghezza di cotesto imbuto (**).

Il sig. Navier l' ultimo a mia notizia che abbia parlato di questa macchinetta, nella nota alla pag. 361. del primo tomo di Belidor, ci fa palese il suo sentimento in ordine ai difetti di questa invenzione. Ma a dir vero, prevenuto egli in parte dall' oppinione del sig. Gauthey, ed ignaro, pel rimanente, di quanto abbiano fatto e detto gl' Italiani su questa macchinetta; i suoi dubbj non hanno quel peso che pur potrebbero avere. Se il sig. Navier avesse solamente osservato gli sperimenti di Michelotti, avrebbe veduto che in Italia l' uso del tubo di Pitot, è modificato e corretto quanto può esserlo; che già è soppresso il tubo retto, ed il ricurvo s' adopera in un modo alquanto diverso da quello suggerito dai suo inventore. Convengo con esso lui, che l' altezza dell' acqua nel tubo, la quale misura la pressione che la corrente esercita contro l' orificio del medesimo, debbe risentirsi della modificazione, che cagionar deve al moto del fluido, la presenza del ramo verticale; ma sono persuaso altresì, che questa modificazione sarà piccolissima, e tanto più piccola quanto è minore la grossezza del tubo, in confronto della larghezza della sezione. E dove dice, che „ l' altezza alla quale l' acqua s' innalzerà nel tubo „ ricurvo non può essere quella dovuta alla velocità, se non allora „ quando l' estremità inferiore del medesimo, avrà una forma par„ ticolare, cui bisognerebbe aver prima studiata colla sperienza, in „ una corrente di conosciuta velocità “; io ravviso il sentimento del sig. Gauthey, il quale non è troppo conforme coi risultamenti delle sperienze Italiane, da noi poc' anzi citate. Ma siccome il signor Navier è d' accordo con noi, che quando si volta l' orificio inferiore contro la corrente, l' altezza dell' acqua entro il tubo misurerà la pressione che soffre cotesto orifizio, considerato come *la faccia anteriore di un corpo presentato alla percossa della corrente*; così dee ancor convenire, che se si volge il tubo in senso contrario, l' altezza dell' acqua nel medesimo, mostrerà la pressione cui soffre questo stesso orficio, considerato come la faccia posteriore del corpo

(*) *Oeuvre de M. Gauthey* Tome troisiéme, pag. 160.
(**) *Sperimenti Idraulici*, Tom. I., pag. 146.

medesimo. Dee convenire adunque, che il vero modo di adoperare il tubo di Pitot, è quello da noi poc' anzi spiegato; il quale leggesi eziandio negli Elementi di Meccanica ed Idraulica del sig. Venturoli, e nella mia nota al Zendrini, più sopra citata.

Da quanto fin qui si è detto, possiamo finalmente concludere, che i soli, e fors' anche irreparabili inconvenienti, a cui va soggetta l' invenzione di Pitot, sono. 1.° Che nelle tardi correnti non si può avere buon costrutto dalle sue indicazioni, perchè è troppo piccola la colonna che misura l' altezza dovuta alla velocità, ed ogni piccolissimo errore potrebbe cagionare un divario notabile nella misura che si cerca. 2.° Che nelle grandi velocità è difficile fermare lo strumento a quella profondità che si vuole, e quando ciò si ottenesse col mezzo di qualche meccanismo, questo non potrebbe a meno di non alterare il corso dell' acqua, per cui le velocità osservate non sarebbero realmente quelle che competono al fiume libero.

62. Nessuno, ch' io sappia, ha fatto parola dell' invenzione colla quale il sig. Francesco Focacci, ha tentato, mercè di alcuni sperimenti, di scoprire la scala delle velocità, in un canale manufatto. Ecco le parole colle quali si esprime, enunciando il suo ritrovamento, ed il modo di adoperarlo (*).

„ Gli sperimenti furono fatti in un canale murato, assai lungo, e „ diritto, largo piedi Parigini 11. (m.^{i} 3,5732), in cui l' acqua alta piedi 5. (m.^{i} 1,6242), scorre con una pendenza leggera ed uniforme sopra un fondo di lieve smalto, e trasporta un galleggiante in 9. secondi per il tratto di piedi Parigini 30. (m.^{i} 9,7452) „.

„ Nel mezzo di tal canale fu piantata a colpi di mazza un' asta „ AB (*tav.* 10. *fig.* 5.) armata con punte di ferro nell' estremità „ inferiore B, perpendicolare alla superficie dell' acqua, la quale si „ fissò superiormente in una traversa posante nei muri laterali. „

„ Tale asta fissa serve di guida ad un' altra CD, che per mezzo „ di due staffe HD, HF da cui è fasciata, striscia esattamente lun„go quella, e si alza ed abbassa con una corda CPQ attaccata al„la sommità C della medesima, scorrendo sopra una puleggia P po„sta nella cima della predetta asta fissa BA „.

„ Il pezzo mobile CD porta nell' estremità inferiore una cassetta „ $\Delta\beta$ (custodita con la portella β), in cui è situato un vette an„golato TMN, il quale è portato dall' alto in basso, e secondando „ il movimento dell' asta CD, è destinato a percorrere ogni punto „ dell' altezza dell' acqua, ed a fermarsi per dar luogo ad osservare „ i diversi gradi della velocità della medesima „.

(*) *Memorie della Società Italiana*. Tom. XIII. part. 1. pag. 390.

„ Nella faccia Δ della cassetta è fermata stabilmente l' imboccatu-
„ ra di un tubo S, per cui l' acqua s' introduce, e nell' opposta
„ faccia, in perfetta dirittura a questo, è altresì fermata l' imbocca-
„ tura dell' altro tubo R per cui l' acqua esce dalla cassetta. L' og-
„ getto di tali tubi è quello di condurre a traverso della cassetta
„ quell' acqua, che naturalmente s' introduce per la loro capacità
„ prima di risentir l' effetto dell' ostacolo che l' apparato presenta al
„ di lei moto „.

„ Questi tubi son lunghi piedi 5. (m.ᵗ 1,6242). Per determinare
„ tal lunghezza feci diverse osservazioni, le quali mi fissarono nel-
„ la certezza che quella non potesse essere minore di piedi 4.
„ (m.ᵗ 1,2994), affinchè l' acqua che s' incammina per essi non ri-
„ senta l' alterazione del moto dell' altra, che urta nell' apparato „.

„ La portella β chiudesi esattamente con qualche mistura, acciò la
„ cassetta resti impermeabile all' acqua esterna, ed acciocchè il vet-
„ te TMN non si muova se non che per l' urto dell' acqua che en-
„ tra, ed esce dai tubi „.

„ Ogni movimento del vette deve rapportarsi nella parte superio-
„ re F, oppure G della bilancia, e può osservarsi stando in un pal-
„ co elevato sopra l' acqua a conveniente distanza „.

Più innanzi il sig. Focacci ci descrive il modo di preparare, e a-
doperare cotesto strumento, colle seguenti parole.

„ Chiusa esattamente la portella β, il vette MNT collocato nella
„ cassetta, non è mosso se non che dall' acqua che in quella entra
„ pel tubo S „.

„ Al braccio F è attaccato un filo di ferro FT, che fa equilibrio
„ col piatto G „.

„ L' estremità inferiore di tal filo è unità mediante un pernietto
„ all' estremità T del braccio TM del vette angolato TMN, il quale
„ con ogni delicatezza è imperniato nella cassetta nel punto M „.

„ Il predetto filo di ferro è incluso in un tubetto di latta XY fer-
„ mato nella parte superiore della cassetta Δβ, e staffato all' asta
„ mobile CD. Questo serve a difendere quello dall' urto della cor-
„ rente „.

„ Qualsivoglia urto dell' acqua veniente dal tubo S è capace di far
„ muovere il vette TMN, e di alterare in conseguenza l' equilibrio
„ tra il filo FT, ed il piatto G „.

„ Tale equilibrio si riconduce apponendo nel piatto G un peso ba-
„ stante a riattenerlo „.

„ È da osservarsi, che il peso del filo di ferro deve crescere, e
„ scemare scorrendo dall' alto in basso a proporzione del fluido che
„ rimuove. Tali differenze sono da considerarsi necessariamente „.

„ Pertanto l' acqua che esce dal tubo S, urtando in N braccio del

» vette, toglie l' equilibrio col piatto; in cui opponendo un peso
» esattamente capace per ristabilirlo, questo peso serve per misura
» della pressione che l'acqua esercita sul vette ».

» Così facendosi gradatamente discendere la cassetta per ogni pun-
» to dell' altezza, il vette incluso è capace di mostrare in ogni pun-
» to qual sia il grado della celerità dell' acqua, mentre mostra la
» pressione che quella esercita su di esso ».

Il sig. Focacci ha voluto variare il suo strumento col sostituire al vette angolato un molinello, ed una mostra che ne indichi il numero delle rivoluzioni. Ritenendo il rimanente come nello strumento precedente, ecco la variazione descrittaci colle seguenti parole:

» Nella cassetta $\Delta\beta$ è con la massima diligenza imperniato un mo-
» linello M (*tav.* 10. *fig.* 6.) in cui urta l'acqua veniente dal tu-
» bo S ».

» Tal molinello ha per asse un sottilissimo tubetto OM (effor-
» mante come unito a quello un pezzo solo), che si eleva vertical-
» mente, e trapassando al di sopra del piano circolare O, ivi segna
» con una lancetta le rivoluzioni di quello dipendenti dal moto del-
» l' acqua, che entra nella cassetta per il tubo S, ed esce per l' al-
» tro R ».

» Il sottil tubetto inserviente per asse è difeso dall' urto dell' ac-
» qua da un altro XY, che gli serve come di custodia, e resta fis-
» sato come l'altro dell' istrumento a bilancia ».

» Girando sulla mostra O la lancetta mossa dal molinello M, se-
» gna in esso le rivoluzioni fatte da quello in un dato tempo. »

» Così dal maggiore, o minor numero di rivoluzioni fatte in un
» tempo dato, si conoscono le variazioni del moto del molinello, e
» per necessaria conseguenza i diversi gradi di celerità dell' acqua
» da cui è mosso ».

» Potendosi il molinello ritenere e farsi agire in qualsivoglia pun-
» to, mercè la corda CPQ, possono in conseguenza osservarsi in o-
» gni punto i gradi di celerità ».

63. Con questi strumenti il sig. Focacci determina le velocità relative, e non le assolute. Sarebbe stato vantaggioso, che avesse confrontata la velocità nella superficie, ottenuta collo strumento munito del vette angolato, con quella che ottenne col galleggiante. Era agevole molto un tale confronto, ed avrebbe servito a verificare il metodo proposto, ed a far conoscere se era applicabile alla determinazione delle velocità assolute. Se ci avesse date le dimensioni delle sue macchine, ognuno era in grado di istituire sì fatto confronto. Infatti abbiamo da ciò ch' egli dice, che un galleggiante percorse equabilmente m.^{i} 9,7452 in 9″, dunque la velocità della corrente in superficie era di m.^{i} 1,0828, alla quale corrisponde l' altezza di

m.i 0,06 circa. Risulta inoltre dalla prima delle sue sperienze, che l'urto della corrente contro il vette era misurato dal peso di libbre Fiorentine una, zero once, e undici denari; il qual peso corrisponde a chilogrammi 0,8522. Cercando adunque qual è la base di un cilindro acqueo, il quale avendo m.i 0,06 d'altezza, abbia per peso l'espressione dello sforzo precedente, si troverà una superficie di metri quadrati 0,0059 circa, che dovrebbe essere la superficie urtata del vette, se lo strumento, prescindendo dalle resistenze, è atto a mostrare la vera velocità della corrente.

Ma io credo che abbiano luogo alcune difficoltà, dalle quali ne derivi non irragionevole dubbio, che il processo delle velocità della corrente non sia quale risulta da cotesto metodo.

Chi potrà assicurarci che il vette, e il molinello vengano urtati dalla corrente colla velocità sua propria? Non potrebbe avvenire che l'acqua sboccando dal tubo S entro la cassetta $\Delta\beta$ già piena d'acqua non perdesse di velocità, passando da una sezione ristretta in una più larga? E se ciò è vero, siccome sembra indubitato, chi ci assicura che questa diminuzione di velocità, serbi la stessa proporzione, cui realmente esiste fra le velocità reali della corrente?

Il sig. Focacci, con un particolare sperimento, fatto a bella posta, si è assicurato, che la velocità di una corrente è sensibilmente la medesima, tanto entro un tubo del diametro di 4 pollici (m.i 0,1083), lungo piedi 5 (m.i 1,6242), e collocato orizzontalmente nella direzione della corrente; quanto fuori del medesimo: ma questo tubo non comunicava altrimenti colla cassetta del suo apparecchio, ed avea perciò uno sbocco libero; ond'è che assai diverso debb'essere lo sbocco dell'acqua da quel tubo, e quello dal tubo S. Si rifletta inoltre, che l'acqua contenuta nella cassetta fino al livello esterno, non ha altro movimento se non alcune oscillazioni, prodotte dall'impeto della corrente che entra nella cassetta medesima, e perciò, la pressione dell'acqua contro il vette, o contro il molinello, debb'essere modificata per l'effetto di queste oscillazioni.

Dopo tutto questo non so se potremo prestare intera fede ai risultamenti delle sue sperienze, dalle quali rilevasi che la velocità del canale per lui sperimentato, cresceva dalla superficie fino a piedi 2 (m.i 0,6497) di profondità; che da' piedi 2 fino a piedi 4 (m.i 0,8121) si conservava la stessa; e che da questo punto verso al fondo del canale andava sempre scemando; mentre son questi, presso a poco i risultamenti, senza dubbio difettosi e fallaci, ottenuti col pendolo idrometrico adoperato al modo suggerito da Guglielmini.

Se il sig. Focacci avesse avuto presente la seguente semplicissima sperienza di Bouati, fatta in un canale di dimensioni poco diverse dal suo, ed i cui risultamenti non lascian luogo ad alcun dubbio;

si sarebbe avveduto dell' errore in cui era tratto dal suo sperimento, e ne avrebbe forse scoperte le imperfezioni. Risulta da cotesta sperienza di Bonati che le velocità del suo canale sotto la superficie, rimanevano le medesime, o scemavano lentamente, ma poi decrescevano sensibilmente a misura che più avvicinavasi al fondo. Ecco infatti cotesta sperienza.

„ In un canale largo piedi 15. circa (m.ⁱ 4,8726) (parlerò a misura di Parigi), e profondo sei piedi (m.ⁱ 1,9490) con un galleggiante trovai l' anno 1769, che la velocità dell' acqua in superficie era di piedi 2. 4. (m.ⁱ 0,7580) per ogni minuto secondo. Nel fondo GT (*tav.* 10. *fig.* 7.) del medesimo canale presso un ponte di legno, che non angustiava punto il corso dell' acqua, conficcai verticalmente una tavola PB di tale lunghezza, che superava la superficie CD dell' acqua, avendo fatto che la faccia AB fosse paralella alle sponde, o sia a seconda del corso dell' acqua diretto da C verso D. Ben fermata la tavola con una mano in O, io immergeva a poco a poco l' asta OE facendo strisciare un risalto F dell' asta lungo la costa P*u* della tavola, intorno al quale risalto F l' asta potea aggirarsi accostandosi alla tavola ora con l' estremità E, allorchè l' acqua investiva con maggior forza la parte EF che l' altra FC, ed ora con l' estremità O, se l' acqua spingeva con più di forza la parte FC che l' altra FE „.

„ Lo scopo mio era di trovare quella immersione, in cui la forza dell' acqua contro FE si equilibrava con l' altra contro FC. Arrivato al punto di tale equilibrio io me ne accorgeva facilmente, perchè allora colla mano io sentiva, che l' estremo O nè mi veniva spinto dall' acqua verso la tavola, nè mi veniva allontanato dalla medesima „.

„ In uno di questi sperimenti la parte FE era di un piede (m.ⁱ 0,3248), e tentando trovai il detto equilibrio quando FC fu di 11. pollici (m.ⁱ 0,2978); il che mostra, che quell' acqua fino alla profondità di quasi due piedi sotto la superficie (m.ⁱ 0,6226) correva con una velocità minore, che in superficie, però di poco. Nel secondo sperimento io aveva mutato luogo al risalto F dell' asta in maniera, che FE era di due piedi (m.ⁱ 0,6497), e tentando di nuovo trovai il descritto equilibrio quando FC fu di un piede e mezzo (m.ⁱ 0,4873): il che mostra, che alla profondità di tre piedi e mezzo (m.ⁱ 1,1369), o sia di piedi due e mezzo (m.ⁱ 0,8121) sopra il fondo, la velocità era sensibilmente minore che in superficie „ (*).

(*) *Memorie della Società Italiana*. Tom. II. parte 2.

64. Non è certamente senza difetti, l'altra invenzione toscana che ora imprendiamo a descrivere, sebbene abbia avuto ne' suoi primi tempi, fama di eccellente ritrovamento. Parlo della ventola di Ximenes, della quale al solito, daremo la descrizione, trascrivendo le parole stesse colle quali il suo inventore l'accompagnò, nel renderla di pubblico diritto.

Per fermare lo strumento nel mezzo di una corrente adoperò Ximenes due sorta di castelli, secondo che più o meno grande era l'ampiezza del fiume. Di questi castelli il più semplice era di forma triangolare, il più macchinoso era di pianta quadrata. Per non diffonderci soverchiamente in questa descrizione mostreremo solamente il castello più semplice potendo ognuno da questo farsi un'idea abbastanza esatta dello strumento in quistione, e della forma ed uso dell'altro castello (*).

„ Sia nella fig. 1. della tavola 11, un tal castello rappresentato „ dalle lettere SNOTP, nel quale le tre colonne del castello sono „ NO, S*t*, *r*T, le quali restano insieme collegate co' due triangoli „ di legno, il primo de' quali è inferiore TO*t*; ed il secondo è superiore SN*r*. Le dette colonne, e le due piante triangolari sono bene intaccate, ed incastrate tra di loro affinchè restino stabilmente „ consolidate senza fare alcuno movimento nel tempo delle sperienze. Nella pianta inferiore TO*t* vi è un recinto di regoli, per potere reggere il peso de' molti sassi, che vanno aggravati in detto „ fondo, per tener fermo il castello nel tempo delle esperienze contro l'impeto delle acque correnti. E siccome le tre colonne restano colle loro estremità inferiori alla pianta triangolare, le dette estemità OX, TY s' immergono nel fondo del canale, o del „ fiume, non solo per la forza del peso aggravato sulla pianta inferiore, ma ancora per la forza degli uomini, che l'obbligano a discendere, finchè la pianta inferiore vada a contatto „ col fondo del fiume. Oltrepassando poi al triangolo superiore SN*r*, „ esso non solo è necessario per collocare il castello, ma ancora per „ sostenere il centro superiore dell'albero. Poichè per mezzo di una grue di ferro HGP raccomandata nel mezzo ad un arco pur di „ ferro *n*G*m*, vien sostenuto il pernio P dell'albero P*p*, il quale „ nella parte inferiore si appoggia ad una staffa di ferro T*p*. Tanto „ il pernio superiore, che l'inferiore di detto albero si fanno girare „ su due occhi di ferro muniti di due cerchietti di ottone per minorare le resistenze „.

„ Il detto albero P*p* è di figura quadrata, per poter con tal figura

(*) *Nuove Sperienze Idrauliche* ec. Siena 1780.

„ ben sostenere la ventola, che co' suoi braccioli deve scorrere a
„ maggiore, o minore altezza del detto albero „.
„ La ventola è indicata dalle lettere BAED di figura rettangola, ed
„ è sostenuta da due braccinoli di ferro AC, Ec, i quali terminan-
„ do in una figura quadrata pressocchè uguale alla figura dell' albe-
„ ro, può farsi discendere, e salire secondo il bisogno delle diverse
„ esperienze. Ed essendo detta ventola destinata per immergersi
„ nelle acque correnti, si attacca alla medesima una catenuzza di
„ ferro di lunghe maglie, affinchè o abbassando, o alzando una ma-
„ glia possa sapersi quanta sia l' immersione, o emersione della ven-
„ tola. Dovendo inoltre detta ventola farsi rivolgere ad angoli di-
„ versi sul triangolo superiore, resta fissato un semicircolo LMT,
„ colle sue divisioni de' gradi, il quale però resta nel suo centro
„ incavato per lasciar libere le rivoluzioni della ventola. Per poter
„ contrassegnare gli angoli differenti su' quali vuol collocarsi la so-
„ praddetta ventola, all' albero medesimo è raccomandata la lancet-
„ ta, o sia l' indice de' gradi RM. Indi è che qualunque angolo
„ faccia la ventola AD colla direzione del fluido, o essa ventola re-
„ sti alla superficie del medesimo, o si faccia immergere verso il
„ fondo, sempre la lancetta RM ci verrà ad indicare lo stesso ango-
„ lo sulla graduazione del semicircolo „.
„ Essendo inoltre destinata la valvula per sostenere a qualunque
„ angolo di obliquità le forze del fluido, e per misurare dette for-
„ ze è stata aggiunta, ed incastrata sull' albero una rotella R con
„ un canaletto escavato nell' esterior sua circonferenza. A tale cana-
„ letto si avvolge una funicella, la quale poi si conduce ad una pu-
„ leggia segnata V, e da essa si lascia pendere verticalmente ad u-
„ na piccola altezza VQ, ed alla sua estremità si attacca un peso Q
„ maggiore, o minore, secondo, che esigono le diverse qualità de-
„ gli esperimenti. Dovrà dunque succedere, che aggravandosi il pe-
„ so Q sulla detta puleggia V, e passando tal forza per una li-
„ nea orizzontale sulla detta rotella Rr, che è concentrica all' al-
„ bero, ne deve risentir l' effetto la ventola BAED, la quale, o si
„ voglia collocare perpendicolarmente al fluido, ovvero obliquamen-
„ te rispetto al medesimo mutando i pesi Q, per fare equilibrio o
„ colla spinta perpendicolare, o colla spinta obliqua della corrente,
„ si conoscerà così il valore de' pesi per resistere a qualunque im-
„ pulso della medesima in qualunque data direzione „.
„ E perchè non è facile il ben collocare detto castello nella cor-
„ rente di un fiume, o di un canale, affinchè l' asse della ventola
„ Pp passi per una linea verticale, è stato per questo immaginato
„ il piombino qg, che restando sospeso ad un certo punto g della
„ grue di ferro, debba battere colla punta inferiore del piombino

„ un certo punto q, che si segna esattamente piombando l' albero „ mentre esso è fuori dell' acqua, e posa sopra un pavimento „ orizzontale. Tale è la figura, e costruzione del castello, e della „ ventola idraulica . . . „

65. Che che sia delle irregolarità che apporta cotesto apparecchio alla direzione del fluido le quali secondo Ximenes non nuocono alle sperienze; a me sembra di poter dimostrare cogli stessi suoi risultamenti, che se il cangiamento di direzione si mantiene costante per tutto il tempo dello sperimento, il cangiamento di velocità è però tale, da non lasciar alcun dubbio sull' imperfezione del metodo che per lui si propone. Infatti al num. 19. dell' art. 4. del primo libro, deduce Ximenes dalle sue sperienze, che la velocità dalla superficie sino ad una profondità di braccia 2. e soldi 10. fiorentine (m.^{i} 1,4575), o si mantiene costante, o piuttosto cresce alcun poco; nel che appunto io ravviso l' effetto della resistenza prodotta dal castello al libero movimento della corrente, per cui l' acqua che scorre sotto del medesimo, dovendo passare per uno spazio alquanto più stretto di quello se la sezione fosse libera, si è alcun poco innalzata, e la velocità sotto la superficie si è fatta maggiore. È succeduto lo stesso di quando si chiude parte della sezione di un canale col mezzo di una cateratta, che si vede l' acqua alzarsi contro la medesima, rendersi quasi stagnante alla superficie, ed acquistare forza grandissima nella porzione che si lascia libera. Cotesta mia opinione viene confermata da un' osservazione di Mariotte, il quale esplorando la velocità dell' acqua sotto un ponte, in cui l' altezza della corrente era di piedi 3 (m.^{i} 0,9745), vide che nel mezzo della sezione la velocità era maggiore che non alla superficie.

Nè già si creda che Ximenes non conoscesse cotesta irregolarità del suo metodo, che anzi egli ne cita di più una peggiore, il rimulinamento dell' acqua tra l' albero e la ventola. In fatti al n.° 132. così si esprime. „ La prima riflessione sugli effetti del castello mi „ porta a preferire il triangolare al quadrangolare, appunto per il „ maggior turbamento, che questo cagiona alla corrente del fluido, „ sì nella sua direzione, che nella sua forza . . . ., e più innanzi „ al num. 133. „ Per impedire il rimulinamento del fluido tra l' albero „ e la ventola, trovo giovevole che essa rada l' albero senza alcun „ vuoto intermedio „ . . . . Ad ogni modo già cotesto strumento non sarebbe in conto alcuno praticabile in tempo di piena, per la difficoltà di collocare il castello nel mezzo dell' alveo, o di mantenerlo immobile e scevro da qualunque oscillazione; ed allora quando le acque son basse, temo che le citate irregolarità apportino tali cangiamenti, da sfigurare ed alterare totalmente la legge delle velocità, e render deluso lo scopo delle nostre ricerche.

66. Era tale il desiderio del p. Ximenes, di soddisfare alle premure degli Idrometri in ordine alla ricerca della scala delle velocità di una corrente qualunque, che cercò di trar profitto dalla sua valvula, da noi descritta all' art. 33, modificandola nel modo che siamo per dire (*).

„ Sia ABCD (*tav. II. fig. 2.*) un telaio di figura quadrata formato di quercia, per tuffarsi nel fondo del canale, ed al medesimo dalla parte inferiore si aggiungano quattro puntazze di ferro *cd*, *ba*, *gh*, *fe*, le quali serviranno per ben fermare il castello, affinchè non vacilli al corso delle acque, che esso dee sostenere. Questo stesso telaio potrà aggravarsi con molto sasso, inchiodando sopra il medesimo una tavoletta, che possa reggerlo. Questa sarà la pianta del nuovo castello, che va affondata sull' alveo del fiume „.

„ A detta pianta si raccomandino con buone conficcature, ed ancora con quattro squadre di ferro le due colonne EF, GH, le quali in cima siano collegate colla loro traversa GF. Nella parte interna di dette due colonne si scavino due canaletti da cima a fondo, affinchè per essi possa sdrucciolare il telaio della valvula, che or ora descriverò. È rappresentato detto telaio colle lettere IKOL, e resterà inferiormente collegato colla traversa IL, e superiormente coll' asta KO; esso avrà i suoi risalti da combagiare col canaletto delle colonne, affinchè stando queste ben ferme insieme col piede, o pianta AC, il telaio possa scorrere in su ed in giù portando seco la valvula di rame, o di ferro TMVZ, la quale dovrà essere con diligenza bilicata con due sottili pernj giranti sugli anelletti di ottone collocati in S, R. Accanto al pernio R vi si conficca una puleggia concentrica, alla quale corrisponde un' altra Q, o uguale alla prima, o di minor diametro in quella proporzione, che parrà opportuna „.

„ Raccomandasi all' inferior puleggia R una sottil catenuzza di fil d' ottone, che si nasconda nell' esterior canaletto della puleggia, e di là passando nella puleggia superiore Q, che sarà aggravata di un peso P, che faccia equilibrio colla forza del fluido, comunicherà dalla parte inferiore alla superiore quella forza, che vuol misurarsi col peso P „.

„ Se poi vorrà adoperarsi la valvula per avere gli angoli di deviazione, allora senza alcun peso in vece della puleggia si adatta un cerchio graduato con una lancetta, affinchè possa indicare fuori dell' acqua quegli angoli di deviazione, che la valvula va pigliando per le diverse impressioni del fluido, che stando per esempio al livello YY tien sommersa la valvula TZVM „.

(*) Opera citata num. 144, 145.

67. Ognuno vede pertanto come con questa macchinetta, si potrebbe dedurre la velocità della corrente, a qualunque profondità, sia dal peso che tiene la valvula in situazione verticale, come dall' angolo in che essa s' inclina per la forza od urto dell' acqua contro la medesima. Ma come portare un meccanismo di simil natura nel bel mezzo di un fiume in piena? e come sperare di conoscere la vera legge delle velocità senza temere gli inevitabili cangiamenti che indur vi debbe, non dirò l' attrito, che può rendersi piccolissimo, ma la presenza del telaio, e di tutto il castello? Ximenes si lusinga, che tenendo largo il telaio sì che la valvula le sia molto distante, poco si avrà a temere dall' urto del fluido contro il castello: ma e come potrà servire allora questa macchina, per misurare le velocità in vicinanza alle sponde. Oltre di che io dubito, che dovrà esser tale cotesta larghezza del telaio, da rendere sempre più difficile il maneggio, e quind' impraticabile l' esecuzione delle sperienze, nè mai saremo sicuri da ogni timore, se prima l' esperienza non avrà resa manifesta la cosa.

Ma già presso che tutte le invenzioni del sig. Ximenes peccano in questo difetto, d' aver de' castelli troppo macchinosi, i quali anzi che agevolare le sperienze, le rendono più operose, e più incerte ne' loro risultamenti. Tanta è l' efficacia di un semplice meccanismo in queste ricerche, che non vediamo giammai gl' Idrometri intenti al perfezionamento di quelli, che da questa prerogativa s' allontanano. Veniamo ora a parlare del tachimetro idraulico immaginato dal sig. Woltmann.

68. Non avendo potuto vedere la descrizione di questo strumento che ne dà l' autore nell' opera intitolata, *Théorie und gebrauch des hydrometrischen Flugels*, pubblicata in Amburgo circa l' anno 1790; ci contenteremo di riferire quella che trovasi registrata nel tomo 6. pag. 258. dell' opera periodica intitolata, *Bibliotheque Universelle*, pubblicata a Ginevra l' anno 1817.

„ VVV (*tav.* 11. *fig.* 3.) è un volante terminato da due palette „ i di cui piani sono convenientemente inclinati all' asse VAA che „ gira col volante. A quest' asse appartiene una vite perpetua B, la „ quale quando si vuole, s' incastra colla ruota R che gli sta sotto. „ Questa ruota porta un rocchetto concentrico, il quale non si vede „ perchè gli sta dietro; e questo rocchetto incastra, e conduce la „ seconda ruota S, la quale è destinata solamente a contare le ri„ voluzioni della prima, presso a poco nel modo stesso che la lan„ cetta delle ore conta i giri di quella dei minuti in un orologio „.

„ Queste due ruote sono portate da una leva IL, spinta al basso „ costantemente per mezzo di un elastro; ed allora le due ruote so„ no fermate da un dente Q aderente al semicircolo, cui vedesi al

„ di, sotto delle ruote: ma allorchè si tira in alto la funicella FL, „ il sistema delle due ruote s' innalza pal moto della leva attorno il „ suo punto d' appoggio situato all' altra estremità; abbandonano il „ dente che le tenea fermate, e la ruota a dritta incastra la vite „ perpetua, che allora la fa girare secondo l' ordinaria condizione di „ questo genere d' ingranaggio, vale a dire, che ad ogni giro del „ volante, o del suo asse, viene spinto innanzi un solo dente della „ ruota, che s' ingrana colla vite perpetua, di modo che se questa „ ruota ha cento denti, ella fa un sol giro per ogni cento del vo- „ lante, e può servire per conseguenza a contare il numero de' giri „ che questo compie in un dato tempo. La seconda ruota, o sup- „ plementaria, conta all' uopo i giri della prima, se questa ne fa- „ cesse più d' uno, nel tempo dello sperimento. Ma ecco come in „ questo si adopera lo strumento. „

„ Tutto l' apparecchio è portato da un' antenna cilindrica TT d' una „ lunghezza almeno eguale alla profondità del fiume, più quella porzione „ che è necessaria nella manovra. Si vede in G una coda o piastra „ di metallo, molto più lunga di quel che mostra la figura, la qua- „ le serve come di banderuola, o piuttosto di timone, che allora „ quando s' immerge l' apparecchio in una corrente in cui non pos- „ sa vedersi, o per la sua profondità, o per la sua torbidezza, for- „ za il piano del medesimo a mettersi nella direzione dell' ac- „ qua; situazione che si riconosce dalla mano che tiene l' anten- „ na verticale, la quale non trova in lei tendenza a girare, quan- „ do questa condizione è ottenuta. Cotest' antenna porta delle di- „ visioni di un piede l' una, ed anche meno se si giudicherà neces- „ sario. „

„ Supponiamo pertanto l' osservatore in un battello, fermato da „ un canapo nel mezzo del fiume di cui si vuol misurare la veloci- „ tà a diverse profondità; e primieramente, nel primo piede, a „ partire dalla superficie. Immergerà verticalmente l' apparecchio, „ tenendolo per l' antenna TT, e lasciandosi dirigere dal timone G. „ Il volante comincierà a girare da che lo strumento sarà immerso. „ Allora quando avrà acquistata la sua velocità totale ed uniforme; „ avendo sotto gli occhi un orologio a secondi, si tirerà la funicel- „ la FL, perchè la ruota R s' ingrani colla vite B, al momento in „ cui la lancetta de' secondi sarà sullo zero, o sia sul 60; si terrà „ la ruota in questa situazione per un intero minuto, poscia si ab- „ bandonerà il cordone, ed il roteggio verrà fermato dal punteruo- „ lo Q. Si farà allora sortire l' apparecchio dall' acqua, e si leggerà „ nel roteggio il numero de' denti della prima ruota, che sono pas- „ sati sotto alla vite, vale a dire il numero de' giri del volante fat- „ ti in un minuto. Da ciò si concluderà, se si vuole, il numero

„ di questi giri ad ogni minuto secondo, prendendo la sessantesima
„ parte del risultamento precedente. „

„ Si ripeterà l' osservazione un piede più basso, e del pari di pie-
„ de in piede sino al fondo; tenendo conto di ciascun risultamento.
„ Si otterranno così le velocità relative dell' acqua nelle diverse pro-
„ fondità; velocità proporzionali al numero de' giri del volante in
„ uno stesso tempo (sia di un minuto, o di un secondo), a ciascu-
„ na profondità in cui è stata fatta l' osservazione. „

„ Ma queste velocità così osservate, non sono ancora che *relative*,
„ e per aver le *assolute*, bisogna sapere qual velocità reale di una
„ data corrente, corrisponde al numero de' giri del volante dell' i-
„ strumento, osservato in questa stessa corrente. Questa determina-
„ zione è l' oggetto di una sperienza preliminare, dietro la quale si
„ forma, come il linguaggio o dizionario dello strumento, una tavo-
„ la alla quale si ha in seguito ricorso, per tradurre ciascun risul-
„ tamento osservato, in velocità reale, o in tanto di piede per se-
„ condo. „

„ Per fare questa sperienza fondamentale, in vece d' immergere
„ lo strumento in una corrente di conosciuta velocità (lo che sareb-
„ be una petizion di principio) si fa muovere l' apparecchio nel sen-
„ so del suo asse di rotazione, in un' acqua stagnante, con una ve-
„ locità determinata, vale a dire trasportandolo uniformente lungo
„ il bordo di un bacino, per uno spazio rettilineo misurato; ed os-
„ servando coll' orologio a secondi, il tempo che impiega a percor-
„ rere questo spazio; cioè a dire, ottenendo l' espressione esatta
„ della velocità, che è sempre lo spazio diviso per il tempo. Impe-
„ rocchè, sia che l' apparato si muova uniformemente con una data
„ velocità in un' acqua stagnante, sia che quest' acqua, colla stessa
„ velocità, venga ad urtare lo strumento immobile; l' impressione
„ obbliqua che fa girare le palette del volante è sempre la medesi-
„ ma, e per conseguenza il numero de' giri corrispondenti a questa
„ velocità è identicamente lo stesso. „

69. Farò osservare in primo luogo che le divisioni dell' antenna TT, cui dicesi possano essere di un piede l' una ed anche meno sarebbero meglio indicate, se si dicesse che debbono essere di tal lunghezza, qual è quella del volante VV; imperocchè questo debb' essere investito da ciascuno degli strati acquei ne' quali si vuol divisa la profondità della corrente nel luogo dello sperimento. E se la figura che noi riportiamo, la quale è quella stessa registrata nell' opera citata, è stata fatta, come ci vien riferito, sopra di una scala della metà delle dimensioni reali; io credo che le divisioni dell' antenna non potranno esser minori di sei pollici l' una (m.^{i} 0,1624), perchè tale è la lunghezza del volante.

Il sig. Navier nella citata nota alla pag. 361. di Belidor, smentisce l' oppinione del sig. Trechsel, il quale dice che lo strumento immaginato da Woltmaun *è poco o nulla conosciuto in Francia*. Assicura egli d' aver veduto tra le mani del sig. Gauthey, e di altre persone, uno strumento di questo genere, 15. anni prima dell' epoca in cui pubblicò le sue note, che è quanto dire nel 1804; e soggiunge che sì fatto strumento *oltre agli inconvenienti che gli sono particolari, ha questo ancora, che conviene prima studiarlo in una corrente di conosciuta velocità*; sembrandogli inesatto il metodo tenuto dagl' ingegneri tedeschi, i quali all' intendimento di cui si ragiona, muovono equabilmente lo strumento, in un fluido stagnante, siccome abbiamo veduto più sopra.

Io credo che questa oppinione del sig. Navier discenda da alcuni risultamenti delle sperienze del sig. Dubuat, da' quali risulta che l' urto di una corrente contro un corpo immobile, è maggiore della resistenza del corpo mosso nell' acqua stagnante. Ma il Dubuat adoperò in queste sue sperienze una cassetta pertugiata, avente ora 5 ora 625 fori; e misurava la pressione del fluido contro la faccia del suo strumento con un artifizio analogo a quello adoperato nel tubo di Pitot. Riflette quindi saggiamente il sig. profess. Venturoli; 1.° che a verificare la corrispondenza fra l' urto contro un corpo immobile, e la resistenza dello stesso corpo che muovasi in un fluido stagnante, poche ed irregolari furono le sperienze di Dubuat fatte col corpo fermo, opposto all' urto della corrente; 2.° che nelle altre l' uniformità del moto non era troppo bene assicurata; 3.° che le oscillazioni del fluido nel sifone rendono molto incerta la misura della piccola colonna dalla quale si calcola la pressione; 4.° e che per quanto numerosi siano i trafori della cassetta la somma delle pressioni esercitate contro i medesimi non può mai prendersi per la pressione totale del piano, onde questa pressione dee poi valutarsi con un' estimazione che è sempre vaga ed incerta. Ben si conferma una tale corrispondenza mercè i risultamenti delle sperienze istituite dal nostro Italiano p. Ximenes, il quale colla sua ventola, poc' anzi descritta (64), istituì molte sperienze all' intendimento di verificare la legge delle resistenze de' corpi, contro l' urto di una corrente equabile, già prima di lui determinata dai signori Alembert, Condorcet e Bossut. Confermarono infatti coteste sperienze di Ximenes, i risultamenti delle sperienze precedenti; e mostrarono di più, che la misura dell' urto è la stessa o si muova il corpo contro il fluido, e viceversa. (*)

(*) *Elementi di Meccanica* ecc del sig. Venturoli. Ediz. terza. Tom. II, pag. 196.

Più esatto riescir dovrebbe certamente l'uso di questo tachimetro idraulico, mercè la bella teoria cui trovasi inserita alla pag. 234. dell'opera del sig. Venturoli poc'anzi citata. Nella terza parte di questa dissertazione riporteremo per intero cotesta teoria; e per ora ci contenteremo di riferire, che per essa si determina immediatamente la velocità assoluta della corrente mercè la conosciuta inclinazione delle palette del volante, e la velocità del centro del medesimo. La prima è data dalla particolar forma dello strumento, la seconda rilevasi dal conoscere, per via del roteggio, il numero de' giri che compie il volante in un dato tempo. Non si trascura, in questa teoria del sig. Venturoli di mettere a calcolo anche le resistenze che sono proprie di cotesto meccanismo: ma siccome dalla struttura della macchina non sarebbe agevol cosa il determinare sì fatte resistenze, così propone egli che si faccia uso dell'artifizio adoperato dagli ingegneri tedeschi, onde determinare il valore delle resistenze medesime. Io credo pertanto, che se non fossero alcuni inconvenienti, che come dice il sig. Navier, sono proprj dello strumento, il sig. Venturoli lo avrebbe reso di un uso tanto semplice ed esatto, che non s[illegible]besi desiderare migliore. Gl'inconvenienti di che si parla sono a mio credere i seguenti. Immerso lo strumento alla profondità che si vuole, è mestieri aspettare che il volante abbia concepito quel movimento equabile che può imprimergli la corrente, dopo il qual tempo, traendo la funicella FL, si porta la ruota R ad ingranarsi colla vite B, e si comincia a notare il tempo della sperienza. Per tutto questo tempo si ritiene che il moto del volante sia equabile, giacchè tale era nel suo incominciamento; e infatti, in virtù dell'inerzia, il moto di un corpo si mantiene equabile se non concorre altra forza capace di produr cambiamento: ma l'urto del dente della ruota contro le spire della vite non sarà egli capace ad alterare il moto equabile del volante? E dovendo questo mettere in moto la ruota, non dovrà vincerne l'inerzia, le resistenze passive, e quanto si oppone al suo movimento. E frattanto che tutto questo succede, si dovrà credere equabile il moto del volante; e si dovrà dire, alla fine dello sperimento, che i giri del volante furono compiti con moto equabile? Di più quando si abbandona la funicella, perchè il roteggio venga fermato dai sottoposti punteruoli, cessa l'azione dell'incastro fra il dente della ruota e la spira della vite, e frattanto il roteggio continua a muoversi fintantochè non sia disceso ai punteruoli Q. Ma in questo intervallo, che non è compreso nello sperimento, i giri del roteggio non sono già rivoluzioni del volante, ma un moto di quello proceduto dall'inerzia. E vero che l'intervallo fra l'istante in cui si rallenta la fune e quello in cui il roteggio vien fermato sarà brevissimo, secondo la

gagliardía dell' elastro che spinge ; ma io dubito che non sarà rigorosamente istantaneo, e un qualche moto nel roteggio avrà luogo, il quale altererrà sempre più i dati della sperienza. Questo cred' io avrà inteso di dire il sig. prof. Bertini (*), quando asserisce che i dati su quali è fondato il calcolo di questo tachimetro idraulico sono *troppo fallaci o troppo incerti per poter dare de' risultamenti rigorosi e fedeli*.

70. Lo strumento del quale sembra che i francesi si compiacciano, o che almeno agli altri lo preferiscano è quello immaginato dal signor Gauthey (17), e descritto nel luogo citato delle sue opere colle seguenti parole.

„ Lo strumento di cui mi sono servito, è composto di una specie di paletta di latta, larga m.i 0,162; alta m.i 0,081. Il gambo „ è un'asta di ferro della lunghezza di m.i 1,10 circa, piatta nella „ sua parte inferiore in forma di coltello. Anche la parte superiore „ è piatta ma in senso contrario. Nel mezzo di questo gambo è „ praticato un foro rotondo di 4 millimetri di diametro. La sua e„ stremità inferiore è anch' essa piatta nel senso della parte superio„ re, ma solo per una lunghezza di m.i 0,054, onde poter essere „ attaccata solidamente alla piastra di latta. Nella parte superiore „ sono praticati due fori l'uno oblungo e l'altro rotondo: quest' ul„ timo è posto 31 millimetri al di sopra del primo. Il tutto deb„ b' essere costrutto in modo che il gambo di questa paletta sia in e„ quilibrio attorno del foro di mezzo. La seconda parte di questo „ strumento è un manico di ferro della lunghezza di 70 centimetri „ circa, nella di cui parte inferiore è praticata una spaccatura ed „ un foro, onde potere abbracciare il gambo della paletta verso il „ suo mezzo, ed unirlo al manico presso a poco come un giogo di „ una bilancia, per mezzo di un assicello scorrevole liberamente. „ Alla parte superiore di questo manico è attaccato un' arco di cer„ chio piatto, avendo l'assicello inferiore per centro. Vi si attacca „ altresì un filo d' ottone, piegato egualmente in arco di cerchio; „ i quali archi debbono esser posti rimpetto ai fori praticati nell' e„ stremità superiore del gambo della paletta, e passare attraverso „ de' medesimi liberissimamente. Sopra l'arco di circolo piatto, so„ no incise le divisioni che debbono indicare i diversi gradi di „ pressione, da cui è spinta la paletta. Questa è di nuovo legata al „ manico, mercè di un' elastro fisso nell' estremità inferiore del me„ desimo, per mezzo di una vite, od altro, e quest' elastro è po„ scia attaccato al gambo della paletta, alcun poco al dissotto del

(*) *Trattato teorico-pratico de' fiumi*. pag. 60. Lucca 1823.

„ foro dell'arco, per mezzo di un piccolo anello mobile collocato „ in un terzo foro praticato in questo gambo; di modo che, tenendo fermo il manico, e spingendo la paletta, spieghi l'elastro la „ sua tensione. „

E qui insegna il sig. Gauthey il modo di marcare le divisioni dell'arco di cerchio, onde servano alla misura delle velocità di una corrente. Debbesi in primo luogo formare una tavola in cui sia registrata una serie di velocità più o meno grande secondo la natura del canale o fiume da sperimentare, e le pressioni od urti della corrente contro la paletta, devuti a sì fatte velocità. Il sig. Gauthey riferisce a quest'oggetto una tavola tolta da Belidor, la quale comincia con una velocità di tre pollici (m.i 0,081) e termina con una velocità di sei piedi (m.i 1,949) progredendo sempre con una differenza di 3. pollici. Ma io trovo che questa tavola è poco esatta, forse perchè il sig. Gauthey avrà trodotta quella di Belidor da misure antiche in metriche; mentre io calcolo immediatamente le misure metriche ch'egli riferisce. A cagion d'esempio la sua paletta larga m.i 0,162 e alta m.i 0,081 riceve, secondo cotesta tavola, una percossa corrispondente a chil. 0,0038 quando la velocità è di m.i 0,081, ed io trovo invece chil. 0,0044; ad una velocità di m.i 0,325 corrisponde, giusta la sua tavola, una pressione di chil. 0,0714, mentre secondo i miei calcoli risultano chil. 0,0706. Ad una velocità di metri 1,056 corrisponde nella sua tavola una percossa di chil. 0,7572, ed io trovo invece chil. 0,7459; finalmente alla velocità di m.i 1,949 corrisponde nella tavola una pressione di chil. 2,5776, e da miei calcoli ne risulta una di chil. 2,5408. I divarj sono piccoli in vero, ma nelle grandi velocità sono abbastanza sensibili. Ciò sia detto fra parentesi; torniamo al soggetto. Costruita con tutta la diligenza possibile cotesta tavola, ecco come si procede.

„ Si pone il gambo della paletta orizzontalmente, dopo di avere „ fermato solidamente il manico in una morsa. Si apre nel mezzo „ della paletta un foro, e vi si attacca un piccolo sacco leggero, „ raccomandato ad una funicella. Poscia si mettono successivamente „ in questo sacco tutti i pesi indicati nella tavola precedente, per „ mezzo de' quali l'elastro vien posto in azione. Allora si marca e „ si numerano, lungo l'arco di circolo, i gradi ne' quali si ferma „ il gambo della paletta; al quale scopo si dovrà intonacare di cera „ quest'arco, ed incidere le divisioni con una punta, allorchè saranno marcate su questa cera. „

„ Volendo adoperare lo strumento, si mette nell'arco di ottone „ un piccol pezzetto di stoffa in cui si fa un foro; si tiene l'estremità superiore del manico con una mano, e con l'altra s'abbraccia l'estremità inferiore del manico del gambo. Si mette in

„ seguito la paletta nell'acqua, esposta all' urto della corrente, ed „ apresi poco a poco la mano, inclinando il manico affinchè il gam- „ bo della paletta rimanga sempre verticale. Allora la corrente, per „ la sua pressione contro la paletta, spiega l' azione dell' elastro, e „ fa che il piccol pezzetto di drappo s' avvanzi di una sua porzione. „ Levasi in seguito la paletta dall' acqua, e traendo la parte supe- „ riore del gambo sino a che ella tocchi il pezzetto di drappo svi- „ luppato, si conosce sino a qual grado abbia teso l' elastro, e quin- „ di si viene in cognizione della velocità misurata. „

„ Vedesi da questa costruzione, che lo strumento non può esse- „ re falso giacchè i gradi non sono segnati se non dietro la sperie- „ enza. Nel farne uso però, conviene avere attenzione di non a- „ prire la mano che a poco a poco, senza di che la paletta farebbe „ molte oscillazioni, soprattutto allorch' ella comincia a ricevere la „ percossa. Ella ne fa già ancora, per la ragione che il moto del- „ l' acqua non è sempre uniforme, ma il pezzo di drappo indica la „ maggiore velocità, ed è poi facile conoscere ad occhio la mi- „ nore. Si conclude allora che la velocità media è alla metà dell' in- „ tervallo tra questi estremi, allorchè il moto oscillatorio è unifor- „ me, ed è più vicina all' uno che all' altro, secondo che questo „ moto lascia più lungo tempo il gambo da una parte che dall' altra. „ Del resto accade sovente che questo moto è poco sensibile, ed al- „ meno non dura gran tempo. „

A maggiore illustrazione dell' uso di cotesto strumento, soggiunge il sig. Gauthey le seguenti osservazioni.

„ Lo strumento di cui mi sono servito potrebbe misurare sino ad „ una velocità di m.[i] 1,95 per secondo: ma le grandi velocità le a- „ vrebbero troppo tormentato, e le piccole non sono abbastanza sen- „ sibili pel medesimo. In ogni caso però bisognerebbe cangiar la pa- „ letta col diminuirla della metà nelle rapidi correnti, ed aumentar- „ la del doppio ne' ruscelli che hanno poca velocità: allora potran- „ no servire le stesse divisioni. Si vede facilmente che con sì fatto „ strumento, si possono misurare le velocità dell' acqua a qualunque „ profondità, ed anche ne' grandi fiumi. Ma in questo caso, perchè „ il battello da cui si misurano queste velocità nulla tolga al moto „ dell' acqua, si allontanerà lo strumento dal medesimo, attacandolo „ ad una lunga pertica; e per impedire le sue vibrazioni, biso- „ gna primieramente mettere la paletta nell' acqua, coricata, poi- „ chè allora la percossa è meno considerevole, e si rialzerà in se- „ guito poco a poco: bisogna altresì avere attenzione di non fare „ avvanzare la paletta contro la corrente, poichè la velocità compa- „ rirebbe maggiore. Si osservi finalmente, che l' estremità inferio- „ re del gambo è piatta in forma di coltello, perchè la percossa

„ dell' acqua contro questa parte dello strumento, non cagioni intu-
„ mescenza, nè sensibile effetto che alterar possa la pressione con-
„ tro la paletta. „

71. Oppina il signor Navier, che questo strumento sia quello cui presenta il minor numero di inconvenienti; ma che *bisognerebbe avere studiata d' avvantaggio, e sopra una corrente di conosciuta velocità, la relazione tra questa, e la superficie impiegata*. Lasciando da parte quest' ultima considerazione, vediamo se i pochi inconvenienti a cui va soggetta la presente invenzione, nulla tolgano al merito della medesima, e se nella pratica idrometria possa adoperarsi con tutta quella confidenza che le viene attribuita.

In primo luogo, quella misura media fra le diverse velocità mostrate dallo strumento, allorchè egli oscilla pel moto vario della corrente, non mi pare troppo esatta, e nemanco approssimativa quanto basti; poichè è sempre incerto il dover distinguere ad occhio la situazione di un' asta irrequieta ne' suoi movimenti. Ma voglio credere che a motivo della regolarità del tratto d' alveo che si dee scegliere, ciò non avvenga, od avvenga ben di rado, per cui possa condonarsi allo strumento cotesto difetto. E che sarà poi del metodo di adoperare lo strumento ne' grandi fiumi, insegnatoci dal sig. Gauthey? Quando avrò allontanato dal battello lo strumento, mercè di una lunga pertica a cui sia legato; e che lo avrò immerso coricato nell' acqua a quella profondità che bisogna, come dovrò fare per sollevarlo a poco a poco rittamente; come assicurarmi che la paletta riceva direttamente l' impulso della corrente; e come finalmente procurare che ciò succeda a poco a poco, onde il risultamento ottenuto sia esatto quanto può mai desiderarsi. Se la paletta debbe immergersi coricata, converrà profondare anche il manico, e in tanta distanza in cui trovasi l' osservatore dallo strumento, riescirà sommamente difficile l' adoperarlo a questo modo. S' aggiunga di più che, o per la profondità, o per la torbidezza delle correnti riescirà malagevole il conoscere quand' è che la paletta trovasi nella situazione cui debb' essere; e radirizzato lo strumento, e tolto fuori dall' acqua non saprà decidersi con molta esattezza la profondità alla quale trovavasi la paletta nell' atto dello sperimento, giacchè essa insieme al suo gambo sarà tutta bagnata dalla corrente. Ma voglio essere corrivo con questa invenzione, e voglio ritenere per praticabile il metodo di che si ragiona: piuttosto voglio passare ad una disamina più essenziale e concludente.

Qualunque sia la forma e la grossezza che si vuol dare al gambo della paletta, crede forse il sig. Gauthey, e con esso lui il suo nipote sig. Navier, che l' impressione della corrente contro questo gambo non abbia ad alterare i risultamenti della sperienza? Quando ciò fosse

eccole uno strumento di gran lunga più perfetto del precedente, e di una semplicità senza paragone maggiore. All' asta o gambo della paletta si unisca in vece una palla, e si faccia girare liberamente attorno l' estremità superiore di questo gambo: immersa la palla nella corrente l' asta s' inclinerà al perpendicolo, e la velocità sua nel luogo della palla, sarà proporzionale alla radice della tangente dell' angolo di quest' inclinazione. Cotesta è la dottrina antichissima del pendolo di Guglielmini, la quale ha appunto luogo quando il filo che sostiene la palla sia disteso in linea retta anche sotto la superficie dell' acqua. Ma perchè mai al filo flessibile, che sott' acqua s' incurva e rende fallace l' applicazione della dottrina precedente, non fu sostituito un filo rigido, piatto al modo di una lama di coltello, e che punto non incurvasse? Ognuno ben sa, che gl' idrometri non abbracciarono cotesto divisamento, perchè alla fallacia del metodo precedente si verrebbe a sostituire quest' altra, che la parte immersa del filo rigido, essendo urtata dalla corrente con forze disuguali dalla superficie al fondo, e con quelle forze di cui si va in cerca, non saprebbesi in qual modo mettere a calcolo l' effetto di queste forze, mentre sono il subbietto della quistione; e trascurandole totalmente si procederebbe con errori gravissimi. E non debbe adunque essere lo stesso del gambo della paletta del sig. Gauthey? non so chi potrà impugnarlo. Dunque, se fosse anche sola cotesta imperfezione dello strumento, basterebbe per dubitare giustamente della sua esattezza.

21. Non è così dello strumento che ci rimane a descrivere, giacchè questo a mio parere è il più atto allo scopo a cui è destinato. Il sig. prof. Venturoli, che ne è l' inventore, lo propose siccome una modificazione del pendolo idrometrico di Guglielmini, e cercò di liberarlo da que' difetti che rendevano tanto fallaci ed ingannevoli i risultamenti ottenuti col metodo ordinario, conservando nel tempo stesso quella semplicità che rendeva tanto pregevole la prima invenzione.

Consiste questo nuovo strumento in una canna o asta cilindrica, mobile attorno un punto fisso, la quale è divisa in minime parti, che s' immergono successivamente nella corrente, tenendo conto dell' inclinazione dell' asta al perpendicolo. Da queste declinazioni, mercè di un calcolo non molto complicato, si viene a conoscere la velocità de' diversi strati della corrente, siccome mostreremo nello spiegare la teoria di questo tachimetro.

Riferiremo pertanto il modo di formare lo strumento, e di adoperarlo nella ricerca della scala delle velocità, trascrivendo le parole che leggonsi nella seconda edizione degli elementi del sig. Venturoli. tom. 2. pag. 226, le quali poco differiscono da quelle registrate nella memoria

inserita nel tom. XIV. della Società Italiana pag. 165. in cui spiegò per la prima volta distesamente il suo divisamento.,

„ Il sostegno del pendolo può essere una robusta colonnetta di le-
„ gno divisa in parti eguali, ed armata di forte punta di ferro, me-
„ diante la quale potrà piantarsi nel fondo dell' alveo, e tenersi rit-
„ ta verticalmente. Sia la colonnetta abbracciata da una staffa quadra
„ che possa scorrere su e giù per essa, e fermarsi a vite a quale al-
„ tezza si vuole. Sporga dalla staffa una spranga orizzontale, lunga
„ quanto più si può, ed inserita in guisa da poter trascorrere oriz-
„ zontalmente e prolungarsi or dall' una or dall' altra parte della co-
„ lonnetta. Da un capo di questa spranga penda la canna del pendo-
„ lo unitavi a cerniera in modo che abbia libertà di girare a secon-
„ da della corrente. E l' altro braccio della spranga porti un equi-
„ pondio mobile destinato ad equilibrare il peso della canna, affin-
„ chè la colonnetta non patisca alcuno sforzo tendente a rimuoverla
„ dal sito verticale. „

„ Con questa semplicissima foggia di armatura abbiamo il vantag-
„ gio di potere con una sola stazione della colonnetta esplorare più
„ d' una perpendicolare della stessa sezione, portando più e più in
„ fuori per mezzo della spranga mobile, l' asta del pendolo. Ne' pic-
„ cioli canali spesse volte verrà fatto di compiere la misura dell' in-
„ tera sezione con una stazion sola, o al più con due che si faccia-
„ no l' una rispetto all' altra in vicinanza delle due rive opposte.
„ Nè vi sarà bisogno nè di gettare un ponte, nè d' accostare allo stru-
„ mento una barca. E quando poi sia necessario ricorrere a questi
„ ripieghi, sarà sempre un vantaggio il potersi estendere alle per-
„ pendicolari alquanto discoste dal ponte o dalla barca, ed esenti
„ dalle alterazioni che la vicinanza di questi ostacoli potrebbe in-
„ durre. „

„ Mentre poi sia coll' abbassare, sia col rialzare la staffa, le divi-
„ sioni del pendolo si fanno venire una per volta, a toccare il pelo
„ dell' acqua, noi mediante le divisioni della colonnetta conosceremo ad
„ ogni volta l' altezza del centro di sospensione sopra il pelo della
„ corrente. E conosciuta questa, si ottien subito senza bisogno nè
„ di quadrante, nè d' altro, il valore dell' angolo di declinazione. „
Infatti dividendo l' altezza del centro di sospensione per la porzione del pendolo che sporge fuori dell' acqua, il quoziente rappresenterà il coseno di quest' angolo.

Dopo tutto questo ognuno è in caso di giudicare se sia vero quant' io diceva, che cioè fra tutte le invenzioni che abbiamo fin qui descritte, quella che più sembra meritare la confidenza degli Idrometri è la presente, la quale non saprebbesi ravvisare da quali inconvenienti sia resa difettosa. Quando si avrà scelto un tratto di

fiume regolare, ed una sezione in cui l'acqua cammini con moto equabile, tutto sarà facile, tutto si ottorrà colla possibile precisione. Di una sola cosa pare abbiasi a temere, ed è che lo strumento possa alcuna volta oscillare senza fermarsi in un' inclinazione costante. Infatti sperimentando in un fiume il di cui fondo avesse delle irregolarità presso la sezione in cui si eseguiscono le sperienze, temo che sì fatte irregolarità possano fare oscillare lo strumento, allorchè è immerso d' assai sotto la superficie, al modo stesso che possono procurare all' asta ritrometrica di Bonati una variabile inclinazione (45). Ma di ciò la sola sperienza ne può rendere chiariti. Fa meraviglia però, che attesa la semplicità del meccanismo, e la facilità somma di adoperarlo, non sia stato fin' ora messo alla prova da alcuno, fra tanti celeberrimi autori che si sono occupati in sì fatte ricerche. Sono parecchi anni, che l' esimio inventore di questa macchinetta, ha fatto proponimento di eseguire delle sperienze, ma le gravi e molte sue occupazioni non gli permettono di daro esecuzione a' suoi divisamenti. Io pure avrei un tale pensiero, ma non so quanto potrò fidarmi nella pochezza del mio ingegno, e nella scarsezza delle mie cognizioni. Che che sia di tutto questo io dirò col sig. Conte Mengotti, ch' egli è da desiderarsi, che con questo strumento sia istituito un buon numero di sperienze, per poter apprezzane il merito più fondatamente.

PARTE TERZA.

Delle diverse teorie de' tachimetri Idraulici.

73. Per dare compimento alla presente Dissertazione, non ci rimane che a far conoscere qual parto abbia avuto il calcolo analitico, nelle ricerche di che abbiamo fin qui favellato. E per procedere collo stesso ordine tenuto nella seconda parte di cotesto nostro discorso, divideremo la presente in due capitoli. Nel primo daremo le teorie de' tachimetri idraulici galleggianti, nel secondo quelle de' fissi. Ed in ciò non tralascieremo di fare alcune applicazioni, massimamente dove tornerà vantaggioso, e di maggiore schiarimento; essendo nostro scopo il cercare di fare conoscere con tutta la chiarezza possibile, gli sforzi degli Idrometri nella soluzione dell' importantissimo problema sulla scala delle velocità negli alvei di corso equabile: e dove ciò non riesca, sarà solo effetto della dappocaggine di chi scrive, il quale sa il cortese lettore, quand' abbia bisogno di benigno compatimento. Nella lusinga pertanto di ottenerlo, riprenderemo il lavoro con que' mezzi che valgono a meritarlo.

CAP. I.

Teorie de' tachimetri idraulici galleggianti.

74. Incomincieremo coteste teorie da quella de' galleggianti semplici; e mostreremo in primo luogo come nelle correnti sensibilmente orizzontali, il galleggiante debb' essere quasi tutto immerso nell' acqua, a volere che concepisca tutta la velocità della corrente.

Sia u la velocità equabile dell' acqua; c quella del galleggiante. L' altezza della porzione immersa $= a$; quella della porzione sporgente fuori dell' acqua $= b$. Supporemo l' aria tranquilla e diremo γ la gravità specifica dell' acqua; δ quella dell' aria. Sia inoltre ma la superficie della faccia che viene spinta dalla corrente, ed mb la superficie urtata dall' aria.

Movendosi il galleggiante con velocità equabile c, cerchiamo da quali forze viene investito. L' urto della corrente contro la faccia ma, eguaglia il peso di un prisma d' acqua avente per base la superficie ma, e per altezza quella dovuta alla velocità rispettiva $u-c$; sarà dunque questa forza $= ma\gamma\frac{(u-c)^2}{2g}$, in cui g rappresenta il doppio dello spazio percorso da un grave in un minuto secondo di sua caduta libera. Resiste a questa forza l' urto che riceve la faccia mb, prodotto dall' aria ambiente; il qual urto ha per misura il peso di un prisma d' aria, che abbia per base la superficie mb, e per altezza quella dovuta alla velocità c: sarà dunque questa forza $= mb\delta\frac{c^2}{2g}$. La forza pertanto che sollecita il nostro galleggiante, sarà espressa da $\frac{m}{2g}[\gamma a(u-c)^2 - \delta bc^2]$; e questa divisa per la massa darebbe l' espressione della forza acceleratrice $\frac{dc}{dt}$: ma poichè il moto del galleggiante debb' essere equabile così sarà $\frac{dc}{dt}=0$, e però anche $\gamma a(u-c)^2 - b\delta c^2 = 0$. Di qui si ricava

$$c = \frac{u}{1+\sqrt{\left(\frac{b\delta}{a\gamma}\right)}}.$$

E ben si vede che sarà $c = u$, solo quando b è eguale a zero, od almeno quantità piccolissima a fronte di a; lo che si doveva dimostrare.

Se questa condizione non è adempita avremo sempre $c<u$. Rendesi molto più sensibile cotesta disuguaglianza fra le velocità c, u; allora quando l'aria venisse agitata dal vento, in direzione contraria alla corrente. Imperocchè chiamata ω la velocità del vento, l'urto che soffre la porzione del galleggiante che sporge fuori dell'acqua sarà $= mb\delta\frac{(c+\omega)^2}{2g}$; e l'equazione del moto equabile diverrà $a\gamma(u-c)^2 - b\delta(c+\omega)^2 = 0$, da cui si ricava

$$c = \frac{u - \omega\sqrt{\left(\frac{b\delta}{a\gamma}\right)}}{1 + \sqrt{\left(\frac{b\delta}{a\gamma}\right)}},$$

E qui di nuovo torna $c = u$, quando $b = 0$, od almeno quantità piccolissima; e potrebbe avvenire che fosse $c > u$, allorchè il vento spirasse nel senso della corrente. Di qui la necessità di eseguire coteste sperienze ad aria tranquilla.

75. Dimostreremo in secondo luogo, che se la superficie della corrente non sarà d'insensibil pendenza, il galleggiante concepirà sempre una velocità maggiore di quella del fiume.

Sia infatti p il peso del galleggiante immerso nell'acqua, e Φ l'inclinazione del pelo della corrente alla verticale. Decomposto il peso p in due forze, una perpendicolare, e l'altra nel senso della corrente, sarà quest'ultima $= p\cos.\Phi$. Se supponiamo che il galleggiante abbia concepita tutta la velocità della corrente, non soffrirà più alcun urto per parte della medesima, e si troverà nel caso di un corpo posto sopra un piano inclinato, scevro da qualunque resistenza. Allora per l'azione del peso $p\cos.\Phi$ verrà accelerato il suo movimento, e dall'altra parte la resistenza del mezzo si frapporrà a questa accelerazione, ed il moto del galleggiante diverrà equabile. In fatti cotesta resistenza del mezzo è espressa da $am\gamma\frac{(c-u)^2}{2g}$, e però la forza sollecitante del nostro corpo sarà $p\cos.\Phi - am\gamma\frac{(c-u)^2}{2g}$. Il secondo termine di questa espressione cresce col crescere di c, e quindi diminuisce il valore della forza sollecitante, e diminuisce del pari l'accelerazione del galleggiante; di modo che quando diverrà $p\cos.\varphi - am\gamma\frac{(c-u)^2}{2g} = 0$, allora sarà equabile il moto del galleggiante, e la sua velocità sarà data dall'equazione precedente. Avremo

dunque

$$c = u + \sqrt{\left(\frac{2gp\cos.\phi}{am\gamma}\right)},$$

o sia $c > u$; come si doveva dimostrare.

Se fosse $\phi = 90°$; vale a dire, se la superficie della corrente fosse orizzontale, allora sarebbe $\cos.\phi = 0$, e quindi $c = u$.

Si rileva inoltre da quest'equazione, che l'aumento della velocità del galleggiante è indipendente dalla velocità della corrente, e che perciò sarà tanto più sensibile quanto meno veloce è il fiume; e viceversa.

76. Passiamo ora ad esporre la teoria dell' asta ritrometrica di Bonati. Mostriamo cioè, come quest' illustre Idrometra abbia tentato di determinare, coll' asta del Cabeo, la scala delle velocità di un fiume in qualunque circostanza sia di piena, o di magra.

Ma poichè di questa stessa teoria si è occupato anche il sig. professore Venturoli, così noi riferiremo i calcoli più recenti di quest' esimio scrittore, senza però tralasciare di mostrare fin qui dove sia giunto il Bonati, e di quali ulteriori indagini siasi occupato il sig. Venturoli.

Abbandonata alla corrente HL (*tav. 12. fig. 2.*) l' asta cilindrica HS di tal peso specifico che sporga fuori dell' acqua per una piccolissima parte di sua lunghezza, si noti la velocità equabile che prende la medesima, e la sua costante declinazione dalla verticale. Con questi dati si può conoscere a un di presso l' andamento delle velocità nella perpendicolare HK, siccome vedremo tra poco.

Sia G il centro di gravità dell' asta, O il punto di mezzo della parte sommersa HS; e facciasi $HS = 2a$, $HG = b$, $HP = x$, ed $SHK = \phi$. Denominiamo c la velocità equabile dell' asta, u la velocità della corrente in un punto determinato P della perpendicolare HK, e P il peso dell' asta.

Tre sono le forze che agiscono sull' asta. 1.° Il suo peso, il quale agisce verticalmente all' ingiù sul punto G. E decomposto in due forze l' una normale e l' altra paralella all' asta, riesce la prima $GX = P\,sen.\,\phi$. 2.° La risultante di tutte le pressioni che il fluido esercita contro l' asta, la quale per le leggi dell' equilibrio de' fluidi coi corpi immersi è uguale e contraria al peso P; cotesta forza adunque sarà applicata nel punto O ed agirà verticalmente all' insù. La sua componente in direzione normale all' asta, sarà $OY = P\,sen.\,\phi$. 3.° L' urto della corrente contro l' asta, il quale essendo obbliquo è proporzionale alla superficie urtata, al quadrato della velocità, ed al quadrato del seno dell' angolo d' incidenza. A determinare questa forza osserviamo in primo luogo, che diminuendosi la velocità della

corrente dalla superficie discendendo verso il fondo, vi sarà tal punto R in cui la corrente è animata di una velocità eguale a quella dell' asta. Dicasi la profondità HR di quel punto sotto la superficie dell' acqua $= q$; è manifesto che in tutti i punti del tratto HR della perpendicolare HK, la corrente sarà più veloce dell' asta, e succederà il contrario per tutti i punti che trovansi nel tratto RK. Adunque se indichiamo con Q il punto dell' asta corrispondente al punto R della corrente, ciascun elemento Mm della porzione HQ sarà urtato dal fluido con una forza nel senso MZ, dovuta alla velocità rispettiva $u - c$, mentre ciascun elemento Nn della porzione QS sarà urtato in senso contrario da una forza NU dovuta alla velocità rispettiva $c - u$. Chiamato pertanto Q un coefficiente costante, sarà $MZ = Q \cdot Mm \cdot (u - c)^2 \cos.^2 \varphi$; $NU = Q \cdot Nn \cdot (c - u)^2 \cos.^2 \varphi$: ma poichè $HM = HN = \frac{x}{\cos. \varphi}$, così sarà $Mm = Nn \frac{dx}{\cos. \varphi}$; e però $MZ = Q dx (u - c)^2 \cos. \varphi$, $NU = Q dx (c - u)^2 \cos. \varphi$.

Determinate così le forze che sollecitano l' asta, veniamo ora a determinare le condizioni cui debbono soddisfare, acciocchè il moto dell' asta si mantenga equabile, e l' inclinazione costante.

In primo luogo è palese che la risultante di queste forze è $= GX + \int MZ - OY - \int NU$; ora perchè il moto dell' asta sia equabile, debb' essere zero la forza acceleratrice, la qual condizione è adempita col porre

$$GX + \int MZ = OY + \int NU.$$

Inoltre, dovendo contenersi costante la declinazione dell' asta al perpendicolo, è palese che non potrà essa aggirarsi nè attorno del suo centro di gravità, nè attorno qualsiasi altro punto della medesima. I signori Bonati e Venturoli, considerano la rotazione che può aver luogo attorno il punto H; ma io trovo più agevole il calcolo, considerando quella che può avvenire attorno il punto Q, il quale progredendo unito colla corrente, non soffre da questa sforzo alcuno. E lo stesso, se ben mi ricordo, sembrami facesse dalla Cattedra il sig. professore Venturoli, l' anno medesimo in cui pubblicò le sue ricerche sopra questo argomento, inserite negli Opuscoli Scientifici di Bologna. Cercando adunque qual condizione debbe adempiersi acciocchè l' asta non s' aggiri attorno il punto Q, osservo che la forza MZ agisce col momento MZ.MQ, e però il momento totale degli urti contro l' asta, corrispondenti al tratto della corrente compreso da $x = 0$, sino ad $x = q$, sarà $= \int MZ . MQ$; similmente il momento degli urti corrispondenti al tratto di corrente compreso tra $x = b$ fino ad $x = 2a \cos. \varphi$, è $= \int NU . NQ$; quello della forza OY è $= OY . OQ$; e quello finalmente della forza GX è $= GX . GQ$. Ciò posto ognun vede che, onde non abbia luogo la precitata rotazione

è necessario, che la somma de' momenti che tendono ad aggirare l'asta in un senso, sia eguale alla somma de' momenti che tendono ad aggirarla in senso contrario. Di qui l'equazione

$$GX . GQ + OY . OQ = \int MZ . MQ + \int NU . NQ.$$

È agevole il conoscere, che sarà $GQ = b - \frac{q}{\cos.\varphi}$, $OQ = \frac{q}{\cos.\varphi} - a$, $MQ = \frac{q - x}{\cos.\varphi}$, ed $NQ = \frac{x - q}{\cos.\varphi}$; dunque le condizioni del moto equabile dell' asta, comprese nelle due equazioni precedenti, diverranno in termini analitici

$$(E) \ldots \begin{cases} \int (u - c)^2 dx = \int (c - u)^2 dx \\ Pb\, sen.\varphi - Q\int (u - c)^2 (q - x) dx = Pa\, sen.\varphi + Q\int (c - u)^2 (x - q) dx \end{cases}$$

Conviene avere presente, che gl' integrali de' primi membri di queste due equazioni, vanno estesi da $x = 0$, sino ad $x = q$; quelli de' secondi da $x = q$ sino ad $x = 2a \cos.\varphi$.

77. Giunto a queste equazioni il sig. Bonati fa vedere, che se la scala delle velocità fosse una linea retta, la velocità dell' asta sarebbe la velocità media della corrente; qualunque d' altronde fosse l' angolo φ d' inclinazione dell' asta al perpendicolo. Risolve inoltre il problema, data la velocità e l' inclinazione dell' asta, ritrovare la scala delle velocità dell' acqua; il quale essendo di sua natura indeterminato, finge per risolverlo che la cercata scala delle velocità sia una curva del genere parabolico, e mercè delle equazioni (E), determina i parametri dell' equazione di questa curva. Ma il calcolo che per sì fatta determinazione si richiede, è così prolisso, che spaventa qualunque pazientissimo calcolatore.

78. Il sig. Venturoli invece suggerisce il metodo seguente. Si supponga da prima che la scala delle velocità sia una linea retta: determinata l' inclinazione che dovrebbe prender l' asta se reggesse l' ipotesi, si confronta il risultamento teorico coi dati dello sperimento. In caso di coincidenza si dirà che la cercata scala delle velocità è quella tal retta che risulta dal calcolo; e si ha il vantaggio, che la velocità dell' asta è anche la media della corrente. Che se l' inclinazione calcolata non coincidesse coll' osservata, si suppone allora, che la scala delle velocità sia rappresentata da una linea spezzata, composta cioè di due rette, l' una appartenente al tratto di corrente da $x = 0$ sino ad $x = q$, e l' altra da $x = q$ sino ad $x = 2a \cos.\varphi$; determinati poscia i coefficienti o parametri delle equazioni di queste rette, si ha tosto la scala delle velocità, e la portata dell' alveo. Ma per nostra mala avventura, nell' applicare questo metodo a qualche particolare sperimento, s' incontrano tali anomalie, per cui è

forza abbandonare l' impresa. E la ragione di quest' imperfezione del metodo di che si parla, noi la dicemmo anticipatamente (45); ed ora la vedremo confermata dal suo inventore.

Prima di tutto, prepariamo i valori di alcuni elementi del calcolo, onde passare ad esporre la teoria precedente.

Sia r il raggio della sezione trasversale dell' asta; e chiamata al solito γ la gravità specifica dell' acqua, sarà $P = 2\pi a r^2 \gamma$, giacchè il peso di un galleggiante debb' essere eguale al peso della massa fluida spostata.

Per determinare il coefficiente Q osservo, che essendo l' asta cilindrica, abbiamo dalle sperienze del sig. Borda, che la resistenza dell' elemento Mm è $\frac{11}{20}$ del peso di una colonna acquea, la quale avendo per base la sezione longitudinale dello stesso elemento, vale a dire $Mm \cdot 2r$, o sia $\frac{2 r dx}{cos. \varphi}$, abbia per altezza $\frac{(u-c)^2 cos.^2 \varphi}{2g}$. Quindi sarà la resistenza $\frac{11}{20} \cdot \frac{2 r dx}{cos. \varphi} \cdot \gamma \cdot \frac{(u-c)^2 cos.^2 \varphi}{2g} = \frac{11}{20} \cdot \frac{r dx}{g} \gamma (u-c)^2 cos. \varphi$; ma noi esprimemmo cotesta resistenza (76) con $Q dx cos. \varphi (u-c)^2$, si avrà dunque l' equazione

$$Q dx cos. \varphi (u-c)^2 = \frac{11}{20} \cdot \frac{r dx}{g} \gamma cos. \varphi (u-c)^2,$$

che ne dà $Q = \frac{11 \cdot r \gamma}{20 \cdot g}$. Sarà dunque $\frac{Q}{P} = \frac{11}{40 \cdot a g \pi r}$.

79. Sia ora la scala delle velocità rappresentata dalla retta di equazione $u = V - fx$, in cui V è la velocità dell' acqua in superficie. Quest' equazione debb' esser tale che fatto $x = q$ risulti $u = c$, e però si avrà $c = V - fq$. Di qui $u - c = f(q - x)$, e $c - u = f(x - q)$. Sostituiti questi valori nella prima delle equazioni (E) risulterà $\int (q - x)^2 dx = \int (x - q)^2 dx$, la quale integrata come fu detto al n.° 76, ci darà $q^3 = (2 a cos. \varphi - q)^3$, e quindi $q = a cos. \varphi$. Dunque la velocità equabile dell' asta sarà espressa dall' equazione

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad c = V - af cos. \varphi$$

dalla quale appunto impariamo, che se le velocità di una corrente terminano in linea retta, la velocità equabile dell' asta è la media della corrente, la quale corrisponde alla metà della perpendicolare di quella sezione in cui si sperimenta, o sia all' ascissa $x = a cos. \varphi$.

La seconda delle equazioni (E), dopo la sostituzione de' valori precedenti, diviene

$$P b sen. \varphi - Q f^2 \int (q - x)^3 dx = P a sen. \varphi + Q f^2 \int (x - q)^3 dx,$$

la quale integrata opportunamente ci dà

$$P b\, sen.\,\varphi - \tfrac{1}{4} Q f^2 q^4 = P a\, sen.\,\varphi + \tfrac{1}{4} Q f^2 (2a \cos.\,\varphi - q)^4 :$$

ma $q = a \cos.\,\varphi$; dunque sarà

$$P b\, sen.\,\varphi - \tfrac{1}{4} Q f^2 q^4 = P a\, sen.\,\varphi + \tfrac{1}{4} Q f^2 q^4 ,$$

e sia $P(b-a)\, sen.\,\varphi = \tfrac{1}{2} Q f^2 q^4$, che ne dà

$$sen.\,\varphi = \frac{Q f^2 q^4}{2P(b-a)} .$$

Dall' equazione $c = V - fq$ abbiamo $fq = V - c$, e però $f^2 q^2 = (V-c)^2$; essendo poi $q^2 = a^2 \cos.^2 \varphi$, si avrà $f^2 q^4 = a^2 (V-c)^2 \cos.^2 \varphi$. Ma poichè fu trovato $\frac{Q}{P} = \frac{11}{40 . a\pi r g}$, così è chiaro che sarà $sen.\,\varphi = \frac{11 a (V-c)^2}{40 . 2\pi r g (b-a)} . \cos.^2 \varphi$. Dunque, se porremo per brevità $k = \frac{11 a (V-c)^2}{40 . 2\pi r g (b-a)}$, risulterà $sen.\,\varphi = k \cos.^2 \varphi$, e però

$$(2) \; \ldots\ldots\ldots \; sen.^2 \varphi + \frac{1}{k}\, sen.\,\varphi = 1 .$$

È questa l' equazione, onde si determina l' inclinazione dell' asta al perpendicolo, allora quando la scala delle velocità sarà una linea retta.

Se l' inclinazione osservata dell' asta non coincide con quella che risulta dall' equazione precedente, almeno quanto basta per una sufficiente approssimazione, si passa a supporre che la scala delle velocità sia rappresentata dalla linea spezzata HLN (*tav.* 12. *fig.* 3.), della quale la retta IL abbia per equazione $u = V - fx$, l' altra LN abbia $u = m - hx$. E siccome ambedue queste equazioni debbono dare $u = c$, quando $x = q$, così si avrà dalla prima $c = V - fq$, dalla seconda $c = m - hq$. Combinando assieme queste quattro equazioni, risulterà

$$u - c = f(q - x), \quad c - u = h(x - q);$$

e però le equazioni (E) diverranno

$$f^2 \int (q-x)^2 dx = h^2 \int (x-q)^2 dx$$

$$P b\, sen.\,\varphi - Q f^2 \int (q-x)^3 dx = P a\, sen.\,\varphi + Q h^2 \int (x-q)^3 dx ,$$

che debbono al solito integrarsi coll' estendere i primi membri da $x = 0$ sino ad $x = q$, ed i secondi da $x = q$ sino ad $x = 2a \cos.\,\varphi$. Eseguendo queste integrazioni la prima delle equazioni precedenti ci darà $f^2 q^3 = h^2 (2a \cos.\,\varphi - q)^3$, da cui estraendo la radice cubica, risulta $q \sqrt[3]{f^2} = (2a \cos.\,\varphi - q) \sqrt[3]{h^2}$. Separando q, avremo

$q = \frac{2\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{h^2}} \cdot a\,cos.\,\varphi$, o sia $q = a\mathrm{H}\,cos.\,\varphi$, posto per compendio $\mathrm{H} = \frac{2\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{h^2}}$. Sostituito questo valore di q nell' equazione $c = \mathrm{V} - fq$, risulterà

$$(a) \ldots\ldots\ldots c = \mathrm{V} - af\mathrm{H}\,cos.\,\varphi.$$

La seconda delle anzidette equazioni, integrata al modo che abbiamo suggerito, ci dà $\mathrm{P}b\,sen.\,\varphi - \frac{1}{4}\mathrm{Q}f^2q^4 = \mathrm{P}a\,sen.\,\varphi + \frac{1}{4}\mathrm{Q}h^2(2a\,cos.\,\varphi - q)^4$; ma $2a\,cos.\,\varphi - q = q\frac{\sqrt[3]{f^2}}{\sqrt[3]{h^2}}$; sarà dunque $(2a\,cos.\,\varphi - q)^4 = q^4 \cdot \frac{f^2\sqrt[3]{f^2}}{h^2\sqrt[3]{h^2}}$, e però $\mathrm{P}b\,sen.\,\varphi - \frac{1}{4}\mathrm{Q}f^2q^4 = \mathrm{P}a\,sen.\,\varphi + \frac{1}{4}\mathrm{Q}f^2q^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{f^2}}{\sqrt[3]{h^2}}$. Riducendo risulterà $\mathrm{P}(b-a)\,sen.\,\varphi = \frac{1}{4}\mathrm{Q}f^2q^4\left[\frac{\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2}}\right]$; ma $\frac{\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{2}{\mathrm{H}}$; sarà dunque $\mathrm{P}(b-a)\,sen.\,\varphi = \frac{\mathrm{Q}f^2q^4}{2\mathrm{H}}$. D' altronde abbiamo $fq = \mathrm{V} - c$, e $q = a\mathrm{H}\,cos.\,\varphi$; sarà dunque $f^2q^2 = (\mathrm{V}-c)^2$, e $q^2 = a^2\mathrm{H}^2\,cos.^2\,\varphi$. Di qui l' equazione $f^2q^4 = a^2\mathrm{H}^2(\mathrm{V}-c)^2\,cos.^2\varphi$, che ci dà $\mathrm{P}(b-a)\,sen.\,\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\,a^2\mathrm{H}(\mathrm{V}-c)^2\,cos.^2\,\varphi$, e quindi $sen.\,\varphi = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} \cdot \frac{a^2\mathrm{H}(\mathrm{V}-c)^2}{2(b-a)}\,cos.^2\,\varphi$. Sostituito per $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ il valore trovato, risulterà $sen.\,\varphi = k\mathrm{H}\,cos.^2\,\varphi$, che ne dà

$$(b) \ldots\ldots\ldots \mathrm{H} = \frac{sen.\,\varphi}{k\,cos.^2\varphi}.$$

Per determinare finalmente la posizione delle rette IL, LN conviene conoscere i valori numerici de' coefficienti f, h, i quali si determinano mercè le equazioni (a), (b). In fatti colla seconda di queste equazioni si determina la quantità H, e mercè della prima si ha

$$(\alpha) \ldots\ldots\ldots f = \frac{\mathrm{V} - c}{a\mathrm{H}\,cos.\,\varphi}:$$

ma $\mathrm{H} = \frac{2\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{h^2}}$, sarà dunque $\mathrm{H}f^{\frac{2}{3}} = (2-\mathrm{H})h^{\frac{2}{3}}$, e però

$$(\delta) \ldots\ldots\ldots h = f\left(\frac{H}{2-H}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Conosciuti per tal modo i valori de' coefficienti f, h, la scala delle velocità sarà rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$u = V - fx, \quad u = c - h(x-q),$$

delle quali la prima mostra il processo delle velocità nella porzione di perpendicolare che si estende da $x = q$; e la seconda ne porge quello della rimanente porzione di perpendicolare, o sia da $x = q$, sino ad $x = 2a\cos.\phi$.

Rammentiamoci quivi, che il valore dell'ascissa q, è in questo caso determinato dall' equazione

$$(\varepsilon) \ldots\ldots\ldots q = aH\cos.\phi.$$

Non altro ora ci rimane che passare alle applicazioni pratiche.

A tale oggetto prenderemo qualcuna delle sperienze instituite nel Po l'anno 1820, dai Professori ed Alunni della scuola Idraulica di Ferrara (*); e particolarmente le due registrate alla pag. 14 del citato opuscolo, e contrassegnate coi numeri 6, 7. Nella prima si dice, che un galleggiante semplice percorse una linea della lunghezza di circa metri 104 in 81''; e nella seconda si riferisce che un' asta ritrometrica percorse una linea di circa metri 102 in 89'', con una costante inclinazione di 15.° Dalla pagina 12, in cui si citano le dimensioni di quest' asta, si ha che la sua lunghezza era m.^{i} 4,875, e pescava nell'acqua per un tratto di m.^{i} 4,695, onde sporgeva fuori dell' acqua per m.^{i} 0,18. La distanza del centro di gravità dell' asta dal pelo della corrente era di m.^{i} 2,719, ed il diametro della sezione trasversale m.^{i} 0,034. Da questi dati abbiamo le seguenti denominazioni $2a = 4{,}695$; $b = 2{,}719$; $2r = 0{,}034$; $V = \frac{104}{81} = 1{,}284$; $c = \frac{102}{89} = 1{,}146$; ci rimane a vedere se l'equazione (2) dà $\phi = 15.°$ siccome fu osservato. A tale scopo convien calcolare il valore di $\frac{1}{k} = \frac{40 \cdot 2r\pi g(b-a)}{112(V-c)^2}$. Facendo uso de' logaritmi, il calcolo è come segue

(*) *Ricerche Geometriche* ec. Roma 1820.

Cotesta scuola è in oggi soppressa: ma continua con molta lode, e con sommo vantaggio degli Ingegneri, quella di Roma; la quale forma il principale ornamento del Consiglio degl' Ispettori d'acque e strade, che ivi risiede.

log. 40	$= 1{,}6020600$
log. π	$= 0{,}4971499$
(*) log. $2g$	$= 1{,}2924882$
log. r	$= 8{,}2304489$
log. $(b-a)$	$= 9{,}5699688$
	$1{,}1921058$

log. $11a$	$= 1{,}4119899$
2 log. $(V-c)$	$= 8{,}2797582$
	$9{,}6917481$
compl. arit.	$0{,}3082519$
log. prec.	$1{,}1921058$
log. $\frac{1}{k}$	$= 1{,}5003577$

cercando nelle tavole il numero a cui compete questo logaritmo si troverà $\frac{1}{k} = 31{,}648$. Dunque l'equazione (2) diverrà $sen.^2 \varphi + 31{,}648\ sen. \varphi = 1$, che ne dà

$$sen.\ \Phi = -15{,}824 + \sqrt{[1 + (15{,}824)^2]}\ ;$$

fatto il calcolo risulta $sen.\ \Phi = 0{,}0315660$, a cui corrisponde $\Phi = 1^\circ : 48' : 32''$ circa; valore assai lontano dal precedente $\Phi = 15^\circ$. È dunque dimostrato con questo calcolo, che la scala delle velocità, nella perpendicolare corrispondente all'esperimento, non può essere rappresentata da una linea retta. Suppongasi adunque rappresentata da una linea spezzata; e cerchiamo le equazioni delle rette che la rappresentano.

Essendo $\varphi = 15^\circ$, risulterà log. $sen.\ \varphi = 9{,}4129962$; 2 log. $cos.\ \varphi = 9{,}9699876$. Dal calcolo precedente abbiamo log. $k = 8{,}4996423$; sarà dunque log. $k\ cos.^2 \varphi = 8{,}4696299$, e però compl. log. $k\ cos.^2 \varphi = 1{,}5303701$: ma l'equazione ($b$) ci dà

$$\text{log. } H = \text{log. } sen.\ \varphi + \text{compl. log. } k\ cos.^2 \varphi\ ;$$

avremo dunque log. $H = 0{,}9433633$, e però $H = 8{,}7774$.

L'equazione (α) dalla quale si ottiene il coefficiente f, somministra log. $f =$ log. $(V-c)$ + compl. log. $aH\ cos.\ \Phi$: ma log. $(V-c) = 9{,}1398791$, log. $a = 0{,}3706056$, log. $cos.\ \varphi = 9{,}9849438$; dunque compl. log. $aH\ cos.\ \Phi = 8{,}7010843$, e però log. $f = 7{,}8409634$, onde $f = 0{,}0069337$ assai prossimamente.

È inutile cercare il valore del coefficiente h. Ognun vede che essendo $H > a$, la formola (β) diviene immaginaria.

Se ci facciamo a determinare quel punto R della perpendicolare HK, in cui la corrente cammina del pari coll'asta, abbiamo dall'equazione (ε), log. $q =$ log. $aH\ cos.\ \Phi = 1{,}2989157$; e però

(*) Pel valore di g si è calcolato quello che ha luogo alla latitudine di Ferrara, e che trovasi registrato nella tavola dell'art. 4. dell'altra mia Memoria, inserita in questo stesso volume.

q = m.^{3} 19,948 risultamento erroneo, il quale insieme col precedente ne mostra che la scala delle velocità nella perpendicolare corrispondente al cammino dell' asta, non può essere rappresentata neppure dalla linea spezzata ILN.

Che dovremo dunque concludere da sì fatti risultamenti? Dovremo forse dubitare dell' esattezza di quelle sperienze? nò certamente, giacchè quegli esimj Professori che le istituirono, procedettero con tutta la possibile precisione. Dovremo ritenere siccome mal fondata la teoria? non già, imperocchè è facile il convincersi del contrario. In fatti potrebbe esser dubbia cotesta teoria, in quanto che è stato determinato l' urto dalla corrente contro l' asta mercè il principio di Newton, che negli urti obbliqui la resistenza è proporzionale al quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, il quale sappiamo essere dalla sperienza in molti incontri smentito. Ma la sperienza medesima ci dimostra che cotesto principio di Newton si verifica per tutte le incidenze maggiori di 60.°; dunque se l' acqua incontrerà l' asta sotto un angolo maggiore di questo, sarà dileguato ogni dubbio. Ora, poichè l' asta è inclinata alla verticale con un angolo di 15.°, è chiaro che l'angolo d' incidenza sarà di 75.°, e perciò la teoria non è in verun modo mal fondata.

Queste cose stava io meco medesimo considerando, allorchè mi determinai di scrivere al sig. Venturoli, onde sentire come ei la pensasse; ed ecco che con sua lettera delli 30. Giugno 1821, esternò il suo parere ne' termini e modi seguenti.

„ Sappiate che feci anch' io sulla sperienza di Ferrara de' riscontri „ analoghi a quelli esposti nella vostra lettera del 23. Marzo, e mi „ tornaron malissimo; quindi lasciai l' affare per disperato, e così vi „ consiglio di fare. Già il più che si potesse raccogliere dagli assurdi che s' incontrano, sarebbe che in quelle perpendicolari la scala „ delle velocità non potesse in nessun modo rappresentarsi per due „ linee rette. Ma io tengo che vi siano altre difficoltà ben molte. „ Primieramente quegli angoli sono osservati molto all' ingrosso, e „ forse non è possibile averli con abbastanza di precisione. Di poi è „ difficilissimo che l' inclinazione dell' asta si mantenga veramente costante. Abbiamo fatta una sperienza sul Tevere dove può „ farsi con più comodo ed accuratezza che sul Pò. Voi la vedrete, „ se a Dio piace che stampiamo anche in quest' anno il nostro Saggio. Quivi le aste camminarono o verticali o un po' inclinate in „ avanti, ma talvolta ci è avvenuto che questa inclinazione si vada „ o accrescendo o sminuendo alcun poco nel percorrere l' asta uno „ spazio non maggiore di 60 metri „.

„ In pratica il partito che si può trarre dalle aste ritrometriche si „ riduce a prendere la velocità dell' asta per la velocità media della

„ perpendicolare sulla quale cammina. Questo risultato non è giu-
„ sto quando l' asta sia notabilmente inclinata, ma anche in tal caso
„ può considerarsi come un' approssimazione sufficiente alla pratica.
„ I tentativi di Bonati e i miei per ricavare dall' inclinazione dell' a-
„ sta la scala delle velocità, sono speculazioni belle e buone in teo-
„ rica; ma temo che in pratica non possa aversene gran costrutto „.

Ognuno ben vede, da quanto qui dice il sig. Venturoli, che non è senza fondamento il mio dubbio, che le aste nel loro cammino possano cangiare inclinazione (45); e che quando possa ottenersi che sì fatta inclinazione sia piccola, la loro velocità è prossimamente la media della perpendicolare che percorrono. È questo il miglior modo di adoperare cotesto tachimetro.

77. Più semplice d' assai è la teoria dell' ultimo galleggiante, il *galleggiante composto*.

Supponiamo, per maggiore generalità, che le due palle siano diseguali.

Dicasi r il raggio della palla più leggera;
r' quello della più pesante. Sia
G il peso specifico della prima palla,
G' quello della seconda, e
γ quello dell' acqua. Dicasi
V la velocità della corrente in superficie;
c la velocità equabile dello strumento; ed
u la velocità della corrente nello strato in cui è immersa la palla inferiore.

La forza che accelera la palla superiore essendo proporzionale ad $r^2(V-c)^2$ può farsi $= mr^2(V-c)^2$; e similmente la forza che ritarda la palla inferiore essendo proporzionale ad $r'^2(c-u)^2$ può farsi $= mr'^2(c-u)^2$. Ciò posto, la risultante

$$m[r^2(V-c)^2 - r'^2(c-u)^2]$$

di queste due forze debb' esser nulla, essendo equabile il moto del galleggiante; avremo dunque l' equazione

$$1.^a \dots\dots\dots r(V-c) = r'(c-u).$$

Perchè poi la palla più leggera stia quasi tutta sommersa nella corrente, si richiede che il peso specifico del galleggiante sia a un dipresso eguale a quello del fluido. Sappiamo che il peso specifico di un corpo si misura col rapporto fra il peso assoluto ed il volume: il peso assoluto del galleggiante è $= \frac{4}{3}\pi(Gr^3 + G'r'^3)$; il suo volume è $= \frac{4}{3}\pi(r^3 + r'^3)$; sarà dunque $\frac{Gr^3 + G'r'^3}{r^3 + r'^3} = \gamma$, e però

$$2.^a \dots\dots\dots (G-\gamma)r^3 = (\gamma - G')r'^3.$$

La prima di queste due equazioni ci dà la velocità della corrente nel luogo della palla inferiore, la seconda ci determina il peso specifico di una delle due palle, dato essendo quello dell'altra.

78. La forma più semplice dello strumento è quella in cui le due palle sono di egual raggio; ed allora l'equazione 1.ª diverrà $V - c = c - u$, che ne dà

$$u = 2c - V.$$

Questa formola dimostra la regola, cui esponemmo al n.° 44.

L'altra equazione 2.ª ci dà, in questa stessa ipotesi, $G - \gamma = \gamma - G'$, e perciò $\gamma = \frac{G + G'}{2}$. Dunque il peso specifico dell'acqua debb'essere medio proporzionale aritmetico fra i pesi specifici de' due globi.

Diversi altri calcoli instituisce il sig. Brunacci nella sua Memoria citata; ma questi io li credo superflui, giacchè per gli usi a cui può servire lo strumento, bastano i precedenti.

Cotesta invenzione del sig. Brunacci, si trova delineata nella fig. 1. della tav. 12.

CAP. II.

Teorie de' tachimetri idraulici fissi.

79. Quando si potesse considerare siccome rettilineo il filo del pendolo idrometrico semplice anche sott'acqua, la sua vera teoria sarebbe come segue.

Dicasi P il peso assoluto della palla; r il raggio della medesima; α la declinazione del filo dal perpendicolo; ed y l'altezza dovuta alla velocità della corrente. La palla in G (*tav. 7. fig. 6.*) è sollecitata dalle forze GH, GK, la prima delle quali è il suo peso P' nell'acqua, e l'altra è l'urto della corrente. Starà $P' : GK :: 1 : tang.\ \alpha$, e però $GK = P'\ tang.\ \alpha$. D'altronde abbiamo $P' = P - \frac{4}{3}\pi r^3 \gamma$, $GK = \frac{1}{2}\pi r^2 y \gamma$, sarà dunque

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3P - 4\pi r^3 \gamma}{\pi r^2 \gamma}\ tang.\ \alpha.$$

A questo stesso risultamento sono giunto nella mia nota al Cap. V. parte prima e seconda dell'Opera di Zendrini, colla quale viene formato l'ottavo tomo della Raccolta d'autori Italiani che trattano del Moto dell'acqua stampato l'anno scorso. Ma ora per confrontare cotesta teoria con quella che ci dà il Ximenes nella sua dissertazione più volte citata pag. 25; chiameremo Γ la gravità specifica della palla, ed avremo $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \Gamma$. Con ciò la formola precedente

diviene alquanto più semplice, e ci dà

$$y = \frac{8}{3} r \cdot \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma} \, tang. \, \alpha.$$

Accomodata la formola di Ximenes alle nostre denominazioni ella diviene

$$y = \frac{4}{3} r \cdot \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma} \, tang. \, \alpha$$

la quale conduce ad un risultamento metà di quello della precedente. La ragione di questa discrepanza si è che il Ximenes ha commesso lo stesso errore di Zendrini da me avvertito in quella mia nota; e ciò per avere appoggiata la sua teoria ad un lemma in cui pretende di dimostrare che l'urto di una corrente contro di un globo è uguale a quello che soffrirebbe un suo circolo massimo, mentre non è che la metà. Era già di ciò persuaso anche il Manfredi, siccome abbiamo potuto osservare al num. 48; ma ora poi tutti gli scrittori moderni ne convengono, e sembra cosa da non revocarsi più in dubbio (57).

80. Abbiamo detto al num. 54. che il sig. Bonati scoprì una fallacia nell'invenzione del p. Ferrari, dove questi suppose che il cilindro BC (*tav.* 12. *fig.* 4.) debba prendere quella stessa inclinazione BAD che ha il filo fuori dell'acqua; mentre in realtà l'inclinazione del cilindro sarà sempre diversa da quella del filo.

Si può dimostrare cotesta verità col seguente raziocinio, il quale in sostanza coincide con ciò che ne disse il Bonati con un discorso alquanto più lungo (*). Essendo lo strumento del p. Ferrari un cilindro omogeneo BC, può intendersi concentrata la sua massa ed il suo peso, nel punto di mezzo O. Ciò posto, immerso il cilindro in una corrente, tre casi si possono avverare: 1.° che l'acqua scorra colla stessa velocità da D fino in S; 2.° che coteste velocità vadano crescendo; 3.° che vadano diminuendo. Nel primo caso avverrà ciò che preveda il p. Ferrari, ma negli altri due succede tutto il contrario. Infatti se la corrente cammina colla stessa velocità in tutti i punti della verticale DS, la metà OB dello strumento verrà urtata con tanta forza con quanta viene urtata l'altra metà OC; e siccome queste forze sono equidistanti dal punto O, così si equilibreranno attorno di questo punto, ed il cilindro non patirà alcun movimento di rotazione e si manterrà nella direzione ABC. Ma se le velocità della corrente crescono dal punto D fino al punto V; sarà urtata con maggior forza la metà OC del cilindro che non l'altra OB, e perciò non

(*) *Memorie della Società Italiana*, Tom. 8. part. 2.ª

vi sarà equilibrio, e succedrà una rotazione attorno il punto O, che porterà il cilindro nella situazione Bc col suo asse. Il contrario avviene se la velocità della corrente vada diminuendo; giacchè allora la maggior forza contro il cilindro sarà nella metà OB, e questo a' inclinerà portandosi col proprio asse nella situazione Bc'. Ora, poichè nelle correnti mai non avviene che le velocità si mantengano le medesime in tutto il tratto DS; così è palese che la teoria del padre Ferrari è poggiata su vacillante fondamento, e perciò non può reggersi.

81. Ma se queste due teorie sono basate sopra principj erronei, non è così di questa terza, la quale siccome vedremo, ci dimostra il vero modo di far uso del pendolo di Guglielmini.

Abbiamo già detto che il sig. professore Venturoli calcola la velocità delle correnti, mercè di un peso che tiene la palla immersa nell'acqua (55). Ora ecco dietro quali principj, e con qual calcolo. La tensione del filo sott'acqua è costante in tutti i suoi punti. Nel punto A (*tav.* 7. *fig.* 6.) cotesta tensione è misurata dal peso T; nel punto G dalla forza GF. Sarà dunque GF $=$ T: ma GF $= \sqrt{[(GK)^2 + (GH)^2]}$; dunque $T = \sqrt{[(GK)^2 + (GH)^2]}$. La GH rappresenta il peso P' della palla nell'acqua, e la GK l'urto della corrente contro di essa palla; sarà dunque $GH = P'$, $GK = \frac{1}{2}\pi r^2 y\gamma$ (79). Ma l'equazione precedente ci dà $GK = \sqrt{[T^2 - (GH)^2]}$; sarà dunque $\frac{1}{2}\pi r^2 y\gamma = \sqrt{(T^2 - P'^2)}$, e però

$$y = \frac{2\sqrt{(T^2 - P'^2)}}{\pi r^2 \gamma}.$$

Ad ogni immersione della palla si determina il peso T che la sostiene; dunque colla formola precedente conosceremo l'altezza dovuta alla velocità per qualsivoglia punto della corrente sotto la superficie.

Nè vi rimane che a far vedere la proprietà della tensione del filo, la quale si è asserito, essere dovunque la medesima. Infatti chiamato l'arco $AM = s$, sarà $MN = ds$. Condotte pei punti M, N le verticali MO, No, dicasi l'angolo $OMN = \phi$; è chiaro che sarà $oNn = \phi + d\phi$. Sia finalmente la velocità che percuote l'elemento MN dovuta all'altezza z. Rappresentando colla normale NR l'urto della corrente contro il latercolo MN sarà questo proporzionale a $z ds \cos.^2 \phi$, onde potrà rappresentarsi con $mz ds \cos.^2 \phi$, essendo m un coefficiente costante qualunque.

Dicasi T la tensione del filo nel punto M, sarà $T + dT$ la tensione nel punto N; la prima di queste tensioni si esercita nel senso MP prolungamento del latercolo MN, e la seconda nel senso NQ prolungamento del latercolo seguente Nn.

Fingiamo ora che il filo in M sia reciso, e che all'arco AM venga

sostituita una forza $=$T che tenga in equilibrio lo strumento. È chiaro che nessun cangiamento avverrà per questa modificazione, ed il latercolo Nn sarà tuttavia tratto secondo NQ con una forza $= T + dT$. Questa forza $T + dT$ è la risultante delle due T, $mzds\, cos.^2 \varphi$; delle quali prima si esercita nel senso NP, la seconda nel senso NR: ma risolvendo la forza $T + dT$ in due una secondo NP, l'altra secondo NR abbiamo le due forze $(T + dT)\, cos.$ PNQ $(T + dT)\, sen.$ PNQ; avremo dunque le due equazioni.

$$(T + dT)\, cos.\, PNQ = T, \; (T + dT)\, sen.\, PNQ = mzds\, cos.^2 \varphi$$

dove più non rimane che a determinare il valore analitico del seno e coseno dell'angolo PNQ.

È facile conoscere che l'angolo $PNQ = PNo' - QNo' = OMN - oNn = \varphi - (\varphi + d\varphi) = - d\varphi$; sarà quindi $sen.\, PNQ = sen. - d\varphi = - sen.\, d\varphi = - d\varphi$; $cos.\, PNQ = cos. - d\varphi = cos.\, d\varphi = 1$. Sostituiti questi valori, le due equazioni precedenti diverranno

$$T + dT = T$$

$$- d\varphi (T + dT) = mzds\, cos.^2 \varphi.$$

La prima ci dà $dT = 0$, e quindi $T = cost.$, per cui viene assicurato il principio sul quale è fondato l'uso dello strumento. La seconda poi, la quale ridotta diviene $- T d\varphi = mzds\, cos.^2 \varphi$, ci darebbe l'equazione della curvatura del filo sott'acqua. Non ci fermeremo a determinare sì fatta equazione, giacchè ad ogni modo ella rimane inutile. Per noi ci basta d'aver dimostrato che la tensione del filo sott'acqua, è la medesima in tutti suoi punti.

Chi fosse vago di una dimostrazione anche più generale della precedente, può averla nel seguente modo.

Suppongasi che il filo sott'acqua sia tormentato in ciascun suo punto da due forze X, Y la prima diretta secondo le ascisse x, l'altra secondo le ordinate y; saranno Xds, Yds le forze che sollecitano ciascun latercolo MN della nostra curva, e però le forze che investono l'arco AM nel senso delle coordinate x, y saranno $\int Xds$, $\int Yds$. Decomposta la tensione T, risultante di tutte le forze precedenti, in due, l'una diretta nel senso delle x, l'altra nel senso delle y, si avranno le due forze $\frac{Tdx}{ds}$, $\frac{Tdy}{ds}$, le quali però agiscono nel senso delle coordinate negative. Avremo dunque le due equazioni.

$$(I) \ldots\ldots - \frac{Tdx}{ds} = \int Xds, \quad - \frac{Tdy}{ds} = \int Yds$$

dalle quali ricaveremo il valore di T nel modo seguente. Si differenzino queste due equazioni ritenendo ds costante, e si avrà

$-(dT\,dx+T\,ddx)=X\,ds^2$, $-(dT\,dy+T\,ddy)=Y\,ds^2$: moltiplicando la prima per dx, e la seconda per dy, e sommando i prodotti si troverà

$$-dT(dx^2+dy^2)-T(dx\,ddx+dy\,ddy)=ds^2(X\,dx+Y\,dy).$$

Si osservi ora che $ds^2=dx^2+dy^2$, e che $ds\,dds=dx\,ddx+dy\,ddy$, si avrà così

$$-dT\,ds^2-T\,ds\,dds=ds^2(X\,dx+Y\,dy).$$

ma ds è costante; dunque $dds=0$, e però $-dT\,ds^2=ds^2(X\,dx+Y\,dy)$, o sia $-dT=X\,dx+Y\,dy$. Integrando si avrà

$$\text{(II)} \ldots\ldots \quad T=cost.-\int(X\,dx+Y\,dy).$$

Tutto questo pel caso generale ed astratto, che il filo sia in ogni suo punto sollecitato dalle forze X, Y. Nel caso concreto di che si tratta, il filo è spinto dalla corrente nel senso della normale a ciascun suo punto, con una forza che chiameremo N. Decomposta questa forza, diretta come dissi secondo NR, in altre due dirette secondo le coordinate x, y è facile rilevare che la prima sarà $=-\frac{N\,dy}{ds}$, la seconda $=\frac{N\,dx}{ds}$. Ecco dunque che il nostro filo è effettivamente sollecitato in ciascun suo punto dalle forze $X=-\frac{N\,dy}{ds}$, $Y=\frac{N\,dx}{ds}$. Sostituiti questi valori nell'equazione (II) si troverà $T=$ *cost.*, lo che è ciò che si doveva dimostrare. Una qualunque delle due equazioni (I) ci darebbe quella della curva del filo sott'acqua, e ci condurrebbe al risultamento precedente $-T\,d\varphi=m\,z\,ds\,cos.^2\varphi$: ma su ciò non occorre fermarci.

82. Passeremo piuttosto ad esporre la teoria della valvola di Ximenes (33), per misurare la velocità di una corrente alla superficie. Avendo sott'occhio la fig. 2. della tav. 6, chiameremo S la superficie OG urtata dalla corrente, α l'angolo d'inclinazione SKE misurato sul quadrante; e chiameremo P il peso di essa valvola immersa nell'acqua. L'urto obliquo della corrente contro la valvola si misura dal peso di un prisma d'acqua che avendo per base la superficie S abbia y per altezza, moltiplicato questo peso per $cos.^2\alpha$. Sarà dunque l'espressione di quest'urto $=Sy\gamma\,cos.^2\alpha$. Cotesta forza, cui debbe intendersi applicata nel centro di resistenza della lastra OG, allontana la valvola dal perpendicolo, facendola girare attorno l'asse OK; se dunque chiameremo b la distanza di questo centro dall'asse OK, il momento della forza precedente sarà $=Syb\gamma\,cos.^2\alpha$. D'altra parte il peso P della valvola, inteso concentrato nel centro di gravità, che è pur quello di grandezza, tira al

basso la lastra OG con forza $= P\, sen.\, \alpha$, e col momento $Pa\, sen.\, \alpha$, se chiamiamo $2a$ l' altezza OH della valvola. Dovrà pertanto questo momento eguagliare il precedente, a volere che la valvola si mantenga equilibrata nella situazione OG; avremo dunque l' equazione

$$Pa\, sen. = Sby\gamma\, cos.^2\, \alpha,$$

che ci dà

$$y = \frac{Pa\, tang.\, \alpha}{Sb\gamma\, cos.\, \alpha}.$$

Facciamo di questa formola una qualche applicazione. Assegna Ximenes alla sua valvola una superficie quadrata di mezzo braccio fiorentino (m.[i] q.[i] 0,16994); ed un peso di libbre 10 (chil. 3,3926). Secondo la sua prima applicazione l' angolo α è di 15°. Si avrà perciò $S = 0,16994$; $P = 3,3926$; e $\gamma = 1000$. Sappiamo per le belle sperienze del sig. Avvanzini, che nell' urto obliquo di una corrente contro una lastra rettangolare, il centro di resistenza cade di sopra del centro di grandezza, e la distanza fra questi due centri è tanto più grande quanto più acuto è l' angolo d' incidenza (*). Nel caso nostro però l' angolo d' incidenza non è molto acuto, e perciò il centro di resistenza si scosterà pochissimo da quello di grandezza. Poniamo adunque $a = b$, e sarà $y = \frac{P\, tang.\, \alpha}{S\gamma\, cos.\, \alpha}$, onde

$$\log. y = \log. P\, tang.\, \alpha + compl.\, \log. S\gamma\, cos.\, \alpha.$$

Il calcolo numerico si eseguirà come qui vedesi

log. S = 9,2302956	log. P = 0,5305327
log. cos. α = 9,9849438	log. tang. α = 9,4280525
log. γ = 3,0000000	log. P tang. α = 9,9585852
log. Sγ cos. α = 2,2152394	comp. log. Sγ cos. α = 7,7847606
compl. arit. = 7,7847606	log. y = 7,7433458

Cercando nelle tavole si troverà $y =$ m[i] 0,005538 prossimamente.

Se vuolsi conoscere la velocità corrispondente u, si farà $u = \sqrt{(2gy)}$, con che si avrà $\log. u = \frac{1}{2} \log. 2g + \frac{1}{2} \log. y = 9,517957$, e quindi $u =$ m[i] 0,3296 circa.

83. Non molto diversa è la teoria della ventola di Ximenes, altro degli strumenti di questo eccellente scrittore (64). Osservando la fig. 1. della tav. II., si conosce che la superficie battuta dalla corrente, è il rettangolo BAED. Dicasi adunque S cotesta superficie: si

(*) *Nuove ricerche sulla resistenza de' fluidi*. Istituto Nazionale Italiano. Tom. I. Part. I.

chiami Q il peso che regge la ventola in direzione perpendicolare alla corrente; r il raggio della rotella R.; b la distanza del centro di gravità della ventola dall' asse di rotazione; γ la gravità specifica dell' acqua; ed y l' altezza dovuta alla velocità della corrente. In questo caso che l' urto è diretto, il centro di resistenza coincide con quello di grandezza, quindi col centro di gravità, giacchè la ventola è omogenea. Avremo dunque Qr pel momento con cui il peso Q tende ad agirare la ventola attorno l' asse Pp nel senso IML; ed $S\gamma by$ pel momento con cui l' urto della corrente tende ad agirarla in senso contrario. Per l' equilibrio cotesti due momenti debbeno essere eguali, e perciò si avrà l' equazione $S\gamma by = Qr$, che ne dà

$$y = \frac{Qr}{S\gamma b}.$$

Applichiamo questa formola alla sperienza calcolata da Ximenes al n.° 114, in cui trova una velocità di soldi 10,79 del braccio Fiorentino, che corrispondono a m.ᵗ 0,3145.

Raccogliesi dal n.° 3. dell' opera di Ximenes, che la superficie della ventola è come la precedente della valvola, cioè di 200 soldi quadrati (m.ⁱ q.ⁱ 0,16994); e dal n.° 54. si ricava, che la distanza del centro di gravità della ventola, dall' asse di rotazione è di sol. 14,75 (m.ⁱ 0,43). Al n.° 63. il Ximenes calcola il raggio della rotella di sol. 2,34; ma egli certamente sbagliò, giacchè essendo la periferia della medesima sol. 14,92, il raggio è sol. 2,375 (m.ⁱ 0,069). Il peso Q è libbre Senesi 17:8, e siccome (n.° 70.) una libbra di Siena è once 11. Fiorentine, così le libbre 17:8 Senesi saranno libbre 16,19 di Firenze, o siano chil. 5,49. Avremo pertanto da questi dati $S = 0,16994$; $b = 0,43$; $r = 0,069$; $Q = 5,49$; e $\gamma = 1000$; per cui risulta $y =$ m.ⁱ 0,0052. La velocità corrispondente si calcola di m.ⁱ 0,3194 (*).

84. Non è difficile, dopo ciò che abbiamo detto fin qui, il ricavare le formole per tutti i tachimetri, l' uso de' quali è fondato su questi stessi principj. Passiamo piuttosto ad esporre l' ingegnosa teoria del Reometro (68), compilata dal sig. Venturoli (**); giacchè non abbiamo potuto veder quella del sig. Woltmann.

(*) Differisce questo mio risultamento da quello di Ximenes per due motivi; 1.° perchè il valore di r è alcun poco maggiore di quello per lui calcolato; 2.° perchè il peso dell' acqua, o sia il valore di γ, corrisponde, secondo Ximenes (n.° 96) a libbre 575 fiorentine per ogni braccio cubico, o siano chil. 195,072: mentre considerando questo peso di 1000 chilogrammi ogni metro cubo, sono chil. 198,756 al braccio cubico.

(**) *Elementi di Meccanica* ec. edit. 3.ª T. 2. pag. 234.

Richiamata ad esame la fig. 3. della tav. 11, chiamiamo
V la velocità della corrente,
v la velocità del centro della paletta V,
k l'obbliquità delle palette, o sia l'angolo che fanno i loro piani colla direzione dell'albero VAA,
S la superficie di ciascuna paletta, ed
a la distanza del centro dell'ala dall'asse della rotazione.

Ciò posto è manifesto, che la corrente, incontrando il piano della paletta con la velocità V, e con direzione parallela a VAA, urta contro di questo piano con forza $= V \, sen. \, k$; e frattanto il piano stesso si scosta colla velocità v, e con direzione perpendicolare a VAA, la qual direzione, come è manifesto, fa col piano stesso della paletta un angolo di $90° - k$. Quindi la forza con cui la paletta si sottrae all'urto della corrente contro la medesima, sarà $= v \, cos. \, k$. Sarà dunque la velocità relativa $= V \, sen. \, k - v \, cos. \, k$; e perciò l'urto della corrente contro ciascuna paletta espresso da $\frac{S\gamma}{2g}(V \, sen. \, k - v \, cos. \, k)^2$. Questa forza si esercita in direzione perpendicolare al piano della paletta, e decomposta secondo la velocità v, si troverà $= \frac{S\gamma \, cos. \, k}{2g}(V \, sen. \, k - v \, cos. \, k)^2$. E perchè due palette uguali sono nello stesso tempo ed allo stesso modo percosse, sarà $\frac{S\gamma \, cos. \, k}{g}(V \, sen. \, k - v \, cos. \, k)^2$ la forza motrice che va accelerando il moto rotatorio del volante. Cotesto moto si farà equabile tosto che questa forza sarà divenuta $= 0$; il che dà $V \, sen. \, k = v \, cos. \, k$, e perciò

$$V = v \, cot. \, k.$$

Questa equazione servirebbe a determinare la velocità con cui la corrente investe il volante, data essendo la velocità di questo, se si potesse prescindere dalle resistenze di attrito od altro cui debbonsi incontrare dal volante che gira. Ma poichè col prescindere da sì fatte resistenze si verrebbe a lasciare inesatta la teoria, così è giusto che queste ancora s'introducano nel calcolo. Ecco pertanto il modo di ciò effettuare.

La forza $\frac{S\gamma \, cos. \, k}{g}(V \, sen. \, k - v \, cos. \, k)^2$ agisce col momento $\frac{Sa\gamma \, cos. \, k}{g}(V \, sen. \, k - v \, cos. \, k)^2$. Se dunque chiameremo Qb la somma de' momenti delle resistenze, sarà pel moto equabile del volante

$$\frac{Sa\gamma \, cos. \, k}{g}(V \, sen. \, k - v \, cos. \, k)^2 = Qb,$$

onde

$$(F) \ldots\ldots \; V = v \cot. k + \frac{1}{sen. k} \sqrt{\left(\frac{Qbg}{8a\gamma \cos. k}\right)}.$$

Ora per conoscere la velocità v, da cui dipende il valore di V, bisognerebbe poter contare il numero de' giri che fa il volante in un tempo determinato t. Poichè se questo numero è n, è palese che il centro della paletta in t'' percorre n volte la periferia $2a\pi$; onde lo spazio descritto, in $1''$ o sia la velocità $v = \frac{2an\pi}{t}$.

Ad enumerare i giri del volante, è destinato il roteggio dello strumento. Imperocchè, se la ruota R ha cento denti, essa compie una sua rivoluzione nel tempo stesso in cui il volante ne fa cento; dunque immerso lo strumento nella corrente, sicchè stia sotto la vite il dente della ruota R segnato zero; e se dopo di aver portato lo strumento medesimo fuori dell'acqua si troverà sotto la vite il dente marcato 85, è manifesto che nel tempo t il volante avrà fatto 85 rivoluzioni, e sarà $n = 85$. Ma potrebb'essere che la ruota R avesse fatto più di una rivoluzione, e che il volante ne avesse fatto un numero assai maggiore di 85. Se per esempio la ruota R avesse fatte due rivoluzioni intere, ed inoltre tal porzione che fosse passato sotto la vite il numero 85, è chiaro che il volante avrebbe fatto 285 rivoluzioni, mentre dalla ruota R non appariscono che sole 85. A togliere un tanto inconveniente è preparata la ruota S, la quale come si disse conta i giri della ruota R. Infatti cotesta ruota R fa muovere, mediante un rochetto, l'altra ruota S in modo, che mentre la prima compie un giro, l'altra non fa p. e., che la decima parte di una rivoluzione. Se dunque la periferia di questa ruota S, sarà divisa in 10 parti eguali, e quando la macchina si mette in moto, il diametro verticale della ruota S corrisponde al segno zero; se quando si ferma il moto, trovasi p. e. che il numero 2 è passato per esso diametro verticale, e la ruota R segna sotto la vite come prima il numero 85, è manifesto che nel tempo t il volante avrà fatto 285 rivoluzioni, e sarà $n = 285$.

Rimane a vedersi come si possa determinare la somma Qb de' momenti delle resistenze che contrastano al giro del volante, onde potere dedurre dal numero de' giri di questo la velocità della corrente, mercè l'equazione (F) poc'anzi trovata. Il sig. Venturoli suggerisce di determinare il valore di Qb empiricamente nel modo che segue.

„ Collocato lo strumento in acqua stagnante, si tiri con velocità
„ nota e costante V per un lungo tratto rettilineo misurato con e-
„ sattezza. La velocità V si rileverà dividendo la lunghezza del trat-
„ to percorso pel tempo che si mette a percorrerlo. Si conti sul reo-
„ metro il numero de' giri fatti in un determinato tempo, e perchè

„ torna allo stesso o il reometro cammini colla velocità V, o il reo-
„ metro stia fermo e l'acqua colla velocità V lo percuota, avreme
„ nella formola (F) note le velocità, V, e v. D'altra parte l'angolo
„ k e la distanza a sono già conosciute per la struttura della mac-
„ china. Dunque si renderà cognito il valore del prodotto Qb „.

Se nel luogo della *Biblioteca Universale* in cui trovasi descritta la presente invenzione, fossero riferite le dimensioni e la struttura dello strumento che servì nelle sperienze ivi registrate, non tralascerei certo di profittarne, onde determinare cotesto valore di Qb; ma il fatto sta che da quanto quivi si legge non può rilevarsi di preciso che la velocità V, la quale era di nove pollici del piede di Berna, e ci manca la cognizione de' valori di a, e di k, da cui trarrebesi quello di v, e quindi quello di Qb, mercè la citata equazione (F).

85. Eccoci finalmente alla teoria dello strumento, secondo me, il più lusinghiero; e dal quale sembra si possano ottenere risultamenti, se non esattissimi, almeno con maggiore approssimazione che non con tutti gli altri che abbiamo descritti.

L'asta cilindrica AV (*tav.* 12. *fig.* 5.) sospesa al punto A, debba immergersi nella corrente pel tratto NV. S'intenda diviso questo tratto ne' piccoli intervalli NP, PQ, QR . . . . . XT, TU, UV, e ciascuno d'essi sia diviso per metà ne' punti p, q, r . . . . x, t, u. Sia G il centro di gravità dell'asta, ed O il punto di mezzo della porzione immersa. Chiamiamo

a la sua lunghezza AV,
b la distanza AG,
m la porzione AN che sporge fuori dell'acqua; sarà
$\frac{1}{2}(a+m)$ la distanza AO. Dicasi inoltre
r il raggio della sezione trasversale,
G la gravità specifica dell'asta,
γ quella dell'acqua, e
ϕ l'inclinazione dell'asta al perpendicolo.

E finalmente le velocità degli strati sempre più profondi che investono i tratti NP, PQ, QR ec. siano rispettivamente dovute alle altezze s, s', s'' ec.

Anche questo strumento, a similitudine di quello di Bonati, viene sollecitato da tre forze. La prima è il suo peso $=\pi r^2 a G$. Decomposta questa forza in due, l'una normale, e l'altra parallela all'asta, sarà la prima $=\pi r^2 a G\, sen.\, \phi$; e il suo momento riferito al punto A sarà $=\pi r^2 ab G\, sen.\, \phi$.

La seconda è la risultante delle pressioni che il fluido esercita contro la porzione immersa NV, la quale uguaglia il peso della massa fluida spostata. Sarà dunque questa forza $=\pi r^2(a-m)\gamma$, ed esercita normalmente all'asta uno sforzo $=\pi r^2(a-m)\gamma\, sen.\, \phi$. Il

momento di questo sforzo riferito al punto A è $= \frac{1}{2}\pi r^2 (a^2 - m^2) \gamma \, sen. \, \Phi$.

La terza forza finalmente è quella che proviene dall' urto della corrente che normalmente percuote i singoli tratti NP, PQ, QR ec. Calcoleremo questa forza cogli stessi principj adoperati per l' asta di Bonati (78), onde le espressioni degli urti anzidetti saranno

$\frac{11}{20} . 2r . NP . s . \gamma \cos.^2 \varphi ; \frac{11}{20} . 2r . PQ . s' . \gamma \cos.^2 \varphi ; \frac{11}{20} . 2r . QR s'' . \gamma \cos.^2 \varphi$ ec.

le distanze de' loro punti d' applicazione da A sono rispettivamente Ap, Aq, Ar ec. Quindi la somma de' loro momenti sarà $=$

$$\frac{11}{10} r \gamma \cos.^2 \Phi (NP . Ap . s + PQ . Aq . s' + QR . Ar . s'' + \text{ec.}).$$

Di queste forze la prima tende a ricondurre l' asta al perpendicolo, le altre due ad allontanarla. Avremo dunque per l' equilibrio

$$\pi r^2 ab G \, sen. \, \varphi = \frac{1}{2} \pi r^2 \gamma (a^2 - m^2) \, sen. \, \Phi +$$
$$\frac{11}{10} r \gamma \cos.^2 \varphi (NP . Ap . s + PQ . Aq . s' + QR . Ar . s'' + \text{ec.});$$

e sia riducendo

$$\frac{5}{11} \pi r \left[2ab . \frac{G}{\gamma} - a^2 + m^2 \right] \frac{sen. \, \varphi}{\cos.^2 \varphi} = NP . Ap . s + PQ . Aq . s' + QR . Ar . s'' + \text{ec.}$$

Facciasi per compendio $(f) \ldots . M = \frac{5}{11} \pi r \left[2ab . \frac{G}{\gamma} - a^2 + m^2 \right] \frac{sen. \, \varphi}{\cos.^2 \varphi}$

l' equazione dell' equilibrio sarà

$$(H) \ldots \ldots M = NP . Ap . s + PQ . Aq . s' + QR . Ar . s'' + \text{ec.}$$

Vediamo ora come per mezzo di quest' equazione si determini la scala delle velocità nella perpendicolare MB.

Collocato il centro A di sospensione nella proposta perpendicolare, vadasi esso di mano in mano abbassando in guisa che da prima si tuffi sott' acqua l' ultima divisione VU, indi la seguente UT, poi la terza TX, e così successivamente fino in N, immergendo sotto il pelo della corrente un nuovo intervallo, ad ogni immersione dello strumento. Si noti ad ogni volta il corrispondente angolo Φ. Dalla serie di questi angoli conosceremo il progresso delle velocità nel modo che segue.

Siano le situazioni dell' asta nelle successive immersioni AV, A'V', A''V'' ec. (*tav.* 12. *fig.* 6.). Gli angoli A, A', A'' ec. dal più alto venendo al più basso si distinguano colle lettere Φ, Φ', Φ'' ec., e le lunghezze dell' asta sporte fuori dell' acqua AU, AT, AX ec. colle lettere m, m', m'' ec. Pei termini V, V', V'' ec. si conducano le

orizzontali BV, B'V', B''V'' ec. le quali, nelle porzioni sommerse dell'asta, taglieranno gl'intervalli UV; $T\beta$, $\beta V'$; $X\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta V''$; ec. Ognuno di questi intervalli s'intenda diviso per mezzo ne' punti u; t, u'; x, t', u''; ec. Mentre poi l'asta nel suo discendere viene investita successivamente dalle colonne d'acqua sempre più basse MB, BB', B'B'' ec. le velocità di queste colonne siano rispettivamente dovute alle altezze s, s', s'' ec.

Ciò posto si noti colle lettere M', M'' ec. quel che diventa M ponendo nella formola (f) in luogo di m, φ le lettere m', φ'; m'', φ''; ec. Ed è manifesto, che l'equilibrio dell'asta nelle successive posizioni AV, A'V, A''V'' ec. somministrerà altrettante equazioni quante sono le colonne MB, BB', B'B'' ec., colle quali verranno determinate le incognite s, s', s'' ec. del problema. In fatti per la prima di queste posizioni l'equazione d'equilibrio (H), non avrà nel secondo membro che un termine solo, nel quale $NP = UV$, ed $Ap = Au$. Per la seconda posizione, l'equazione (H) avrà due termini nel secondo membro, e sarà $M = M'$; $NP = T\beta$, $Ap = A't$, $PQ = \beta V'$, $Aq = A'u'$. Così per la terza posizione l'equazione (H) ha tre termini nel secondo membro, e dovrà porsi $M = M''$; $NP = X\gamma$, $Ap = A''x$; $PQ = \gamma\delta$, $Aq = A''t'$; $QR = \delta V''$, $Ar = A''u''$; e così dicasi di tutte le altre posizioni dell'asta. Risulteranno pertanto le equazioni

$$(1) \ldots \begin{cases} M = UV \cdot A u \cdot s \\ M' = T\beta \cdot A' t \cdot s + \beta V' \cdot A' u' \cdot s' \\ M'' = S\gamma \cdot A'' x \cdot s + \gamma\delta \cdot A'' t' \cdot s' + \delta V'' A'' u'' \cdot s'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

colle quali si determineranno le quantità s, s', s'' ec.

Ma per potere effettualmente ritrovare il valore di queste incognite, fa d'uopo ricercare le espressioni analitiche degli intervalli UV, Au; $T\beta$, $A'\gamma$, ec. Per tale effetto pongasi la lunghezza nota di ciascuna delle divisioni eguali VU, UT, TX ec. $= 2n$; e sarà $MB = 2n \cos.\varphi$; $MB' = 4n \cos.\varphi'$; $MB'' = 6n \cos.\varphi$ ec.; onde $BB' = 4n \cos.\varphi' - 2n \cos.\varphi$, $B'B'' = 6n \cos.\varphi'' - 4n \cos.\varphi'$ ec. Quindi avremo

$$VU = 2n;$$

$$T\beta = \frac{2n \cos.\varphi}{\cos\varphi'}, \quad \beta V' = \frac{4n \cos.\varphi' - 2n \cos.\varphi}{\cos.\varphi'};$$

$$X\gamma = \frac{2n \cos.\varphi}{\cos.\varphi''}, \quad \gamma\delta = \frac{4n \cos.\varphi' - 2n \cos.\varphi}{\cos.\varphi''}, \quad \delta V'' = \frac{6n \cos.\varphi'' - 4n \cos.\varphi'}{\cos.\varphi''};$$

E poscia

$$A u = m + n;$$

$$A' t = m'' + \frac{n \cos.\varphi}{\cos.\varphi'}, \; A' u' = m' + \frac{2n \cos.\varphi' + n \cos.\varphi}{\cos.\varphi'};$$

$$A'' x = m'' + \frac{n \cos.\varphi}{\cos.\varphi''}, \; A'' t' = m'' + \frac{2n \cos.\varphi' + n \cos.\varphi}{\cos.\varphi''}, \; A'' u'' = m'' + \frac{3n \cos.\varphi'' + 2n \cos.\varphi'}{\cos.\varphi''};$$

. . . .

Facciasi per compendio

$$A = 2n \cos.\varphi \quad ; \quad B = n \cos.\varphi$$

$$A' = 4n \cos.\varphi'' - 2n \cos.\varphi \quad ; \quad B' = 2n \cos.\varphi' + n \cos.\varphi$$

$$A' = 6n \cos.\varphi'' - 4n \cos.\varphi' \quad ; \quad B'' = 3n \cos.\varphi'' + 2n \cos.\varphi'$$

. . . .

ed allora risulterà,

$$UV = 2n;$$

$$T\beta = \frac{A}{\cos.\varphi'}, \; \beta V' = \frac{A'}{\cos.\varphi'};$$

$$X\gamma = \frac{A}{\cos.\varphi''}, \; \gamma\delta = \frac{A'}{\cos.\varphi''}, \; \delta V'' = \frac{A''}{\cos.\varphi''};$$

. . . .

$$\left.\begin{array}{l} A u = m + \frac{B}{\cos.\varphi}; \\ A' t = m' + \frac{B}{\cos.\varphi'}, \; A' u' = m' + \frac{B'}{\cos.\varphi'}; \\ A'' x = m'' + \frac{B}{\cos.\varphi''}, \; A'' t' = m'' + \frac{B}{\cos.\varphi''}, \; A u = m + \frac{B''}{\cos.\varphi''}; \end{array}\right\} \ldots (I)$$

. . . .

Sostituiti questi valori nelle equazioni (I), se ne ritrarranno senza difficoltà i valori delle incognite s, s', s'' ec., colle quali, mercè le formole $u = \sqrt{(2gs)}$, $u' = \sqrt{(2gs')}$, $u'' = \sqrt{(2gs'')}$ ec., si determineranno le velocità ne' diversi strati corrispondenti alla perpendicolare MB.

86. Il sig. Venturoli autore di questa teoria, e dell' invenzione a cui appartiene; non tralascia di osservare, come col mezzo di questo suo metodo si possa determinare la portata della perpendicolare BM, non meno che la scala delle velocità. Nella prima determinazione basterebbero, secondo lui, poche immersioni dell' asta purchè in

ciascuna immersione si comprenda un egual numero di divisioni, ma alla fine del calcolo, conclude egli stesso, che il risultamento non sarebbe troppo esatto: perocchè se le velocità, dalla superfice al fondo andranno diminuendo si otterrà un risultamento minore del giusto; succederà il contrario, se le velocità andranno crescendo (*). Nella seconda determinazione le immersioni si dovranno fare più spesse, sommergendo ad ogni volta brevi intervalli dell' asta; ma allora molte equazioni si avranno a calcolare. Tralascieremo di parlare della prima di queste determinazioni, giacchè non mancano mezzi co' quali ottenere maggior speditezza, e precisione; e ci fermeremo soltanto sulla seconda, soggiungendo quelle considerazioni, che, se non sempre, in moltissimi incontri almeno, ponno valere a semplicizzare il calcolo necessario in questa ricerca.

Dovendosi adunque, nella ricerca della scala delle velocità, immergere l' asta per successivi tratti piccolissimi, è chiaro che gli angoli φ, φ', φ'' ec. per ordinario cresceranno assai lentamente, cosicchè la differenza tra due angoli consecutivi sarà ben piccola. Onde si vede che i punti β, γ, δ; ec. taglieranno a un dipresso in parti eguali le lunghezze TV', XV'' ec., e coincideranno assai prossimamente colle divisioni eguali dell' asta. Allora nelle equazioni (I) si dovrà porre

$$VU = T\beta = \beta V' = X\gamma = \gamma\delta = \delta V'' \text{ ec.} = 2n;$$
$$A\,u = m + n;\ A'\,t = m' + n,\ A'\,u' = m + 3n,$$
$$A''\,x = m'' + n,\ A''\,t' = m' + 3n,\ A''\,u'' = m + 5n;$$

. . . .

e risulterà

$$M = 2n(m + n)s$$
$$M' = 2n(m' + n)s + 2n(m + 3n)s'$$
$$M'' = 2n(m'' + n)s + 2n(m' + 3n)s' + 2n(m + 5n)s''$$

E poichè $m = a - 2n$, $m' = a - 4n$, $m'' = a - 6n$ ec., si avrà

$$M = 2n(a - n)s$$
$$M' = 2n(a - 3n)s + 2n(a - n)s'$$
$$M'' = 2n(a - 5n)s + 2n(a - 3n)s' + 2n(a - n)s''$$

le quali equazioni si formano e si calcolano assai speditamente

(*) *Elementi di Meccanica* ec. tom. 3. Bologna 1810. pag. 222.

Per conoscere in ciascuna immersione la declinazione φ dell' asta, non v' è bisogno di rilevarla col quadrante. Poichè conoscendosi ad ogni volta l' altezza AM, e la lunghezza m della parte che resta fuori dell' acqua, si conoscerà $\cos. \varphi = \frac{AM}{m}$.

L' avvertenza più essenziale nell' uso di questo tachimetro idraulico si è che l' angolo φ non oltrepassi mai trenta gradi, diversamente la teoria di Newton, dietro la quale abbiamo calcolato l' urto della corrente contro i singoli tratti dell' asta, sarebbe fallace (76). Per assicurarsi che in tutte le immersioni non avverrà mai che sia $\varphi > 30°$, ecco in qual modo si debbe procedere. Si farà uso di una canna cilindrica vuota internamente, e resa specificamente più grave dell' acqua coll' introdurre nella sua cavità delle migliarole di piombo: collocata questa canna col centro di sospensione in quella maggiore bassezza a cui vuol portarsi, s' infonde per di sopra nella medesima altra ed altra pallina di piombo, sin tanto che l' angolo della declinazione si riduca al termine di 30°, o poco meno: il che si giudica facilmente anche ad occhio, non essendo questo un limite così preciso che bisogni determinarlo accuratamente. Così saremo certi d' avere caricato il pendolo a dovere. E senza più sollevando a poco a poco il centro di sospensione faremo successivamente emergere dall' acqua le divisioni equidistanti della canna, e notando ad ogni volta le declinazioni del pendolo, avremo raccolto gli opportuni dati pel calcolo (*). Questa operazione va ripetuta per ogni sezione dell' alveo che si sperimenta.

CONCLUSIONE.

87. Riepilogando in poche parole il nostro esame sui tachimetri idraulici, ecco cosa ci sembra di potere concludere.

In quanto alla misura della velocità di una corrente in superficie, il galleggiante semplice del Castelli è lo strumento più facile e più semplice che possa mai immaginarsi: quello di Leslie sarebbe il più esatto ma conviene ancora studiarlo, onde determinare con qual regola si debba adoperare.

In quanto alla misura della scala delle velocità, è certo da escludere l' asta ritrometrica di Bonati, la quale d' altronde è lo strumento più opportuno e più efficace, per determinare la velocità media; e quindi per conoscere con ispeditezza la portata di ciascuna

(*) V. Venturoli l. c. pag. 226.

perpendicolare, con un' approssimazione più che sufficiente. Il Pendolo idrometrico di Guglielmini modificato dal Venturoli, sarebbe lo strumento più semplice per la scala delle velocità: ma sta a vedere se nel pratico suo maneggiamento, s' incontreranno difficoltà nel fermarlo a quella profondità che si vuole, e nel determinare con abbastanza di precisione cotesta profondità. Nessuno però lo ha ancora sperimentato, e perciò lascieremo alla sperienza il decidere più fermamente sul merito di questa invenzione. In quanto a quegli strumenti che hanno ruote, carrucole, od assi attorno cui debbon muoversi alcune parti della macchina, già immerse nella corrente, come sono il reometro, i tachimetri di Lorgna e di Barbantini, quello del sig. Gauthey ed altri; oltre agli inconvenienti di che abbiamo parlato nella seconda parte di questo scritto, parmi che si possa aggiugnere anche questo; che adoperandoli nelle piene de' fiumi, e canali allorchè l' acqua è torbida, possono introdursi quelle sottili arene trasportate dalla corrente, fra gli assicelli delle ruote ec., e produrre quindi uno straniero attrito che valga ad alterare il movimento della macchina, per cui i risultamenti della sperienza saranno vaghi ed incerti. È questo un altro motivo onde raccomandare la semplicità de' mezzi da adoperare in sì importante ricerca.

Negli alvei de' canali, dove non è molta larghezza, nè molta velocità; sarà utile moltissimo il galleggiante composto di Brunacci, il quale adoperato a dovere, può essere di assai giovamento per la sua speditezza e semplicità. Non così nelle grandi e assai veloci correnti, nelle quali la curvatura del filo può indurre un divario notabile.

Raccomanderò finalmente il pendolo idrometrico composto del signor Ventoroli, siccome quello che secondo me può servire tanto nelle mediocri che nelle ampie sezioni de' fiumi; e tanto nelle medie che nelle maggiori escrescenze. Sarà forse alquanto penoso il calcolo che con questo strumento si dovrà istituire, ma però non molto difficile: si richiederà molto tempo nell' adoperarlo, dovendosi nelle grandi profondità effettuare molte immersioni: ma in questo non si durerà molta fatica, nè molte cose si dovranno osservare. Preparato lo strumento in modo che la massima sua inclinazione non ecceda mai 30°, basterà misurare ad ogni immersione l' altezza del centro di sospensione sopra la superficie della corrente. Non dirò già con tutta franchezza, e con quella asseveranza che tanto si desidera in questo genere di cose, che lo stromento del quale si ragiona sia il migliore tachimetro idraulico fino ad ora conosciuto; giacchè di ciò ne faccio giudice la sperienza. Ma appunto perchè di tal giudice manchiamo, mi sarà almeno concesso di dire, che secondo me, gli è quello che minor numero d' inconvenienti ci presenta.

La stessa cosa ha detto Navier dello strumento del sig. Gauthey; ma se a me è parso di poter contradirlo, vi sarà forse chi farà lo stesso della mia oppinione. Vedremo in ultimo chi abbia maggior fondamento di verità. Intanto io desidero che gl' Idrometri si occupino di questa invenzione, e che coll' appoggio della sperienza, pronunzino quel imparziale giudizio che nella loro saviezza crederanno appartenere alla mia tesi.

Porrò fine a questo lavoro colla seguente protesta. Nell' esporre le mie oppinioni intorno alle macchinette per me esaminate, non ho avuto altro scopo che di manifestare ingenuamente il mio sentimento, senza volere oscurare il merito grandissimo di chi le ha inventate. Nè si creda ch' io sia tenacemente persuaso d' avere mai sempre colpito nel segno, in questi miei giudizj; che anzi son pronto a ritrattarmi quante volte mi sia mostrato l' errore in che sono caduto. Non v' ha chi non sappia quanto sia utile ai progressi delle Scienze il discutere sulle cose dette o proposte. E persuaso anch' io di questa verità, avrei sommo piacere che altri speculando sulle mie oppinioni, false o buone che siano, scoprissero perfettissima qualcuna di quelle macchinette, da me credute insufficienti e fallaci. Anche in questo modo, sebbene indirettamente, avrei io cooperato al pubblico bene, unico scopo di tutte le mie fatiche.

DELLA MISURA

DELLE ACQUE CORRENTI

PER LE BOCCHE DI DERIVAZIONE, E PER GLI ALVEI DI CORSO EQUABILE.

MEMORIA

DEL DOTT. GIOVAMBATISTA MASETTI

PROFESSOR SUPPLENTE DI MATEMATICA NELL' UNIVERSITA' DI BOLOGNA.

PREFAZIONE.

All' occasione che il sig. Professore Francesco Cardinali con indefessa cura, ed instancabile zelo, si è dato all' impresa di pubblicare una nuova collezione di Opere Italiane, che trattano del moto dell' acque, mi è venuto il pensiero di stendere la presente opericciuola, sembrandomi che potesse interessare gli Ingegneri nelle loro pratiche ispezioni.

L' uso della tavola parabolica, a cui di buon ora questi si accostumano, non è secondo me così preciso, come lo sono i calcoli analitici. La scala delle velocità, rappresentata da una parabola, se per avventura è in qualche modo applicabile alle bocche di derivazione, nelle quali l' ampiezza della luce è piccolissima a fronte dell' ampiezza del recipiente, non lo è in conto alcuno, alle sezioni de' canali o de' fiumi, nelle quali la velocità scema dalla superficie al fondo.

Sembrami quindi più conveniente, e più esatto, l' attenersi, nell' uno e nell' altro caso, alla determinazione della velocità media, la quale quanto sia precisa coll' analisi, a preferenza ancora della sintesi potrà ognuno giudicarlo sol che si prenda la pena di leggere questo scritto.

Nelle tavole paraboliche fino ad ora conosciute, si calcola il parametro della parabola eguale all' unità, o tutt' al più a 60 piedi

parigini e 4. pollici: col primo, la tavola parabolica serve a determinare il rapporto fra le portate delle diverse sezioni, o luci; col secondo, serve a calcolare la quantità assoluta che tramanda ciascuna luce, o sezione. Cotesto parametro di piedi 60: 4 non è che, assai prossimamente, il doppio del valore della gravità alla superficie della terra, nella latitudine di Parigi: ma un tale valore varia da una latitudine all'altra; dunque anche i parametri delle tavole paraboliche debbono variare ad ogni latitudine.

Da questa considerazione mi nacque l'idea di determinare una formola, onde calcolare la gravità alla superficie della terra per ogni latitudine, e con essa ho calcolato il valore di questa gravità per venti delle principali città dell'Europa, o sia per le venti latitudini che a coteste città corrispondono. Inoltre ho calcolate dieci tavole dalle quali risulta il valore della velocità, che compete a tutte le altezze comprese da metri 0,01 sino a metri 4. Coteste tavole si riferiscono a dieci delle precedenti latitudini; ed a quelle precisamente, che più meritavano d'essere calcolate per la differenza che porgevano ne' loro risultamenti. Ponno esse tener luogo delle tavole paraboliche, e ponno servire alla determinazione della quantità d'acqua assoluta, che tramanda ciascuna bocca di derivazione.

In quanto poi agli alvei di corso equabile, io son d'avviso, che alla tavola parabolica si debba sostituire quella che ci diede Prony, corretta però in seguito dei dati del sig. Eytelwein. Per quattro latitudini ho io calcolato cotesta tavola, la quale contiene la velocità media dell'alveo, da' metri 0,01, sino a metri 3,66.

Sono queste le modificazioni da me introdotte, nell'odierno modo di calcolare la portata delle bocche di derivazione, e degli alvei di corso equabile. Se cotesto mio lavoro sarà per riuscire di qualche vantaggio, è giudizio che spetta all'imparziale lettore di questo opuscolo. Tale però si fu il fine a cui mirai nello scriverlo, che se potrà ottenere dal pubblico un benigno compatimento, verranno largamente ricompensate le mie fatiche, ed io sarò pago d'averle pubblicate.

1. È uso commendevolissimo di alcuni Paesi quello di assegnare un' unità di misura per le derivazioni delle acque, e di regolare sì fatte derivazioni, sicchè ogni derivatario percepisca dalla sua bocca, quant' acqua ha diritto di derivare.

I canali che servono alle derivazioni, o sono alimentati da proprie sorgenti, o lo sono da un qualche fiume o torrente; nell' uno e nell' altro caso andranno mai sempre soggetti alle stesse vicissitudini de' recipienti nutricatori, e quindi saranno or più or meno copiosi di acque, potendo qualche fiata, esserne totalmente privi. Di qui risulta palesemente la difficoltà di applicare in tutti i canali indistintamente quel salutare sistema dell' unità di misura, richiedendosi pel medesimo, che il canale onde derivasi abbia sempre tal copia d' acqua, da procurare un carico costante contro la bocca di derivazione.

Di cotesti canali poi, altri servono alla navigazione, altri alle arti, ed altri finalmente all' agricoltura. Ne' primi e ne' secondi non può concedersi alle derivazioni se non l' acqua che è loro superflua, ne' terzi, tutta sarà loro destinata, di modo che potranno le derivazioni rendere esausto il canale cui appartengono.

E qui parlando de' primi canali, e cioè di quelli che servono alla navigazione, ed alle arti, ben vedesi quanta sia la necessità di calcolare la loro portata, onde giudicare e decidere, qual parte delle loro acque possa concedersi alle derivazioni. E determinata ancora questa quantità, conviene calcolare la portata di ciascuna bocca, onde le derivazioni concedute non sottraessero al canale più acqua della superflua ai proprj bisogni.

Prescindo qui da quelle convenzioni, che possono esservi fra i proprietarj de' canali e delle derivazioni; e da quelle circostanze tutte, dalle quali risultar puote una eccezione a quanto ho io qui riferito; e solamente intendo di parlare in astratto ed alla sfuggita, sul modo di concedere le derivazioni da un dato canale, perchè serve a mostrare l' importanza dell' argomento del quale è quistione. Infatti qualunque siasi il modo di regolare le derivazioni, non potrà certo non esservi dipendenza fra la portata del canale e quella di ciascuna derivazione, giacchè dovrà pure il derivatario conoscere di qual quantità d' acqua può egli disporre; ed il canale ha diritto di sapere quant' acqua può concedere al derivatario senza nuocere a se stesso; ond' è che volendo procedere con cognizion di causa, è

mestieri conoscere il modo di calcolare la quantità d'acqua che sgorga da ciascuna luce, e quella che scorre per l'alveo del canale. L'uno e l'altro di cotesti calcoli formano il soggetto della presente memoria. L'argomento in vero non è nuovo nè sarà trattato con metodo diverso da quello cui tengono i moderni scrittori; ma si è corredato di alcune indagini sperimentali, e di utili considerazioni, cui possono per avventura renderlo meritevole della pubblica luce.

2. Tutti gli autori che fin qui hanno parlato del moto de' corpi in generale, attribuiscono alla gravità nella superficie della terra un valore costante, e per questo valore prendono concordemente quello che ha luogo nella latitudine di Parigi. Non sò per quale motivo si usi una tale preferenza. Non è già perchè la latitudine di 48° : 50′ : 14″ si riguarda siccome media, giacchè quella di Torino più s'accosta ad una tal latitudine, differendo di soli 4′. E chi non sa che per latitudine media s'intende quella di 45°? Comunque sia la cosa però, io dico che pel valore della gravità alla superficie della terra, dee prendersi quello che è proprio della latitudine di quel paese, al quale spettano i calcoli, o le ricerche intraprese. È bensì vero che la variazione della gravità proveniente dalla latitudine, non è cosa di grande momento, mentre per una differenza di 21° : 13′ : 59″ nelle latitudini, s'incontra una differenza di metri 0,018332 nelle gravità; tuttavia, siccome nella scienza delle acque, per le molte difficoltà agli odierni lumi insormontabili, siamo condotti mai sempre a risultamenti approssimati, così quanto più diminuisconsi le cagioni che ne allontanano da' veri risultamenti, tanto più prossimi al vero saranno quelli che per noi si ottengono; ond'è che il togliere dalla scienza delle acque le piccole differenze che indur ponno le variazioni della gravità, sarà sempre cosa commendevole, e di utilità calcolabile.

Da queste considerazioni fui indotto ad assicurarmi di una formola, atta a determinare colla maggiore possibile precisione, il valore della gravità alla superficie della terra, e per qualunque latitudine.

Formola per calcolare il valore della gravità alla superficie della terra, ed in ogni latitudine.

3. Per ottenere l'intento, mi sono appigliato al partito di ricorrere a quelle sperienze, dietro le quali si determina la lunghezza del pendolo a secondi in ciascuna latitudine, persuaso che non ve n'abbia uno migliore. Imperocchè determinata che sia una tale lunghezza, con tutta la possibile precisione, con altrettanta si conosce del pari il valore della gravità, lo che dimostreremo tra poco.

Preso un medio fra 12 sperienze, trovò Mairan, che alla latitudine

di Parigi la lunghezza del pendolo a secondi corrisponde a piedi $3:0:8\frac{51}{90}$, o siano metri 0,993842 (*). Sappiamo inoltre, che l'espressione analitica di una tale lunghezza ha due termini, l'uno costante e l'altro proporzionale al quadrato del seno della latitudine; cosicchè chiamata λ cotesta lunghezza, e ψ la latitudine, sarà

$$\lambda = A + B\,sen.^2\,\psi,$$

essendo A, B due coefficienti costanti da determinarsi colla sperienza. È noto finalmente, che la lunghezza del pendolo a secondi sotto l'equatore, è di metri 0,9909. Di qui avremo nozioni sufficienti onde determinare il valore di λ in funzione di ψ.

Infatti posto nella formola precedente $\psi = 0$, dovrà risultare $\lambda = 0{,}9909$; e posto $\psi = 48^\circ : 50' : 14''$, dovrà riescire $\lambda = 0{,}993842$. Avremo dunque le due equazioni

$$0{,}9909 = A + B\,sen.^2\,0;\quad 0{,}993842 = A + B\,sen.^2\,48^\circ : 50' : 14''$$

dalle quali trarremo i valori de' coefficienti A, B. La prima ci dà tosto $A = 0{,}9909$, e la seconda determina $B = 0{,}00519$. Adunque, la formola colla quale si calcola la lunghezza del pendolo a secondi ad ogni latitudine, sarà

$$(a) \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}9909 + 0{,}00519\,sen.^2\,\psi.$$

Vediamo ora se questa formola sia consentanea ad altre sperienze. Il sig. Godin, prendendo un medio fra due osservazioni, trova che la lunghezza del pendolo che batte i secondi al piccolo Goave sulla costa settentrionale dell'isola di S. Domingo, e cioè per una latitudine di $18^\circ : 27'$, corrisponde a piedi $3:0:7{,}378$, o siano metri 0,9911617 (**). Posto quindi nella formola (a) $\psi = 18^\circ : 27'$, risulta $\lambda = 0{,}9914198$, o siano piedi $3:0:7{,}488$. La differenza pertanto fra il risultamento della nostra formola, e quello della sperienza, è di 0,11 di linea, quantità trascurabile.

Assicurati che ora siamo di una formola per calcolare la lunghezza del pendolo a secondi, ci sarà facile determinar quella che al calcolo della gravità appartiene. Imperocchè, dalla teoria de' pendoli impariamo, che chiamata λ la lunghezza di un pendolo qualunque, g la gravità alla superficie della terra, ed a qualunque latitudine, t il tempo di ciascuna oscillazione, e π il rapporto del diametro alla circonferenza nel circolo di raggio uno, o sia il numero 3,1415926, sarà $t = \dfrac{\pi\sqrt{(\lambda)}}{\sqrt{(g)}}$. Adunque se poniamo in questa formola $t = 1''$.

(*) *Mem. de l'Acad. des Sc.* 1735. pag. 153.
(**) *Mem. de l'Acad. des Sc.* 1735. pag. 514, 517.

risulterà $g = \pi^2 \lambda$, o sia

$$g = 9{,}869604\,(0{,}9909 + 0{,}00519\ sen.^2\,\psi);$$

eseguite le moltiplicazioni si troverà

$$(b) \ldots\ldots\ g = 9{,}77979 + 0{,}0512\ sen.^2\,\psi\ (^*),$$

pel cercato valore della gravità alla superficie della terra, ed in qualsivoglia latitudine.

4. Trovata per tal modo la formola (*b*), con essa ho preso a calcolare il valore della gravità alla superficie della terra per venti delle principali città dell' Europa, e secondo che m' accorgea essere fra questi valori una differenza atta a portar variazione nella velocità de' corpi cadenti da date altezze, mi accingea a risolvere il problema data l' altezza trovare la velocità ad essa dovuta; lo che io feci per dieci di quelle città, e dieci tavole quindi ho costrutte, che contengono l' altezza e la velocità corrispondente, da metri 0,01 sino a metri 4. Queste tavole poi servir ponno al nostro argomento, giacchè data l' altezza media dovuta alla velocità dell' efflusso, si trova tostamente una tale velocità. Lo stesso ho praticato anche per gli alvei di corso equabile, risolvendo per essi, ad imitazione di Prony, il problema, data la velocità media trovare il prodotto del raggio medio pel coseno della pendenza dell' alveo; se non che essendo piccolissime le differenze fra i risultamenti dall' una all' altra di coteste città, mi sono determinato a limitare un tale lavoro per sole quattro scegliendo quelle fra le quali maggiori differenze risultano. Queste quattro tavole sono estese da una velocità media di metri 0,01 sino a m.[i] 3,60; e nella pratica possono servire al problema inverso, dato il prodotto del raggio medio pel coseno della pendenza dell' alveo, trovare la velocità media dell' acqua che per esso scorre, od in termini più generali, data la figura e la pendenza dell' alveo, determinarne la velocità media.

Ecco pertanto nella seguente tavola i valori della gravità alla superficie della terra, per le venti città poc' anzi enunciate.

(*) Il sig. Navier nelle note al Tom. I. dell' Architettura Idraulica di Belidor, pag. 87 e 101, Parigi 1819, ci dà per la lunghezza del pendolo a secondi la formola $\lambda = 0{,}9909 + 0{,}0052424\ sen.^2\,\psi$; e per l' espressione della gravità alla superficie della terra $g = 9{,}77980 + 0{,}05174\ sen.^2\,\psi$. Posto nella prima $\psi = 48^\circ : 50' : 14''$ dovrebbe risultare $\lambda = 0{,}993842$, valore ch' egli pure ammette, e invece si trova $\lambda = 0{,}993871$. Dubitai quindi che anche l' altra formola fosse poco esatta, e perciò assunsi la ricerca delle equazioni (*a*) (*b*) le quali per avventura sembrano meglio corrispondere alla sperienza.

Tavola de' valori della gravità alla superficie della terra, dedotti dall'equazione (b).

Nomi di alcune delle principali città d' Europa.	Latitudine.	Seno della latitudine.	Gravità alla superficie della terra.
Pietroburgo.	59° : 56′ : 23″	0,8654988	9,8181433
Mosca.	55° : 45′ : 45″	0,8267125	9,8147828
Copenhagen.	55° : 41′ : 4″	0,8259452	9,8147179
Berlino.	52° : 31′ : 45″	0,7936631	9,8120409
Varsavia.	52° : 14′ : 28″	0,7905946	9,8117920
Londra.	51° : 30′ : 49″	0,7827560	9,8111606
Parigi.	48° : 50′ : 14″	0,7528427	9,8087952
Vienna.	48° : 12′ : 35″	0,7455891	9,8082522
Milano.	45° : 28′ : 1″	0,7128460	9,8058072
Venezia.	45° : 25′ : 58″	0,7124276	9,8057767
Torino.	45° : 4′ : 0″	0,7079291	9,8054496
Ferrara.	44° : 49′ : 56″	0,7050331	9,8052401
Bologna.	44° : 29′ : 54″	0,7008885	9,8049417
Genova.	44° : 24′ : 34″	0,6997810	9,8048628
Firenze.	43° : 46′ : 41″	0,6918667	9,8042984
Roma.	41° : 53′ : 52″	0,6678037	9,8026232
Costantinopoli.	41° : 1′ : 27″	0,6563773	9,8018485
Napoli.	40° : 51′ : 55″	0,6542660	9,8017069
Madrid.	40° : 24′ : 57″	0,6483303	9,8013110
Lisbona.	38° : 42′ : 24″	0,6253335	9,7998113

5. Conoscendo la velocità media di una corrente, il prodotto di questa velocità per l' area della sezione per cui scorre l' acqua, ci dà la portata di una bocca di derivazione, o di un alveo qualunque di corso equabile; o sia ci dà l' espressione della quantità d' acqua, che ad ogni minuto secondo passa per quella sezione. E poichè l' area della bocca, o della sezione dell' alveo è sempre data, così la loro portata sarà nota, allorchè si conosca la velocità media. Proponiamoci adunque di determinare questa velocità, sì per le bocche di derivazione, come per gli alvei di corso equabile.

Dell' altezza media dovuta alla velocità dell' efflusso per le bocche di derivazione.

6. In quanto alle bocche di derivazione ci basta di conoscere *l' altezza media* a cui è dovuta la velocità dell' efflusso; giacchè chiamata H una tale altezza la velocità corrispondente sarà $= \sqrt{(2gH)}$. Ma neppure avremo bisogno di calcolare questa velocità, giacchè data l' altezza H, le tavole di sopra citate, e che trovansi alla fine di questo scritto, ne mostreranno tostamente la velocità ad essa dovuta.

Quest'altezza media però non è la stessa per tutte le luoi, essa varia col variare di loro configurazione. Le bocche che più frequentemente si usano sono rettangolari, quadrate, triangolari, o circolari. Di queste adunque ci occuperemo.

Per le luci piccolissime, l'altezza media è sempre la profondità della luce sotto la superficie di livello. Per le luci scolpite nel fondo di un vaso o recipiente qualunque; siccome tutti i punti di queste luci sono egualmente distanti dalla superficie di livello, così questa loro comune distanza si è quella, che l'altezza media a cui è dovuta la velocità dell'efflusso ne rappresenta. Ma le bocche che servir debbono agli usi dell'agricoltura, o delle arti, voglio dire alle derivazioni, sono d'ordinario scolpite nelle sponde de' canali, o recipienti qualunque, e quindi hanno i loro elementi a diverse profondità. Per queste luci adunque si chiama *altezza media* quella, che se fosse comune a tutti gli elementi della luce, darebbe la stessa portata che danno i diversi elementi come sono ad altezze differenti.

Premesse queste nozioni, sia ABC (*fig.* 1. *tav.* 5.) una luce verticale di figura qualunque; rappresenti HL il livello dell'acqua, e suppongasi la luce stessa simmetrica attorno la AD. Si prolunghi questa linea fino ad incontrare il livello dell'acqua nel punto O. Ricorderemo fin d'ora, che la distanza OA si chiama il *battente* della luce, e che alla base BC si dà il nome di *soglia*.

Posto pertanto $OA = h$; $AD = a$; $AP = x$; e $PM = PM' = y$; sarà $Pp = dx$, e l'area dell'elemento $Mmm'M' = 2y\,dx$. Per questo l'altezza media è $OP = h + x$; e perciò la sua portata, nell'unità di tempo, sarà $= 2y\,dx \sqrt{[2g(h+x)]}$ (5). Essendo poi H l'altezza media cercata, se chiameremo f l'area della luce ABC, avremo la portata di questa espressa da $f\sqrt{(2gH)}$. Ma sì fatta portata debb'essere eguale alla somma delle portate degli elementi della luce, o sia a $\int 2y\,dx \sqrt{[2g(h+x)]}$; avremo dunque $f\sqrt{(2gH)} = \int 2y\,dx\sqrt{[2g(h+x)]}$, e perciò

$$\text{(I)} \ldots\ldots f^2 H = \left\{\int 2y\,dx \sqrt{[(h+x)]}\right\}^2,$$

formola questa atta a determinare l'altezza media dovuta alla velocità dell'efflusso, nota che sia la figura della luce, siccome vedremo nelle seguenti applicazioni.

7. *Applicazione I.* Sia data una luce rettangolare, della quale a rappresenti l'altezza, ed l la larghezza; avremo $f=al$, $2y=l$, e perciò l'equazione (I) diverrà $a^2H=[\int dx\sqrt{(h+x)}]^2$. Esteso quest'integrale da $x=0$ fino ad $x=a$, si avrà $\int dx\sqrt{(h+x)}=\frac{2}{3}[(h+a)^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}]$, e però

$$(A) \; \ldots\ldots \; H=\frac{4}{9a^2}\Big[(h+a)^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}\Big]^2.$$

8. *Corollario.* Essendo sparita dal calcolo la larghezza l della luce, vorrà dire che la formola (A) appartiene anche ad una luce quadrata, essendo indifferente, pel valore di H, qualunque sia cotesta larghezza.

9. *Applicazione II.* Suppongasi ora che la luce proposta sia un quadrato, collocato siccome lo mostra la figura seconda; l'altezza media per questa luce si determina nel modo seguente.

S'immagini la luce stessa siccome composta di due luci triangolari ABD, BCD, delle quali la prima avrà per battente la $OA=h$, la seconda avrà $ON=h'$. Dicasi $2a$ la diagonale BD di questo quadrato, sarà il suo lato $AD=a\sqrt{2}$, e l'ampiezza $f=2a^2$. Ciò posto è chiaro, che la portata Q di questa luce sarà data da $Q=2a^2\sqrt{(2gH)}$ (5).

Dicasi ora q la portata della luce triangolare ABD, e q' quella della luce BCD, si avrà $q=\int 2ydx\sqrt{[2g(h+x)]}$; $q'=\int 2ydx\sqrt{[2g(h'+x)]}$ (6). Nella prima di codeste espressioni dovrà porsi $y=x$, nella seconda $y=a-x$; ed in ambedue, gl'integrali dovranno estendersi da $x=0$, sino ad $x=a$. Avremo per tal modo

$$(1) \; \ldots\ldots \; q=\frac{4}{15}\sqrt{2g}\Big[(h+a)^{\frac{3}{2}}(3a-2h)+2h^{\frac{5}{2}}\Big],$$

$$(2) \; \ldots\ldots \; q'=\frac{4}{15}\sqrt{2g}\Big[2(h'+a)^{\frac{5}{2}}-(2h'+5a)h'^{\frac{3}{2}}\Big];$$

e siccome $h'=h+a$, così sarà anche

$$q'=\frac{4}{15}\sqrt{2g}\Big[2(h+2a)^{\frac{5}{2}}-(2h+7a)(h+a)^{\frac{3}{2}}\Big].$$

D'altronde poi abbiamo $Q=q+q'$; sarà dunque

$$2a^2\sqrt{(2gH)}=\frac{4}{15}\sqrt{2g}\Big[(h+a)^{\frac{3}{2}}(3a-2h)+2h^{\frac{5}{2}}+2(h+2a)^{\frac{5}{2}}-(2h+7a)(h+a)^{\frac{3}{2}}\Big],$$

e però

$$(B) \ldots\ldots \quad H = \frac{16}{225a^4}\Big[(h+2a)^{\frac{5}{2}} - 2(h+a)^{\frac{5}{2}} + h^{\frac{5}{2}}\Big]^2.$$

10. *Corollario*. Per una luce triangolare colla punta volta in su, sarà

$$(C) \ldots\ldots \quad H = \frac{16}{225a^4}\Big[(3a-2h)(h+a)^{\frac{3}{2}} + 2h^{\frac{5}{2}}\Big]^2.$$

E per la stessa luce capovolta

$$(D) \ldots\ldots \quad H = \frac{16}{225a^4}\Big[2(h+a)^{\frac{5}{2}} - (2h+5a)h^{\frac{3}{2}}\Big]^2.$$

In fatti posto nelle equazioni (1), (2) del numero precedente, in luogo di q, q' l' espressione $a^2\sqrt{2gH}$, risultano i valori di H testè indicati, conservando però la stessa lettera h, onde rappresentare in ambedue i casi, il battente della luce.

11. *Applicazione III.* Sia finalmente circolare, la luce proposta. L'altezza media si determinerà al solito colla formola (I) opportunamente integrata. Ma poichè l'integrazione di quella formola non è, in questo caso, eseguibile in numero finito di termini, e la serie che ne risulta è più o meno convergente secondo il metodo che si tiene nell' eseguirla, così noi seguiremo l' orme del signor Bossut, per avere una serie convergentissima.

Ritenute le denominazioni dell' art. 6., chiamo r il raggio CM della luce (*fig.* 3. *tav.* 5.), ed nr la profondità del suo centro sotto la superficie di livello; sarà $nr = h + r$, e però $h = r(n-1)$. Dicasi ora l' angolo MCA $= z$, si avrà $x = r - r\,cos.\,z$; $y = r\,sen.\,z$; $h + x = nr - r\,cos.\,z$; $dx = rdz\,sen.\,z$. I quali valori, sostituiti nella predetta formola (I), ci danno $f^2 H = [\int 2r^2 dz\,sen.^2 z\,\sqrt{(nr - r\,cos.\,z)}]^2$: ma $f = \pi r^2$; dunque $\pi^2 H = r[\int 2dz(1 - cos.^2 z)\sqrt{(n - cos.\,z)}]^2$. Si sviluppi ora in serie il radicale $\sqrt{(n - cos.\,z)}$, e si avrà

$$\sqrt{(n - cos.\,z)} = n^{\frac{1}{2}} - \frac{cos.\,z}{2n^{\frac{1}{2}}} - \frac{cos.^2 z}{8n^{\frac{3}{2}}} - \frac{cos.^3 z}{16n^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\,cos.^4 z}{128n^{\frac{7}{2}}} - \text{ec.}$$

e quindi $\int 2dz(1 - cos.^2 z)\sqrt{(n - cos.\,z)} =$

$$\int 2dz \left\{ \begin{array}{l} n^{\frac{1}{2}} - \dfrac{cos.\,z}{2n^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{cos.^2 z}{8n^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{cos.^3 z}{16n^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{5\,cos.^4 z}{128n^{\frac{7}{2}}} - \text{ec.} \\ -n^{\frac{1}{2}}cos.^2 z + \dfrac{cos.^3 z}{2n^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{cos.^4 z}{8n^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{cos.^5 z}{16n^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{5\,cos.^6 z}{128n^{\frac{7}{2}}} + \text{ec.} \end{array} \right\}.$$

Possiamo ora eliminare da cotesta espressione le diverse potenze di $cos.\,z$, introducendovi invece i coseni degli archi multipli. Infatti

abbiamo dalla trigonometria che $\cos.^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2z$; $\cos.^3 z = \frac{3}{4}\cos. z + \frac{1}{4}\cos. 3z$; $\cos.^4 z = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos. 2z + \frac{1}{8}\cos. 4z$; $\cos.^5 z = \frac{5}{8}\cos. z + \frac{5}{16}\cos. 3z + \frac{1}{16}\cos. 5z$; $\cos.^6 z = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos. 2z + \frac{3}{16}\cos. 4z + \frac{1}{32}\cos. 6z$; ec., se dunque sostituiremo questi valori di $\cos.^2 z$, $\cos.^3 z$ ec. nell'espressione precedente, essa si trasmuterà in un'altra contenente $\cos. z$, $\cos. 2z$, $\cos. 3z$ ec. Si osservi inoltre, che que' termini cui ora contengono sì fatti coseni, ad integrazione eseguita conterranno $sen. z$, $sen. 2z$, $sen. 3z$, ec.; e poichè una tale integrazione debbe estendersi da $x = 0$ sino ad $x = 2r$, o sia da $z = 0$ sino a $z = \pi$, così i termini affetti da $sen. z$, $sen. 2z$, $sen. 3z$, ec. spariranno dal calcolo, essendo nulli in ciascuno de' predetti limiti. Di qui risulta palesamente, che potremo fin d'ora trascurare i termini contenenti $\cos. z$, $\cos. 2z$, $\cos. 3z$, ec. e fare quindi $\cos. z = 0$, $\cos.^2 z = \frac{1}{2}$, $\cos.^3 z = 0$, $\cos.^4 z = \frac{3}{8}$, $\cos.^5 z = 0$, $\cos.^6 z = \frac{5}{16}$, ec.; per cui si avrà $\int 2dz(1 - \cos.^2 z)\sqrt{(n - \cos. z)} = \int 2dz\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{64 n^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{2048 n^{\frac{5}{2}}} - \text{ec.}\right) = n^{\frac{1}{2}}\int dz \left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{ec.}\right)$. Estendendo l'integrale entro i limiti anzidetti, risulterà $\int 2dz(1 - \cos.^2 z)\sqrt{(n - \cos. z)} = \pi n^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{ec.}\right)$, e però

$$\text{(E)} \ldots\ldots\ H = nr\left[1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{ec.}\right] \ (^*).$$

12. *Corollario*. Esaminiamo ora il caso, nel quale la bocca di derivazione sia senza battente; supponiamo cioè che la superficie HL dell'acqua, rada il lembo superiore della luce. Più semplice sarà in questo caso l'espressione dell'altezza media dovuta alla velocità dell'efflusso, e risulterà immediatamente dalle espressioni precedenti, fatto $h = 0$. Se non che per la luce circolare dovrà porsi $h = 0$ nella formola generale (I), giacchè questa per sì fatto valore di h; addiviene integrabile in numero finito di termini.

(*) Nell'Idrodinamica di Bossut Tom. I. §. 223. edizione del 1786. leggesi $\left(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \text{ec.}\right)$, lo che non può essere che un errore di stampa, mentre dall'art. precedente, ove egli determina la portata, risulta per H il valore testè dimostrato. Fa meraviglia però che lo stesso errore si trovi ancora nell'edizione del IV. anno della repubblica alla pag. 315. §. 245.; e che il sig. Navier nella nota alla pag. 319. del Tom. I. di Belidor, lo abbia copiato interamente senza avvedersene, e senza conoscere un errore che salta agli occhi di chicchessia.

Posto pertanto $h = 0$ nella formola (A) risulterà

$$(A') \ldots\ldots\ldots H = \frac{4}{9} a,$$

altezza media di una luce rettangolare, o quadrata, avente la sua soglia orizzontale.

Per la luce quadrata avente il diametro verticale, si farà $h = 0$ nella formola (B), e si avrà

$$(B') \ldots\ldots\ldots H = \frac{64}{225}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)^2 a.$$

Per la luce triangolare colla punta volta in su, la formola (C) ne darà

$$(C') \ldots\ldots\ldots H = \frac{16}{25} a,$$

e per la stessa luce capovolta, la formola (D) ci dà

$$(D') \ldots\ldots\ldots H = \frac{64}{225} a.$$

Finalmente, per la luce circolare la formola (I) diverrà $\pi^2 r^4 H = \left[\int 2y\,dx \sqrt{(x)}\right]^2$, in cui dovrà porsi $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$. Fatta questa sostituzione si troverà $\int 2y\,dx \sqrt{x} = \int 2x\,dx \sqrt{(2r - x)}$, la quale integrata ci dà $\int 2y\,dx \sqrt{(x)} = cost. - \frac{4}{3} 2r (2r - x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5} (2r - x)^{\frac{5}{2}}$. Esteso quest' integrale da $x = 0$ sino ad $x = 2r$, risulterà $\int 2y\,dx \sqrt{(x)} = \frac{8}{15} (2r)^{\frac{5}{2}}$, e però $\pi^2 r^4 H = \frac{64}{225} (2r)^5$. Sarà dunque

$$(E') \ldots\ldots\ldots H = \frac{1024}{225} \cdot \frac{2r}{\pi^2}.$$

23. *Scolio*. Allorchè il battente della luce ha un valore considerevole, l' altezza media differisce così poco dalla profondità del centro della luce sotto la superficie di livello, che nella pratica può calcolarsi quest' ultima in luogo della prima.

Infatti la formola (E) ne somministra una prova. Imperocchè, nel caso del quale si tratta, il valore di n è un numero grandissimo, e perciò piccolissima la quantità $\frac{1}{n}$, e molto più le sue potenze; dunque saranno trascurabili que' termini dell' espressione (E) che contengono sì fatte potenze, e però potrà farsi

$$(1) \ldots\ldots\ldots H = nr.$$

Ma se il battente non è molto grande, si dovrà della formola (E) calcolare almeno i due primi termini della serie, e fare

$$(2) \ldots\ldots\ldots H = nr\left(1 - \frac{1}{32n^2}\right)^2.$$

14. **Conosciuta pertanto l'altezza media H a cui è dovuta la velocità dell'efflusso, la quantità d'acqua Q, che da ciascuna luce f si deriva, verrà calcolata mercè la formola (5)**

$$Q = f\sqrt{(2gH)}.$$

Se non che, confrontando i risultamenti di questa equazione con quelli che si ottengono dalla sperienza, s'incontrano notabilissime differenze, le quali ci avvisano che una tal formola non può servire ai bisogni della pratica, se prima non venga modificata e corretta.

Le sperienze da diversi Autori istituite sull'efflusso dell'acqua da' vasi perforati, o nel fondo, o ne' lati, hanno scoperto, che la vena fluida al sortir dal pertugio soffre un notabile restringimento, per cui la quantità d'acqua riesce minore di quel che sarebbe se un tale fenomeno non avesse luogo. E questo è appunto il motivo pel quale la formola precedente si allontana dai risultamenti della sperienza.

Veniamo ora a dire, in che consista cotesto fenomeno, e quale modificazione provar debbe la nostra formola, onde possa rappresentare con tutta la possibile precisione i risultamenti della sperienza, e servir poscia nella pratica al calcolo delle derivazioni.

Della contrazione della vena.

15. **Il Newton fu il primo ad accorgersi, che sortendo da un dato orificio, un fluido qualunque contenuto in un recipiente, i diversi suoi filamenti si presentano all'orificio stesso con una direzione fra loro convergente, la quale in virtù dell'inerzia si mantiene anche al di là del foro per un tratto come che brevissimo, e produce una diminuzione di grossezza nella vena, alla quale si dà il nome di *contrazione*.**

La vena si contrae più o meno, secondo il diverso grado di convergenza col quale i filamenti fluidi si presentano all'orificio, di modo che può togliersi affatto qualunque contrazione costruendo l'orifizio dilatato in modo che presenti una maggiore apertura all'interno, che non all'esterno del recipiente. La maggiore o minor contrazione della vena dipende ancora dalla configurazione dell'orificio, dalla grossezza della parete ond'è scolpito, e da altre circostanze cui troppo sarebbe l'annoverare. Per questo motivo la soluzione del problema in cui si cercasse generalmente il rapporto fra l'area dell'orificio, e quella della vena contratta, riesce di una difficoltà insuperabile, e solo può essere in qualche modo accessibile, o per via

di acurati sperimenti; allorchè l'orificio sia scolpito in lastra sottile.

Tre sono i modi ne' quali possono istituirsi coteati sperimenti; 1.° misurando con un compasso od altro opportuno strumento il diametro della vena contratta, e paragonandolo a quello della luce; 2.° misurando il tempo che il fluido impiega a discendere da una data altezza del recipiente, e confrontandolo con quello che impiegarebbe se la contrazione non avesse luogo; 3.° misurando la quantità d'acqua che sgorga in un dato tempo, e confrontandola con quella che sgorgherebbe se la contrazione non avesse luogo. Vedremo quale di questi modi sia da preferirsi.

16. Il primo è stato adoperato da Newton, da Borda, e da Bossut. Newton fece sortir l'acqua da un foro del diametro di sedici millimetri circa, e trovò che questo diametro è a quello della vena contratta come 25 : 21; starà dunque l'area del primo a quella della seconda come 625 : 441, o sia come 1 : 0,7056 (*).

Il sig. Borda, all'intendimento di verificare questo risultamento di Newton, fece sortir l'acqua da un foro del diametro di metri 0,0338; e trovò che l'area dell'orificio è a quella della vena contratta nel rapporto di 154$\frac{2}{3}$: 100, o sia di 1 : 0,6467 (**).

Il sig. Bossut, con otto sperienze nelle quali il diametro della luce variava da m.i 0,0135 sino a m.i 0,0812, trovò che l'area della luce è a quella della vena contratta nel rapporto di 150 : 100, o sia di 1 : 0,6667 (***).

Sono dunque discordi fra loro i risultamenti di quelle sperienze nelle quali si misura il diametro della vena contratta, con qualche strumento. Il sig. Borda attribuisce alla picciolezza del foro adoperato da Newton, la differenza che passa fra loro risultamenti; imperocchè essendo l'attrito nel foro più piccolo, maggiore di quello abbia luogo nel foro più grande, sarà altresì maggiore la forza ritardatrice di que' filamenti fluidi che muovonsi in vicinanza del foro medesimo, e però minore la contrazione della vena. Aggiungasi ancora la difficoltà di misurare esattamente il diametro della vena, e quindi la facilità somma di errare, massime in eccesso; infatti li signori Borda e Bossut asseriscono concordemente, che la vena contratta prodotta da un orificio posto verticalmente, ha il diametro orizzontale sempre minore del verticale; dunque prendendo fra questi diametri una misura media, è sempre dubbio di calcolare un diametro maggiore del giusto, e di attribuire alla vena contratta un'ampiezza maggior della vera.

(*) *Principia Mathem.* prop. 36. lib. 2.
(**) *Histoire de l'Acad. des Scien.* 1766. pag. 587.
(***) *Hydrod.* T. 2. pag. 13. edit. de l'an IV, de la République.

17. Indotto da simili considerazioni il sig. Borda, si determinò di far uso del secondo modo di sperimentare, che è pur quello di che parla Daniele Bernoulli nella sua idrodinamica alla pag. 79.

Fece egli adunque sortire da un orificio del diametro di m.i 0,0318 una quantità d'acqua capace di far discendere la superficie di livello nel recipiente, per lo spazio verticale di m.i 0,1083, e misurò con un pendolo a mezzi secondi la durata dell'efflusso; confrontò poscia questo tempo con quello che risulta dalla teoria, e il rapporto fra questi due tempi gli faceva conoscere quello dell'ampiezza dell'orificio alla sezione della vena contratta. Il risultamento di questa sperienza, fu, che il rapporto cercato è quello di 143 : 89 $\frac{1}{3}$, o sia di 1 : 0,6247 (*).

Le più recenti sperienze istituite a questo oggetto, sono quelle che il sig. Hachette ha inserite in una sua memoria sull'efflusso dell'acqua da fori scolpiti in lastra sottile, della quale si legge un rapporto all'Istituto delle Scienze di Parigi, dei signori Ampère, Girard e Poisson, nell'opera periodica *Annales de chimie* ec. Fevrier 1816. pag. 203.

Il sig. Hachette, seguendo il metodo di Borda, fece 28 sperienze nelle quali i diametri degli orifici variarono da uno sino a 41 millimetri. Il risultamento di queste sperienze fu che la minor contrazione corrispose al diametro più piccolo, ed il rapporto fra l'area della luce e quella della vena contratta risultò di 1 : 0,78. Per i diametri maggiori di 10 millimetri, la contrazione divenne pressochè costante, ed il rapporto fra l'ampiezza dell'orificio e quella della vena contratta è compresa tra 1 : 0,60 ed 1 : 0,63.

Quantunque questo secondo modo di sperimentare sia indipendente da qualunque misura meccanica, pur tuttavia non so se possa godere di tutta la confidenza. È assai delicato l'osservazione dell'abbassamento dell'acqua, e del tempo che s'impiega a produrlo; ed ogni piccolo abbaglio che vi si prenda può fare non lieve divario nel calcolo della contrazione. Ciò non pertanto vedremo, che i risultamenti del sig. Borda e del sig. Hachette sono meno lontani de' precedenti, dal vero risultamento.

18. Più spedito, ed insieme più sicuro secondo me, è il terzo modo di sperimentare. Il sig. Michelotti Francesco Domenico con una lunga serie di accurate sperienze di questo genere, ha cercato di determinare il rapporto fra l'area della luce e quella della vena contratta. Le luci che servirono in questi sperimenti erano quadrate e circolari; tanto i lati che i diametri di coteste luci variarono da

(*) *Histoire de l'Acad.* ec. 1766. pag. 588.

metri [illegible] fino a metri 0,0812. Variava pur anche la profondità del centro della luce sotto la superficie del recipiente, essendo la minore di circa metri 2, e la maggiore di metri 7. Il rapporto da lui trovato fra l'area della luce e quella della vena contratta è quello di 324 : 199, o sia di 1 : 0,6142 (*).

Il sig. Bossut nella citata sua idrodinamica ci dà una bella serie di sperienze, atte allo scopo di che si ragiona, sebbene da lui istituite ad oggetto diverso. Ciò non pertanto volendo egli dimostrare all'art. 498, che l'erogazione cui si ottiene dalla sperienza (e che nel progresso chiameremo anche noi erogazione effettiva), non è uguale alla teorica; prende ad esempio uno de' suoi sperimenti, e fa vedere che la prima sta alla seconda presso a poco come 5 : 8; soggiunge poscia all'art. 502, che l'effetto della contrazione è quello mai sempre di diminuire l'erogazione teorica nel rapporto di 8 : 5, o sia di 1 : 0,625. Dunque è questo secondo lui il vero rapporto fra l'area della luce e quella della vena contratta.

Poco fra loro concordi sono cotesti risultamenti. Nè farà meraviglia a chi consideri, che il sig. Bossut dedusse il suo risultamento da una sola sperienza. Quello poi di Michelotti, è dedotto dalle sole sperienze fatte con luci quadrate di metri 0,0812 di lato, e sebbene coincida a un di presso colla misura fatta nelle vene delle luci circolari al luogo della maggior contrazione, lascia non pertanto sperare, che possa ottenere maggior precisione. Vedremo però, che cotesti risultamenti di Michelotti e di Bossut, sono poco lontani dal vero risultamento.

19. All'oggetto adunque di determinare, quanto che sia, il vero rapporto fra l'area della luce e quella della vena contratta, ho preso a calcolare con tutta la possibile diligenza ed esattezza, 48 sperienze istituite da diversi autori, nelle quali sono così variate le circostanze dell'efflusso che poco rimane a desiderare per una maggior precisione. Di queste sperienze 13 sono di Mariotte, 24 di Michelotti, ed 11 di Bossut. Eccone, nelle tre tavole seguenti, i risultamenti per me ottenuti.

(*) *Sperimenti Idraulici*. T. I. Capo VI. §§. 68 e 77.

TAVOLA I.

Contenente i risultamenti delle diverse sperienze di Mariotte, sull'efflusso dell'acqua da piccoli fori (*).

Numero delle sperienze.	Indicazione delle pagine dell'opera di Mariotte.	Diametro degli orificj.		Carico sul centro degli orificj.		Erogazione effettive dedotte dalle sperienze.		Rapporto fra l'erogazione effettiva, e la teorica.
		in linee.	in metri.	in poll. ed in linee.	in metri.	Secondo le antiche misure.	in metri cubi al secondo.	
				lin.				
1	222	12	0,02707	7	0,01579	15 pinte $\frac{3}{8}$ del peso di lib. 1 : 15 : 1, in 60''	0,0002125	0,6800
2	241	12	0,02707	8	0,01805	un piede cubo, in 150''	0,000228515	0,6875
3	229	6	0,01354	7	0,01579	5 pinte $\frac{3}{4}$ in 60'' (15 demi-septiers) . .	0,000059525	0,7476
4	245	6	0,01354	39	0,087977	8 pinte $\frac{6}{7}$ del peso di lib. 1 : 15 : 1, in 60''	0,00014059	0,7459
				poll.				
5	262	6	0,01354	66	1,7866	14 pinte, in 25'' (del peso di lib. 2)	0,0005961	0,6998
6	254	6	0,01354	148	4,00635	14 pinte, in 15'', 5 (del peso di lib. 2)	0,0008[illegible]45	0,6934
7	265	6	0,01354	291	7,8774	14 pinte, in 12'', 5 (del peso di lib. 2)	0,0010968	0,6195
8	255	6	0,01354	293	[illegible],9515	14 pinte, in 11'', 125 (del peso di lib. 2)	0,0012324	0,6934
9	262	3	0,00677	66	1,7866	14 pinte, in 93'' (del peso di lib. 2)	0,00014742	0,6925
10	254	3	0,[illegible]0677	148	4,00635	14 pinte, in 61'', 5 (del peso di lib. 2)	0,00022293	0,6991
11	245	3	0,00677	156	4,2229	14 pinte, in 60'' (del peso di lib. 2)	0,0002285	0,698[illegible]
12	265	3	0,00677	291	7,8774	14 pinte, in 44'', 5 (del peso di lib. 2)	0,0003081	0,6939
13	255	3	0,00677	293	7,9515	14 pinte, in 44'', 75 (del peso di lib. 2)	0,00030637	0,6895

(*) Onde ognuno possa riscontrare le piccole differenze che si trovano in questa mia tavola, posta al confronto di quella che il sig. Navier ha calcolata nella nota alla pag. 235 di Belidor, indicherò le tracce del calcolo mio. In primo luogo per ridurre le antiche misure di Parigi a misura metrica, mi sono servito del rapporto 0,3248394 fra il metro ed il piede di Parigi, il quale sta registrato alla fine del trattato sull'uso della tavola parabolica del padre De-Regi, edizione seconda; ed anche nel supplomento al primo tomo della Fisica di Biot. In secondo luogo ho cercato la corrispondenza fra la misura metrica e le pinte delle quali ha fatto uso Mariotte ne' suoi sperimenti. Di queste pinte, altre erano del peso di libbre 2 meno sette grossi, ed altro di libbre 2 esattamente. Essendo la libbra divisa in sedici once, e l'oncia in otto grossi, la prima sorta di pinte peserà libbre 1 : 15 : 1. Risulta poi dal rapporto rammentovato fra il piede di Parigi ed il metro, che un piede cubo corrisponde a metri cubi 0,03427726. Ma un piede cubo di acqua pesa libbre 70; dunque una pinta del peso di lib. 1 : 15 : 1 equivarrà a metri cubi 0,0009524; ed una pinta del peso di lib. 2, equivarrà a metri cubi 0,0009793. Chiamato poi k il rapporto fra l'erogazione effettiva e la teorica, questo si determinerà mercè l'equazione $Q = k\pi r^2 \sqrt{(2gH)}$ (14). Per le prime quattro sperienze il valore di n, contenuto nell'espressione di H, non è molto grande, non oltrepassando il numero 13; ma nelle altre addiviene grandissimo, giungendo perfino ad essere = 1172. Dunque per le prime il valore di H ci vien dato dall'equazione (2) dell'art. 13; e per le altre dall'equazione (1) del medesimo numero. La differenza poi che si riscontra nell'enumerazione delle pagine dell'opera di Mariotte (*Traité du mouvement des eaux*) proviene dall'aver io fatto uso dell'edizione del 1700, mentre Navier cita quella del 1787, la quale non potei ritrovare.

TAVOLA II.

Contenente i risultamenti di alcune sperienze di Michelotti, sull' efflusso dell' acqua da luci quadrate o circolari (*).

Numero delle sperienze.	Indicazione delle pagine nell' opera di Michelotti.	Diametro o lato degli orificj in pollici di Parigi.	Area degli orificj dedotta dalla correzione del Cap. VI. pag. 81.		Profondità del centro della luce.		Erogazione effettiva dedotta dalla sperienze.		Rapporto fra l' erogazione effettiva, e la teorica.
			in poll. qua. di Parigi.	in metri quadrati.	in piedi di Parigi.	in metri.	in piedi cubi di Parigi.	in metri cubi al 1'.	
		lato.							
1	21	3	9:1:2:6	0,000667	8: 7: 4: 3 $\frac{3}{5}$	2,148228	463,604167, in 10'	0,026488	0,6118
2	27	3	9:0:1:8	0,00660	11: 8: 1: 6	3,793176	516,788194, in 8' 30'	0,034733	0,6102
3	34	3	9:0:3:2	0,006611	21: 8: 3: 6	7,046100	415,437500, in 5'	0,047467	0,6108
4	42	2	4:0:5:8	0,00296	8: 7: 8: 0	2,156575	329,807956, in 13'	0,012561	0,6525
5	49	2	4:0:0:8	0,0029345	11: 5: 1: 4	3,711591	423,463342, in 15'	0,018128	0,6442
6	52	2	4:0:3:6:8	0,002949	21:3:3:7:9	6,965200	385,333333, in 10'	0,022014	0,6387
7	57	1.	1:0:0:0	0,00073278	6: 9: 14-0	2,194922	158,548611, in 30'	0,003018	0,6277
8	59	1	1:0:0:0	0,00073278	11:10:8:1:9	3,862308	163,791667, in 24'	0,0038988	0,6113
9	62	1	1:0:0:0	0,00073278	21: 6: 1: 0	6,986300	562,947917, in 60'	0,005360	0,6249
10	43	2	4:0:0:0	0,002931	6: 8:10: 0	2,188154	606,097222, in 30'	0,011542	0,6011
11	48	2	4:0:0:0	0,002931	11: 8: 0: 8	3,791297	551,840278, in 20'	0,015192	0,6011
12	53	2	4:0:0:0	0,002931	21:8:9:8:5	7,060072	544,885513, in 15'	0,020752	0,6017
13	57	1	1:0:0:0	0,00073278	6: 8:11: 3	2,190410	306,059092, in 60'	0,002914	0,6067
14	60	1	1:0:0:0	0,00073278	11: 9: 8: 0	3,834910	338,163066, in 50'	0,003841	0,6044
15	63	1	1:0:0:0	0,00073278	21: 8: 8: 9	7,060181	363,758809, in 40'	0,005195	0,6025
		diamet.							
16	24	3	7:0:5:6:10	0,005158.	6: 8: 4: 8	2,175748	542,878472, in 13'	0,020678	0,6137
17	29	3	7:0:5:6:10	0,005158	11: 8: 3: 3	3,801636	573,484375, in 12'	0,027302	0,6130
18	36	3	7:8:5:6:10	0,005158	21: 7:4:4:6	7,020986	521,303691, in 8'	0,037227	0,6150
19	45	2	5:1:5:3	0,002286	6:8:5:1:4	2,204697	488,690972, in 30'	0,009306	0,6191
20	50	2	3:1:5:3	0,002286	11:8:8:2:9	3,808357	589,539770, in 28'	0,012028	0,6088
21	55	2	5:1:3:3	0,002288	21:10:10: 8	7,118013	575,491191, in 20'	0,016458	0,6087
22	59	1	0:9:5:1: 2	0,0005755	6:10: 8:11	2,235339	247,355967, in 60'	0,002355	0,6181
23	81	1	0:9:5:1: 2	0,0005765	11: 8:11:10	3,816487	324,121592, in 60'	0,003086	0,6199
24	65	1	0:9:5:1: 2	0,0005755	22: 0: 2: 6	7,152106	444,538182, in 60'	0,004255	0,6210

(*) Per tutte queste sperienze il valore di n è assai grande, e perciò H viene dato dall' equazione (1) dell' art. 13.

TAVOLA III.

Contenente i risultamenti di alcune esperienze di Bossut, sull' efflusso dell' acqua da luci circolari, rettangole e quadrate (*).

Numero delle sperienze.	Indicazione delle pagine dell' Idrodinamica.	Diametro degli orificj. in Piedi di Parigi.	Diametro degli orificj. in metri.	Profondità del centro della luce. in piedi di Parigi.	Profondità del centro della luce. in metri.	Erogazione effettiva dedotta dalla sperienza. in misura di Parigi.	Erogazione effettiva dedotta dalla sperienza. in metri cubi al 1''.	Rapporto fra l' erogazione effettiva, e la teorica.
				Sperienze con luci circolari.				
1	25	0:0:6	0,01354	11:8:10	3,81235	1926 pollici cubi, in 50''	0,000764	0,6141
2	26	0:1:0	0,02707	11:8:10	3,81235	13921 pollici cubi, in 90''	0,003068	0,6164
3	26	0:2:0	0,05414	11:8:10	3,81235	13021 pollici cubi, in 21''	0,012299	0,6178
4	28	0:0:6	0,01354	9:0:0	2,92355	1850 pollici cubi, in 55''	0,000667	0,6121
5	28	0:1:0	0,02707	9:0:0	2,92355	15558 pollici cubi, in 100''	0,002689	0,6170
6	29	0:0:6	0,01354	4:0:0	1,29936	1353 pollici cubi, in 60''	0,000447	0,6157
7	29	0:1:0	0,02707	4:0:0	1,29936	13591 pollici cubi, in 150''	0,001797	0,6183
8	29	0:1:0	0,02707	0:0:7	0,01579	1728 pollici cubi, in 165''	0,00020774	0,6654
				Sperienze con luci rettangole e quadrate.				
		Area della luce. in poll. quadrati.	Area della luce. in metri quadrati.					
9	26	$\frac{1}{4}$	0,000183	11:8:10	3,81235	2444 pollici cubi, in 50''	0,0009696	0,6127
10	26	1	0,000733	11:8:10	3,81235	13984 pollici cubi, in 71''	0,0039069	0,6163
11	26	4	0,002931	11:8:10	3,81235	13419 pollici cubi, in 17''	0,015698	0,6177

(*) Anche per queste sperienze il valore di H è quello dell' equazione (1) art. 13, giacchè il più piccolo valore di n è $=48$; ad eccezione però dell' esperienza n.° 8, nella quale essendo $n=\frac{7}{6}$, il valore di H vien dato dall' equazione (a) dell' articolo mentovato.

20. Esaminando ponderatamente queste tre tavole, di leggieri si scorge; 1.° che la contrazione della vena è piccolissima, quando è piccola la luce, od il carico d'acqua contro la medesima; 2.° che in parità di luce, al crescere dell'altezza dell'acqua nel recipiente, la contrazione ora cresce ed ora diminuisce, senza veruna legge; ed in parità d'altezza, succede altrettanto al variar della luce. Nè tampoco si ottiene lo stesso risultamento, ripetendo l'esperienza colla medesima luce, e colla stessa altezza; siccome ne fanno fede le sperienze del sig. Mengotti (*). Tutte queste variazioni però sono di poco momento, ove si prescinda da quelle che provengono dalla picciolezza della luce, e del carico d'acqua; e, giusta il parere del sig. Michelotti, si possono attribuire all'*effetto della diversa modificazione delle resistenze, nata dalla diversa figura, e posizione delle luci* (**).

21. Il sig. Navier (***) pretende di poter rappresentare tutte queste sperienze con una tavola nella quale il rapporto fra l'erogazione teorica e l'effettiva varia col solo variare dell'altezza dell'acqua sopra il centro della luce, e non riflete che un tale rapporto variar dovrebbe eziandio col variare dell'ampiezza della luce; egli dice, a cagion d'esempio, che quando l'altezza dell'acqua sopra il centro della luce è 100 volte il diametro della medesima, il rapporto fra l'erogazione teorica e l'effettiva è 0,618; ma non ci dice poi quale sarebbe questo rapporto se mantenendosi la stessa profondità del centro variasse il diametro della luce. Già noi abbiamo osservato poc'anzi, che queste variazioni non seguono altrimenti una data legge, e quindi male per avventura si rappresenterebbero supponendo, siccome ha fatto il sig. Navier, che la contrazione diminuisca allo scemare dell'altezza dell'acqua.

22. Ma lasciando da parte tutte queste anomalie, le quali siccome dicemmo, dipendono da troppo varie cagioni, io sono d'avviso che nella pratica si possa prendere pel rapporto dell'erogazione teorica all'effettiva, un medio fra i risultamenti di quelle sperienze, le quali e per l'ampiezza delle luci, e per la profondità del loro centro sotto la superficie dell'acqua, hanno maggiore analogía colle derivazioni.

Prima di tutto ponno escludersi i risultamenti delle sperienze di Mariotte, perchè fatte con luci troppo piccole. Fra i risultamenti delle sperienze di Bossut, i quali presso a poco coincidono fra loro, è da mettersi a parte quello della sperienza 8, nella quale essendo la

(*) *Idraulica Fisica e sperimentale*. Parte seconda Tav. IV.
(**) *Sperimenti Idraulici*. Tom. I. pag. 73.
(***) V. *Belidor* ediz. del 1819. Nota (*ck*) pag. 285.

profondità del centro della luce assai piccola, piccola eziandio ne è la contrazione. E la ragione di ciò, è per se manifesta. Imperocchè essendo piccola la velocità colla quale i filamenti fluidi si presentano al lembo superiore della luce, piccola del pari sarà la forza atta a contrarli, e quindi disegnale la contrazione, per tutto il contorno dell'orificio. Fra le sperienze di Michelotti trascureremo le prime 9 perchè fatte con luci non iscolpite in lastra sottile; le altre quindici, e così quelle di Bossut, furon fatte con luci scolpite in lastre della grossezza di mezza linea, mentre la grossezza della lastra nelle prime nove era di 4 linee. Ben si vede però, da coteste sperienze, quant'abbia influsso la grossezza della lastra nel modificare l'erogazione, lo che già altrove è stato avvertito (15).

Ma intanto, il medio rapporto fra l'erogazione teorica e l'effettiva, dedotto dalle 25 summentovate sperienze, è 0,6125. Cotesto rapporto, senza scostarsi di molto da quello del sig. Michelotti (18), ha il dupplice vantaggio, d'essere compreso fra i limiti del sig. Hachette (17), e di appartenere ad esperienze nelle quali sono in ogni modo variati gli elementi che influiscono nella quantità dell'erogazione.

23. Sia adunque e l'area della vena contratta. Essendo questa, quella sezione per la quale ha effettivamente luogo l'erogazione, la formola dell'art. 14 debbe scambiarsi in quest'altra $Q = e\sqrt{(2gH)}$. Di qui ne segue, che l'erogazione teorica sta all'effettiva come $f:e$. Ma abbiamo veduto (22) che l'erogazione teorica sta all'effettiva come $1:0,6125$; starà dunque $f:e::1:0,6125$, e però sarà $e = 0,6125f$.

Dunque la vera formola, che servir debbe al calcolo delle derivazioni sarà

$$Q = 0,6125f\sqrt{(2gH)}.$$

24. Da tutto il sin qui detto facilmente si deduce, che sì fatta equazione non potrà adoperarsi nella pratica se non ne' casi ne' quali la luce f possa aversi siccome scolpita in lastra sottile, ed abbia un battente di gran lunga maggiore del suo diametro. Fuori di questi casi il rapporto fra l'erogazione teorica e l'effettiva non è più quello che in cotesta formola si considera. Avviene però fortunatamente, che in questa nostra Provincia, e così in quelle nelle quali non può farsi uso dell'unità di misura, le derivazioni si possono regolare in modo, che tali circostanze abbiano luogo. Infatti, essendo dell'interesse de' derivatarj, che le chiaviche siano molto sommerse sotto la superficie dell'acqua, potremo per tal modo procurare alla luce un grande battente, e sarà così adempita la seconda di quelle condizioni. Che poi la luce possa aversi siccome scolpita in lastra

sottile, ciò dipende dal modo con cui si scava il foro nel macigno. Questo foro non dee mai essere cilindrico, ma piuttosto dee costruirsi dilatato a tronco di cono, avendo presente, che la base minore di questo debb' essere l' orificio conceduto al derivatario, e dee porsi dalla parte del canale, o recipiente qualunque onde derivasi.

In parecchie delle nostre derivazioni ho io osservato che queste condizioni sono adempite; e che in quanto alla seconda essa è già universalmente abbracciata, essendo raro il trovare un battente minore di due o tre piedi, voglio dire di circa un metro. Comendevole poi ne è l' uso di contornare l' orificio con un cerchio di ferro, il quale presentando all' acqua un contorno bene affilato, procura che la contrazione della vena risulti più perfetta che sia possibile, e quindi più esatto il calcolo della derivazione.

È bensì vero che questa foggia di scavare le pareti della luce potrebbe accrescerne l' erogazione, potendo far l' ufficio di un tubo addizionale conico divergente: ma a tale effetto si richiederebbe che il macigno avesse una grossezza di due o tre diametri della luce, onde l' acqua potesse seguirne le pareti. D' ordinario si suole proporzionare la grossezza del macigno al diametro della luce che vi si vuol scolpire, sì che la prima guari non eccede la seconda, ed allora non potendo l' acqua seguire le pareti del macigno soffrirà contrazione, e l' uso della nostra formola sarà esatto quanto il può essere.

25. Se collo scolpire la luce nel macigno a tronco di cono, possiamo assicurarci che la contrazione abbia luogo a un dipresso, come in lastra sottile, potremo anche far sì che l' acqua sorta dall' orificio senza punto soffrir contrazione (15). In fatti basta collocare il macigno in modo in verso a quello cui dee porsi per avere la contrazione, e dilatare questa bocca in modo che la luce maggiore stia alla minore nel rapporto di 1 : 0,6125 all' incirca. Si verrà per tal modo a secondare quella convergenza colla quale i filamenti fluidi si presentano all' orificio, per cui fluirà l' acqua da cotesta luce a bocca piena. Allora le derivazioni si calcoleranno mercè la formola dell' art. 14, nè si avrà bisogno di ulteriori considerazioni.

Degli sfioratori, o scaricatori a fior d' acqua.

26. Si dà comunemente il nome di *sfioratori* a quelle luci rettangolari aperte nelle sponde de' canali, o de' fiumi, per le quali l' acqua sgorga senza battente.

Importa moltissimo nella pratica idrometria, il conoscere con quali mezzi debba calcolarsi l' erogazione di questi emissarj, i quali s' incontrano sì di frequente ne' canali navigabili, o presso qualche

edifizio idraulico. Sogliono d'ordioario cotesti sfioratori, collocarsi nelle sponde de' oanali, all'oggetto di mantenere costante l'altezza delle loro acque, se sono navigabili; od all'intendimento di sottrarre agli edificj idraulici quel soverchio di forza, che ne renderebbe imperfetta l'azione. Ad ogni modo però, servono essi a deprimere l'altezza delle piene, ed a togliere quegli inconvenienti che dalle medesime derivano.

Rappresentando al solito con g la gravità alla superficie della terra; chiameremo qui pure l, la larghezza della luce, a la sua altezza, e Q la quantità dell'erogazione, ad ogoi minuto secondo.

27. Il sig. Dubuat osservando ohe l'acqua prima di arrivare sulla soglia dell'emissario s'abbassa, disponendosi in una superficie curva, frattanto ohe il carico d'acqua è sempre il medesimo; ha cercato di determinare quanto sia cotesto abbassamento, e col sussidio delle proprie sperienze trova che corrisponde alla metà dell'intera carica. Sull'appoggio pertanto di cotesto risultamento, passa egli a determinare una formola atta a calcolare la portata dell'emissario, e prendendo per unità di misura lineare il pollice parigino, trova

$$Q = 11{,}2491\, la\sqrt{a} \ (*).$$

28. Il sig. Navier determina l'abbassamento dell'acqua sulla soglia dell'emissarie dietro il principio, noto in meocanica col nome di *conservazione delle forze vive*; e trova cotesto abbassamento $= 0{,}2753\,a$, molto minore, e fors'anche più verosimile, di quello trovato da Dubuat. Quindi colla scorta di sì fatto risultamento, e calcolando la contrazione della veoa giusta i principj dello stesso Dubuat, determina

$$Q = 1{,}8614\, la\sqrt{a} \ (**).$$

29. Il signor professore Venturoli attribueodo all'effetto della contrazione della vena, l'abbassamento in quistione, suppone che l'erogazione diminuisca nel rapporto di 8:5. Essendo poi per le luci rettangolari a fior d'acqua, l'altezza dovuta alla velocità dell'efflusso, li $\frac{4}{9}$ dell'altezza totale (12), calcola $Q = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}\, al\sqrt{(2ga)}$ (***). Posto quivi per g il valore che gli compete alla latitudine di Parigi, si avrà

$$Q = 1{,}8455\, la\sqrt{a};$$

prendendo per unità di misura lineare il metro. Lo stesso debbe intendersi della formola di Navier.

(*) *Principes d'hydr.* T. I. pag. 203, Paris 1786.
(**) V. *Belidor*. Nota (cm) T. I. pag. 298.
(***) *Elementi di Meccanica e d'Idraulica*, T. 2. pag. 86, Milano 1826.

30. Quantunque i risultamenti di coteste formole non siano molto discordi fra loro, nè colle sperienze di Dubuat, pur tuttavia son tali da lasciar luogo ad ulteriore perfezionamento.

Ho io tentato di ciò conseguire nel modo seguente. Qualunque siasi l' abbassamento dell' acqua sulla soglia dello scaricatore, e qualunque ne sia la cagione, certo è che l' erogazione sarà sempre minore di quella che si otterrebbe se l' acqua uscisse a tutt'altezza. Si supponga adunque, e si calcoli l' erogazione dello sfioratore nell' ipotesi che l' abbassamento dell' acqua, e la contrazione della vena non abbia luogo, nel qual caso certamente l' altezza dovuta alla velocità dell' efflusso è i $\frac{2}{3}$ dell' altezza totale. Chiamata pertanto Q′ l' erogazione in questa ipotesi, si avrà $Q' = \frac{2}{3}\, la\sqrt{(2ga)}$. Ciò posto si chiami p il rapporto fra l' erogazione effettiva Q e la teoria Q′; risulterà $p = \frac{Q}{Q'}$.

Abbiamo ora quattro sperienze del sig. Dubuat, dietro le quali si può determinare il valore di p (*). In fatti calcolando Q′ dietro i dati di queste sperienze, e raccogliendo da esse i valori di Q, l' equazione $p = \frac{Q}{Q'}$ ci darà il rapporto cercato. Per tal modo ho io trovato che il valore di p riesce presso a poco costante, a riserva di quello che dalla prima di quelle sperienze risulta, il quale è sensibilmente maggiore degli altri tre, in causa della piccolissima altezza dell' acqua sulla soglia dello scaricatore. Preso adunque un medio fra i tre valori di p, che più tra loro s' accordano, si avrà $p = 0,628$; e con questo la formola onde calcolare la portata degli emisarj a fior d' acqua, sarà $Q = 0,628 \cdot \frac{2}{3}\, la\sqrt{(2ga)}$, o sia

$$(F) \ldots\ldots Q = 0,419\, la\sqrt{(2ga)}.$$

Per uniformare questa formola alle due precedenti, sostituiremo per g il valore della gravità alla superficie della terra nella latitudine di Parigi, preso il metro per unità di misura lineare; risulterà quindi $Q = 1,8558\, la\sqrt{a}$.

31. Per mostrare poi finalmente l' accordo delle formole fin qui esposte colle sperienze di Dubuat sull' efflusso degli scaricatori a fior d' acqua, registreremo nella tavola seguente i dati, ed i risultamenti di sì fatte sperienze, ed insieme i risultamenti, che dalle medesime formole si ottengono; gli uni e gli altri espressi in misura metrica.

(*) V. Dubuat o. c. §§. 143, 410.

Tavola delle sperienze di Dubuat sugli scaricatori a fior d'acqua.

Numero delle sperienze.	Larghezza dello scaricatore.	Altezza o carico d'acqua sopra la soglia.	Erogazione dedotta dalla sperienza.	Erogazione calcolata colla formola di Dubuat.	Erogazione calcolata colla formola di Navier.	Erogazione calcolata colla formola di Venturoli.	Erogazione calcolata colla formola (F).
185	0,466957	0,045120	0,008569	0,008276	0,008330	0,008259	0,008319
186		0,081210	0,019924	0,020001	0,020112	0,019941	0,020053
187		[illegible]	0,035341	0,035223	0,035411	0,035109	0,035305
188		[illegible]	0,061699	0,061348	0,061696	0,061169	0,061611

Prima di Dubuat, il sig. Marchese Poleni sperimentò il moto dell'acqua per cotesti scaricatori, ma le sue sperienze non lasciano vedere quale ne sia l'erogazione effettiva. La portata degli emissarj che servirono in sì fatte sperienze, si deduce dallo sgorgo simultaneo di parecchi fori del diametro di metri 0,018 circa, i quali sotto un carico d'acqua di m.ⁱ 0,568469 alimentano l'emissario. Ciò non pertanto calcolata l'erogazione di ciascuno di cotesti fori mercè la formola dell'art. 28, e confrontata poscia co' risultamenti dell'equazione (F), si trova una sufficiente corrispondenza (*). Ben è vero però, che se si avessero nuove sperienze di questo genere, utilissima cosa sarebbe il confrontare cotesta formola con sì fatte sperienze; imperocchè con confronti quanto più si può, moltiplicati e variati, si viene sempre a capo di confermare, o correggere le formole idrometriche conosciute.

82. Fin qui lo sbocco degli emissarj si è supposto libero; ma non di rado avviene, che il pelo d'acqua del recipiente cui riceve le acque dello scaricatore, sia alcun poco più alto della soglia del medesimo, nel qual caso la formola (F) non è più atta a determinare l'erogazione.

Anche in cotesto caso però, la soluzione del problema è semplicissima. Si divida in due l'intera altezza dello scaricatore; la prima superiore al pelo del recipiente, e perciò libera, dicasi $= a'$; la seconda inferiore a cotesto pelo, e quindi rigurgitata, sarà $= a - a'$. Ritenuta poscia la larghezza dell'emissario $= l$, è palese che la

(*) *Raccolta d'Autori Italiani che trattano del moto dell'acque.* Tom. VI. Bologna 1823. pag. 29. e seg.

formola (F) ci farà conoscere l'erogazione della parte libera del medesimo, la quale sarà espressa da $0{,}419\, la'\sqrt{(2ga')}$. In quanto all'erogazione della porzione di emissario cui risente l'effetto del rigurgito, è da riflettere, che per essa l'acqua scorre con una velocità dovuta alla differenza a' dè due livelli, e si contrae al modo stesso di uno sbocco libero. Adunque la formola che ne determina la portata sarà $0{,}6125\; l(a-a')\sqrt{(2ga')}$. La somma di queste due erogazioni ne darà la portata dell'intero emissario soggetto a rigurgito, la quale perciò sarà espressa da

$$(G) \ldots\ldots Q = [0{,}6125\,a - 0{,}1935\,a']\,l\sqrt{(2ga')}.$$

33. Rimarrebbe ora il confronto delle sperienze per decidere se questa formola possa adoperarsi con tutta confidenza, e di queste io non conosco se non le citate del sig. Poleni, le quali come già dicemmo, non nè danno l'erogazione effettiva. Per tuttavia, calcolando l'erogazione di ciascuno de' fori alimentatori dell'emissario, siccome si è detto all'art. 31, si trova che la loro portata equivale a m.i c.i 0,0005 al minuto secondo; ora se lo scaricatore viene alimentato da tre di cotesti fori, la formola (F) ci dà Q = m.i c.i 0,0016 poco maggiore del triplo del risultamento precedente (*). Lo stesso calcolo ho io pur ripetuto per altre ancora di tali sperienze, ed ho sempre trovato consimili differenze.

Non debbo tacere però, che confrontando la formola (G) coll'unica sperienza di Dubuat sugli scaricatori soggetti a rigurgito, o come egli li chiama, non completi, s'incontra una differenza in senso contrario alle precedenti. L'erogazione effettiva dello scaricatore di Dubuat è di pollici cubi 3240, o siano m.i c.i 0,06427, e l'erogazione dedotta dalla formola (G) è di m.i c.i 0,05254 (**); la differenza è alcun poco maggiore che non nelle sperienze di Poleni: ma essa sola non basta per decidere se la formola sia inesatta. D'altronde poi le sperienze di Poleni non danno risultamenti molto fra loro discrepanti, perchè debbano aversi per sospetti quelli, che da cotesta formola si traggono. Solo è da desiderare, che nuove sperienze vengano istituite sopra cotesti scaricatori, dalle quali conseguiremo maggior certezza della formola, o avremo dati per correggerla, ove s'incontrassero notabili differenze.

E questo basti intorno alle bocche di derivazione. Passiamo ora a dir qualche cosa della misura delle acque correnti per gli alvei di corso equabile.

(*) *Raccolta d'autori* ec. Tom. VI. n.° XLIII. pag. 20.
(**) *Dubuat*, o. c. T. II. pag. 121.

Della velocità media dell' acqua negli alvei di corso equabile.

34. Se si eccettuano que' tratti di alveo che sono vicini all' origine, od allo sbocco, come pure quelli che trovansi all' incontro d' ostacoli cagionanti rigurgito. E se si eccettuano del pari le epoche del crescere e del calar delle piene, in ogni altro luogo e tempo il corso di un fiume perenne si mostra equabile e permanente. E di ciò l' esperienza ne porge sufficiente dimostrazione, *mostrando che nelle sezioni egualmente larghe, comechè in siti assai lontani fra loro, trovasi a un di presso la medesima altezza viva dell' acqua; onde ne' tratti più regolari, ancorchè assai lunghi, la superficie si osserva parallela o quasi parallela al fondo benchè inclinato all' orizzonte: anzi ancorchè alle sezioni più anguste ne vadano alternatamente succedendo delle altre alquanto più larghe per brevi tratti, pure si mantiene il detto parallelismo.* Così Eustachio Manfredi nelle sue annotazioni al capo IV. del trattato di Guglielmini sulla natura de' fiumi.

Se dunque possiamo riguardare siccome equabile il moto dell' acqua per gli alvei, verrà di molto appianata la strada onde determinarne la velocità. Se non che, esaminando il progresso delle velocità in una perpendicolare di una sezione qualunque, è agevole il conoscere che esse variano al variare della profondità de' diversi punti di questa medesima perpendicolare, sotto la superficie di livello. La legge con cui variano coteste velocità, viene chiamata la *scala della velocità*.

35. Il p. ab. Castelli fu il primo, che facendo dipendere la variazione della velocità ne' diversi punti di una stessa perpendicolare, dalla pressione dell' acqua sovrincombente, fece terminare la scala delle velocità ad una linea retta (*).

Non soddisfece al Guglielmini il principio del Castelli, ed avvisandosi che una tal variazione dovesse dipendere da quegli stessi principj onde varia la velocità dell' acqua che sgorga da un foro praticato nella parete di un vaso qualunque, ci diede per iscala delle velocità le ordinate di una parabola Apoloniana (**).

Conosciuta poi la scala delle velocità agevol cosa sarebbe il determinare la velocità media, e quindi la portata di ciascuna perpendicolare, e dell' intera sezione dell' alveo.

36. Da queste dottrine del Castelli e del Guglielmini, non viene in alcun modo calcolato l' effetto delle resistenze del fondo, e delle sponde; non che quello delle tortuosità. Il p. ab. Grandi s' adoperò

(*) *Misura delle acque correnti*, Lib. II. prop. 2.
(**) *Mesura aquarum fluentium*, Lib. IV. pag. 8.

onde modificare la regola del Guglielmini, sicchè in essa venga calcolato l'effetto di tali resistenze (*).

Supponendo Guglielmini spenta affatto la velocità cagionata dalla discesa, viene a colocare il vertice della parabola nella sommità della perpendicolare, o altezza viva della sezione; e quindi viene a supporre che l'alveo in superficie sia privo affatto di velocità. Che se cotesto vertice si verrà colocato al di sopra di cotesta sommità, per quanto importa l'altezza dell' origine dell' alveo; si verrà a supporre che la velocità superficiale di questo, sia quale sarebbe se le resistenze non esistessero. Ora non sempre potrà prescindersi dal calcolare la velocità alla superficie dell' acqua; mai poi potrà riguardarsi questa velocità, siccome prodotta dall' intera caduta dell' alveo.

Per togliere una via di mezzo, suggerì il p. Grandi di misurare con un galleggiante, od altro strumento qualunque, la velocità superficiale dell' acqua, e poscia determinare l' altezza a cui è dovuta tale velocità; aggiungendo quest' altezza all' altezza viva della sezione si ha quella ch' egli chiama *altezza dell' origine equivalente* dell' alveo, alla sommità della quale dee intendersi collocato il vertice della parabola. Il parametro poi di questa curva è il quadruplo della velocità che un grave acquista in un secondo di sua caduta libera.

36. Dietro a questi principj, facilmente si determina la velocità media in una sezione di un alveo qualunque, e quindi la sua portata. Sia BC (*tav. 5, fig. 4.*) la perpendicolare di questa sezione, BE la superficie dell' acqua, e CD il fondo dell' alveo. Misurata con un galleggiante la velocità dell' acqua in BE, se ne faccia il quadrato e si divida per il parametro poc' anzi indicato. Il quoto che se ne ottiene rappresenterà la AB, dalla quale risulta la AC, altezza dell' origine equivalente dell' alveo. Descritta ora la parabola AED, si rappresenti con MN la velocità media ricercata. Sarà BC . MN la quantità d' acqua che ad ogni minuto secondo passa per BC: ma questa quantità si esprime anche col trapezio parabolico BCDE; sarà dunque MN . BC = BCDE. D' altronde abbiamo $BCDE = \frac{2}{3} AC . CD - \frac{2}{3} AB . BE$; e poichè chiamato p il parametro della parabola AED, risulta $CD = \sqrt{(p . AC)}$; $BE = \sqrt{(p . AB)}$; così sarà $BCDE = \frac{2}{3}[(AC)^{\frac{3}{2}} - (AB)^{\frac{3}{2}}] p^{\frac{1}{2}}$, e però

$$MN = \frac{2}{3} . \frac{(AC)^{\frac{3}{2}} - (AB)^{\frac{3}{2}}}{BC} . p^{\frac{1}{2}}$$

Cotesta velocità moltiplicata poscia per l' area della sezione, ne

(*) *Del movimento delle acque*, Lib. II. Prop. 30.

darà la portata dell' alveo, giusta i principj di Guglielmini, è del padre Grandi.

87. Non ostante questa ingegnosissima correzione, che il p. Grandi soggiunse alla regola del Guglielmini, sì fatto modo di calcolare la velocità media negli alvei, non è troppo conforme alla natura del moto dell' acqua, che per essi scorre. Infatti attesa la resistenza dell' alveo, la velocità dell' acqua in una perpendicolare qualunque, non può crescere dalla superficie fino al fondo, siccome suppone la scala delle velocità rappresentata da una parabola. Si osserva invece, che la velocità sotto la superficie o si mantiene costante, o scema lentamente; ma poi decresce rapidamente nelle vicinanze del fondo (*). Non senza ragione adunque, gl' Idrometri, che vennero dopo, tentarono di indagare la scala delle velocità, e la velocità media, per una strada tutta diversa da quella praticata da quegli insigni Scrittori.

A tale intendimento furono immaginati diversi strumenti, co' quali si esplorava la velocità in molti punti d' una sezione, per poscia vedere di scoprire la legge di queste velocità. Ma o perchè cotesti strumenti riuscivano imperfetti, o perchè riesciva difficile il maneggiarli, non si è mai fino ad ora potuto ottenere l'intento.

88. In mezzo a tante difficoltà ed incertezze, gl' Idrometri, quasi abbandonando la prima ricerca, si sono dati a rintracciare la sola velocità media, per poscia dedurne la portata. Ma poichè nella soluzione di questo problema la teoria non somministra lumi sufficienti, così l' esperienza piuttosto si è voluto consultare, e con questa si è giunto a capo dell' impresa. Ecco con quali principj.

L' acqua per gli alvei si muove come per un piano inclinato; se dunque il suo moto diviene equabile, ciò non può essere che l' effetto delle resistenze. E qui nuovo scoglio alla soluzione del problema si presenta, giacchè non sappiamo come operino le resistenze a rendere equabile il moto dell' acqua per gli alvei. A sormontare questo nuovo ostacolo si è avuto ricorso ad una qualche ipotesi, lasciando poscia che l' esperienza la verifichi, o la corregga, ove fosse imperfetta.

Coulomb è stato il primo a supporre che l' espressione di queste resistenze abbia due termini, l' uno proporzionale al quadrato della velocità media, l' altro proporzionale alla semplice velocità; ambedue questi termini poi si suppongono inversamente proporzionali al rapporto fra l' area ed il perimetro della sezione, al qual rapporto si dà il nome di *raggio medio*.

(*) Dubuat, o. c. §. 889.
Prony, Rech. sur la th. des eaux courantes. §. 190, et suiv.

Dietro ad una tale ipotesi i signori Girard e Prony hanno composta una formola colla quale si rappresenta la legge delle resistenze, che l' acqua incontra nel suo moto per gli alvei. Sia gR l' espressione di queste resistenze, e D il raggio medio, sarà

$$R = \frac{\alpha}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{\beta}{D} \cdot u,$$

essendo α, β due coefficienti qualunque.

Conosciuto pertanto il valore delle resistenze, facilmente si determina la velocità equabile degli alvei; imperocchè chiamata φ l' inclinazione dell' alveo alla verticale, sarà $g \cos. \varphi - gR$ la forza acceleratrice dell' acqua: ma questa forza debb' esser zero ove il moto è equabile; sarà dunque $R = \cos. \varphi$. Posto poi per R il valore testè indicato, risulterà l' equazione

$$(M) \ldots\ldots \frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u = D \cos. \varphi$$

onde determinare la velocità media ed equabile dell' acqua per gli alvei.

39. Spetta ora all' esperienza il decidere se le resistenze seguano realmente la supposta legge, come pure il fissare il valore de' coefficienti α, β, che in tale ipotesi dovrebbero riescire costanti.

Il sig. Eytelwein con una copiosa, e assai variata serie di sperienze, ha egregiamente soddisfatto a questa ricerca (*). Le sperienze di cui egli si valse per determinare i coefficienti α, β dell' equazione (M), sono in numero di 91, delle quali, in quanto a 55 furon fatte dagli Ingegneri Tedeschi Brünings, Funk, e Woltman sul Reno di Germania; sul Weser, e su varj canali di scolo; le altre trentasei sono quelle che Dubuat ha registrate ne' suoi principj d' idraulica. Con questa copiosa suppellettile di sperienze il sig. Eytelwein ha trovato, che la supposta legge delle resistenze si verifica totalmente, e che i coefficienti α, β ricevono i valori costanti $\alpha = 0{,}007171$; $\beta = 0{,}000024$. Posti questi valori nell' equazione (M) risulta

$$(O) \ldots\ldots u = -0{,}0033837 5g + \sqrt{[0{,}00001145g^2 + 278{,}899 D \cos. \varphi)}$$

per l' espressione della velocità media ed equabile negli alvei.

40. Sebbene le sperienze di cui si servì il sig. Eytelwein per determinare i coefficienti α, β siano state fatte in grande, essendovene alcune fatte in un alveo di 2601,786 metri quadrati di sezione;

(*) V. le Memorie della Reale Accademia di Berlino per gli anni 1814, 1815. Parte Matem., pag. 135.

pur tuttavia giova confrontare questi risultamenti con altre sperienze ancora, onde avere di loro maggior certezza, o dati per correggerli, ove s' incontrassero notabili differenze.

A tale intendimento i signori Professori della Scuola Idraulica di Roma, presero a consultare, non ha guari, le più recenti sperienze fatte in Italia, da cui trar poterono nuova conferma de' risultamenti del sig. Eytelwien (*).

Possiamo ora adunque ritenere, che la velocità media dell' acqua negli alvei di corso equabile ci sarà data dall'equazione (O). E chiamata A l'area della sezione, P il suo perimetro, e Q, al solito, la portata, si avrà

$$(N) \ldots\ldots\ldots Q = A u,$$

per l' espressione delle quantità d' acqua che ad ogni minuto secondo passa per ciascuna sezione dell' alveo.

Delle escrescenze e decrescenze degli alvei.

41. Con queste pochissime formole, siamo ora in istato di risolvere l' importantissimo problema, delle escrescenze e decrescenze degli alvei. Infatti sostituito nell' equazione (M) il valore di u tratto dall' equazione (N), e fatto $D = \frac{A}{P}$, risulterà

$$(K) \ldots\ldots\ldots \frac{\alpha Q^2}{2g} + \beta QA = \frac{A^3}{P} \cos. \varphi;$$

in cui nota essendo la figura dell' alveo, A e P saranno funzioni note dell' altezza dell' acqua, e perciò l' equazione (K) farà conoscere come varj quest' altezza al variare della portata dell' alveo.

42. Per fare un' applicazione di questa dottrina, prenderemo a determinare l' alzamento che si farebbe nel Po immettendovi il Reno di Bologna; posto l' uno e l' altro fiume in istato di piena (**).

Sia la larghezza media del Reno piedi 139 di Bologna, metri 52,834; e l' altezza delle sue piene pie. 11, m.^{i} 4,181. La larghezza del Po a Lagoscuro è pie. 760, m.^{i} 288,875; e l' altezza della piena

---

(*) *Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri Pontificj*. Milano 1822.

(**) Questa soluzione si trova registrata alla pag. 19. delle Ricerche Geometriche ec. più sopra citate. Le misure metriche che ivi si danno, differiscono alcun poco dalle nostre, nè saprei addurne la ragione; io le ho calcolate con tutta la possibile diligenza, traendole dal noto rapporto 0,380093 fra il metro ed il piede di Bologna.

pie. 30, m.[i] 11,403. Dalle livellazioni prese nella celebre visita d'Adda e Barberini nel 1693, risulta la pendenza del Reno di once 14 $\frac{?}{?}$ per miglio, il qual risultamento coincide coll'esattissima livellazione del Reno fatta nel 1818 dagli Ingegneri del corpo d'acque e strade. Sarà dunque pel Reno $cos. \varphi = 0,00002458$. Quanto alla pendenza del Po in piena, viene essa calcolata di once 16 e punti 8 pel tratto da Lagoscuro a Francolino. Sarà dunque pel Po $cos. \varphi = 0,0000996$.

Siccome poi ne' fiumi assai più larghi che profondi può considerarsi siccome rettangolare ogni sua sezione, così il perimetro bagnato dall'acqua sarà eguale alla larghezza, più il doppio dell'altezza; potremo dunque considerarlo nel Reno di m.[i] 61,196, e nel Po di m.[i] 311,681. Quindi pel Reno sarà il raggio medio $D = 3,6097$ onde $D\, cos. \varphi = 0,00088726426$; e pel Po $D = 10,5686$ onde $D\, cos. \varphi = 0,00105263256$.

Ciò posto nella tavola della latitudine di Bologna trovo che il primo valore $D\, cos. \varphi$ è compreso fra i numeri 8817,6332; 8931,5939 ai quali corrispondono le velocità 1,52; 1,53. Prendendo la parte proporzionale, si trova la velocità media del Reno in piena di m.[i] 1,5248. Ripetuto questo calcolo anche per il Po, si troverà che la velocità media di questo fiume in piena è di m.[i] 1,6638. Adunque la portata del Reno equivarrà a m.[i] c.[i] 336,8266; quella del Po a m.[i] c.[i] 5480,6264. E la portata del Po gonfio accresciuto dal Reno in piena sarà di m.[i] c.[i] 5817,453; cosicchè le acque di codesto fiume crescono nella ragione di 1 : 1,06.

Conosciuta la portata del Po accresciuto del Reno, l'equazione (K) servirà a determinare l'alzamento delle sue acque. Sia y l'altezza dell'acqua nel Po, ed l la larghezza dell'alveo, cui supporremo di sezione rettangolare; si avrà $P = l + 2y$; $A = ly$, e perciò l'equazione (K) diverrà $\frac{\alpha Q^2}{2g} + \beta Q l y = \frac{l^3 y^3 cos. \varphi}{l + 2y}$, dove abbiamo $\alpha = 0,007171$; $\beta = 0,000024$; $g = 9,8052401$ (*); $Q = 5817,453$; $l = 288,875$; e $cos. \varphi = 0,0000996$. Ridotta a numeri l'equazione diventa

$$y^3 - 0,0349 y^2 - 15,7296 y - 1544,776 = 0,$$

onde si trae $y = 12,028$. Adunque l'alzamento che riceverebbe il Po in piena, per l'influenza della piena del Reno, sarebbe di metri 0,625 presso a poco; vale a dire once 19,74 di Bologna.

43. Sarà ora agevol cosa il determinare la velocità del Po accresciuto dal Reno; imperocchè essendo l'altezza delle sue acque metri 12,028 si calcolerà il raggio medio $D = 11,1084$, onde $D\, cos. \varphi =$

(*) Per questa ricerca, calcolo il valore della gravità nella latitudine di Ferrara, il quale trovasi nella tavola dell'art. 4.

0,00110589364. Cercando nella solita tavola della latitudine di Bologna (giacchè questa latitudine poco differisce da quella di Ferrara) la velocità media corrispondente, si troverà essa maggiore di metri 1,70; e minore di m.i 1,71 onde, col solito metodo delle parti proporzionali, si avrà la velocità cercata di m.i 1,7061. Cresce dunque la velocità del Po aumentato dal Reno, nella ragione di 1 : 1,03, che è all' incirca quella con cui crescono le acque di questo fiume (42).

44. Il p. Frisi ci dà per regola generale, che *le velocità delle acque unite crescono in una ragione poco differente da quella delle quantità loro* (*). E veramente il caso particolare dell' unione del Reno col Po sembra confermare una tal regola: ma non c' è permesso d' argomentare dal particolare il generale, a meno che non si avesse, una serie di accurate osservazioni le quali tutte confermassero sì fatto risultamento. D' altronde poi le nostre formole mostrano manifestamente che la regola del Frisi, non è ammissibile, se non nel caso in cui rimanesse invariabile l' ampiezza delle sezioni del recipiente dopo la confluenza. Ciò è appunto cui egli pretende di dimostrare; imperocchè osservando alcuni fiumi o torrenti uniti, trova che l' area delle sezioni del recipiente prese sotto e sopra la confluenza, si mantiene presso a poco costante. Sembra a me che ciò si dovesse verificare, non delle sezioni prese sopra e sotto la confluenza, ma di quest' ultime, prima e dopo la confluenza. Infatti chi dice a noi se le sezioni osservate dal Frisi coincidevano in ampiezza anche prima dell' unione delle acque? Allora sì che le sezioni del recipiente non soffrirebbero sensibile accrescimento di altezza, nè di larghezza, per le acque sue accresciute.

Il p. Frisi a dir vero è alquanto più discreto del p. Lecchi, il quale pretendeva che le sezioni del recipiente dopo la confluenza dovessero restringersi, e ne adduceva anch' egli per ragione, d' avere osservato alcune sezioni di dati fiumi, le quali si ristringevano dopo lo sbocco dell' influente.

Eustachio Zanotti nel rispondere alle osservazioni del p. Lecchi, risponde eziandio a quelle del padre Frisi. *Sarebbe stato opportuno* (dice egli) *indicare la figura delle sezioni, per dare a conoscere qual sia l' alveo interiore: quale altezza da cui, più che dalla distanza degli argini, dee valutarsi la capacità del fiume.* Ed in altro luogo. *Chi può mai dubitare che un nuovo influente non renda più ricco d' acque il recipiente; onde se la larghezza era stabilita coll' equilibrio tra l' abbondanza primaria cagione della velocità, e*

(*) Raccolta d' autori ec. più sopra citata, Tom. VI. pag. 219.

la resistenza delle sponde, come poi tolto l' equilibrio coll' aggiunta d' un influente, e prevalendo la forza, o abbondanza dell' acqua potranno mantenersi le ripe, e conservar l' alveo la stessa larghezza (*).

Il p. Frisi nel calcolo delle sue sezioni ci riferisce l'altezza massima, e la loro larghezza ragguagliata, e dal prodotto di queste ne deduce l' ampiezza delle medesime. Sarà egli questo un confronto adequato all' intendimento del quale si tratta? o non si dovranno piuttosto esplorare molte, e molte profondità dell' alveo in una stessa sezione, per meglio conoscerne la figura, e la superficie?

45. Io certamente ritengo, che le acque di un recipiente nel luogo della confluenza, abbiano prima da inalzarsi, giusta i principj prestabiliti, ma che poscia per la forza loro accresciuta, escaveranno il fondo, e roderanno le sponde dell' alveo, fino all' equilibrio, per cui il loro inalzamento resterà realmente minore del calcolato. Ma intanto, se nella pratica si considererà come effettivo cotesto inalzamento, ne risulterà maggior sicurezza per l' alveo del recipiente; imperocchè essendo egli capace di sostenere le proprie acque ad un' altezza anche maggiore della vera, molto più lo sarà per quest' altezza; ond' è che le piene non sormonteranno gli argini, e tutto il sistema del fiume sarà in perfetta armonia.

(*) *Raccolta d' autori* ec., Tom. VII. pag. 129, 132.



INDICE

DEGLI OPUSCOLI CONTENUTI IN QUESTO VOLUME.

TAVOLE

Dietro le quali, data l' altezza media, si determina la velocità dell' efflusso per le bocche di derivazione; nelle latitudini di Pietroburgo, Mosca, Berlino, Parigi, Milano, Torino, Bologna, Roma, Napoli e Lisbona.

Latitudine di Pietroburgo 59° 56′ 23″

Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.
0,01	0,443128	0,51	3,164570	1,01	4,453386	1,51	5,445264
0,02	0,626678	0,52	3,195445	1,02	4,476495	1,52	5,463955
0,03	0,767521	0,53	3,226024	1,03	4,497265	1,53	5,481197
0,04	0,886257	0,54	3,256316	1,04	4,519042	1,54	5,499080
0,05	0,990865	0,55	3,286329	1,05	4,540716	1,55	5,516905
0,06	1,085439	0,56	3,316070	1,06	4,562287	1,56	5,534673
0,07	1,172408	0,57	3,345547	1,07	4,583756	1,57	5,552384
0,08	1,253357	0,58	3,374766	1,08	4,605126	1,58	5,570039
0,09	1,329385	0,59	3,403734	1,09	4,626397	1,59	5,587638
0,10	1,401295	0,60	3,432458	1,10	4,6475.1	1,60	5,605161
0,11	1,469691	0,61	3,460944	1,11	4,668946	1,61	5,622670
0,12	1,535042	0,62	3,489197	1,12	4,689651	1,62	5,640105
0,13	1,597722	0,63	3,517223	1,13	4,710520	1,63	5,657486
0,14	1,658035	0,64	3,545028	1,14	4,731318	1,64	5,674814
0,15	1,716229	0,65	3,572616	1,15	4,752024	1,65	5,692088
0,16	1,772514	0,66	3,599995	1,16	4,772640	1,66	5,709311
0,17	1,827066	0,67	3,627163	1,17	4,795167	1,67	5,726482
0,18	1,880035	0,68	3,654151	1,18	4,813608	1,68	5,743602
0,19	1,931552	0,69	3,680902	1,19	4,833961	1,69	5,760670
0,20	1,981731	0,70	3,707419	1,20	4,854229	1,70	5,777688
0,21	2,030670	0,71	3,733867	1,21	4,874413	1,71	5,794657
0,22	2,078457	0,72	3,760070	1,22	4,894514	1,72	5,811576
0,23	2,125170	0,73	3,786091	1,23	4,914535	1,73	5,828445
0,24	2,170877	0,74	3,811935	1,24	4,934470	1,74	5,845266
0,25	2,215645	0,75	3,837605	1,25	4,954327	1,75	5,862039
0,26	2,259521	0,76	3,863105	1,26	4,974105	1,76	5,878764
0,27	2,302563	0,77	3,888457	1,27	4,993804	1,77	5,895441
0,28	2,344816	0,78	3,913605	1,28	5,013427	1,78	5,912072
0,29	2,386320	0,79	3,938612	1,29	5,032972	1,79	5,928655
0,30	2,427115	0,80	3,963462	1,30	5,052442	1,80	5,945193
0,31	2,467235	0,81	3,988156	1,31	5,071837	1,81	5,961681
0,32	2,506713	0,82	4,012699	1,32	5,091159	1,82	5,978130
0,33	2,545579	0,83	4,037093	1,33	5,110407	1,83	5,994531
0,34	2,583861	0,84	4,061340	1,34	5,129583	1,84	6,010887
0,35	2,621585	0,85	4,085443	1,35	5,148688	1,85	6,027199
0,36	2,658771	0,86	4,109405	1,36	5,167722	1,86	6,043467
0,37	2,695445	0,87	4,133227	1,37	5,186686	1,87	6,059691
0,38	2,731627	0,88	4,156914	1,38	5,205581	1,88	6,075871
0,39	2,767336	0,89	4,180466	1,39	5,224408	1,89	6,092010
0,40	2,802591	0,90	4,203886	1,40	5,243167	1,90	6,108105
0,41	2,837407	0,91	4,227176	1,41	5,261869	1,91	6,124158
0,42	2,871801	0,92	4,250339	1,42	5,280485	1,92	6,140169
0,43	2,905788	0,93	4,273376	1,43	5,299046	1,93	6,156158
0,44	2,939382	0,94	4,296290	1,44	5,317542	1,94	6,172066
0,45	2,972596	0,95	4,319082	1,45	5,335974	1,95	6,187953
0,46	3,005444	0,96	4,341753	1,46	5,354342	1,96	6,203799
0,47	3,037936	0,97	4,364309	1,47	5,372647	1,97	6,219605
0,48	3,070084	0,98	4,386748	1,48	5,390891	1,98	6,235371
0,49	3,101899	0,99	4,409073	1,49	5,409164	1,99	6,251097
0,50	3,133392	1,00	4,431285	1,50	5,427193	2,00	6,266783

Latitudine di Bologna 44° 29′ 54″

Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.
2,01	6,278206	2,51	7,015754	3,01	7,682822	3,51	8,296426
2,02	6,293804	2,52	7,029716	3,02	7,693578	3,52	8,308236
2,03	6,308365	2,53	7,043650	3,03	7,708304	3,53	8,320029
2,04	6,324884	2,54	7,057557	3,04	7,721018	3,54	8,331806
2,05	6,340369	2,55	7,071436	3,05	7,735702	3,55	8,345565
2,06	6,355815	2,56	7,085288	3,06	7,746370	3,56	8,355309
2,07	6,371221	2,57	7,099115	3,07	7,759017	3,57	8,367036
2,08	6,386592	2,58	7,112911	3,08	7,771643	3,58	8,378746
2,09	6,401926	2,59	7,126682	3,09	7,784248	3,59	8,390440
2,10	6,417223	2,60	7,140427	3,10	7,796835	3,60	8,402118
2,11	6,432484	2,61	7,154110	3,11	7,809406	3,61	8,413779
2,12	6,447709	2,62	7,167838	3,12	7,821945	3,62	8,425424
2,13	6,462898	2,63	7,181504	3,13	7,834471	3,63	8,437054
2,14	6,478051	2,64	7,195144	3,14	7,846976	3,64	8,448667
2,15	6,493169	2,65	7,208758	3,15	7,859461	3,65	8,460259
2,16	6,508252	2,66	7,222347	3,16	7,871927	3,66	8,471846
2,17	6,523300	2,67	7,235910	3,17	7,884372	3,67	8,483412
2,18	6,538314	2,68	7,249448	3,18	7,896799	3,68	8,494961
2,19	6,553293	2,69	7,262960	3,19	7,909205	3,69	8,506496
2,20	6,568237	2,70	7,276447	3,20	7,921592	3,70	8,518014
2,21	6,585148	2,71	7,289910	3,21	7,933960	3,71	8,529517
2,22	6,598025	2,72	7,303347	3,22	7,946309	3,72	8,541005
2,23	6,612868	2,73	7,316760	3,23	7,958638	3,73	8,552477
2,24	6,627680	2,74	7,330149	3,24	7,970949	3,74	8,563934
2,25	6,642457	2,75	7,343518	3,25	7,983240	3,75	8,575375
2,26	6,657202	2,76	7,356852	3,26	7,995512	3,76	8,586802
2,27	6,671914	2,77	7,370168	3,27	8,007766	3,77	8,598213
2,28	6,686593	2,78	7,383460	3,28	8,020001	3,78	8,610189
2,29	6,701241	2,79	7,396727	3,29	8,032217	3,79	8,620969
2,30	6,715857	2,80	7,409971	3,30	8,044415	3,80	8,632355
2,31	6,730441	2,81	7,423192	3,31	8,056594	3,81	8,643706
2,32	6,744995	2,82	7,436388	3,32	8,068735	3,82	8,655042
2,33	6,759514	2,83	7,449562	3,33	8,080898	3,83	8,666363
2,34	6,774004	2,84	7,462712	3,34	8,093022	3,84	8,677670
2,35	6,788465	2,85	7,475839	3,35	8,105189	3,85	8,688961
2,36	6,802891	2,86	7,488945	3,36	8,117217	3,86	8,700258
2,37	6,817288	2,87	7,502024	3,37	8,129207	3,87	8,711501
2,38	6,851656	2,88	7,515082	3,38	8,141339	3,88	8,722740
2,39	6,845995	2,89	7,528118	3,39	8,153374	3,89	8,733992
2,40	6,860300	2,90	7,541131	3,40	8,165390	3,90	8,745201
2,41	6,874578	2,91	7,554122	3,41	8,177390	3,91	8,756406
2,42	6,888826	2,92	7,567090	3,42	8,189371	3,92	8,767596
2,43	6,903044	2,93	7,580037	3,43	8,201535	3,93	8,778772
2,44	6,917235	2,94	7,592981	3,44	8,213292	3,94	8,789934
2,45	6,951393	2,95	7,605865	3,45	8,225211	3,95	8,801082
2,46	6,945525	2,96	7,618744	3,46	8,237730	3,96	8,812215
2,47	6,959627	2,97	7,631602	3,47	8,249018	3,97	8,823335
2,48	6,873701	2,98	7,644439	3,48	8,260895	3,98	8,834440
2,49	6,987747	2,99	7,637255	3,49	8,272756	3,99	8,845552
2,50	7,001765	3,00	7,670049	3,50	8,284600	4,00	8,856610

Latitudine di Torino 45° 4′ 0″

Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.
0,01	0,442842	0,51	3,162524	1,01	4,450506	1,51	5,441753
0,02	0,626273	0,52	3,193379	1,02	4,472484	1,52	5,459842
0,03	0,767025	0,53	3,223938	1,03	4,494355	1,53	5,477652
0,04	0,885684	0,54	3,254210	1,04	4,516119	1,54	5,495524
0,05	0,990225	0,55	3,284204	1,05	4,537780	1,55	5,513338
0,06	1,084736	0,56	3,313926	1,06	4,559337	1,56	5,531195
0,07	1,171650	0,57	3,343383	1,07	4,580793	1,57	5,548794
0,08	1,252546	0,58	3,372584	1,08	4,602148	1,58	5,566437
0,09	1,328526	0,59	3,401534	1,09	4,623406	1,59	5,584024
0,10	1,400389	0,60	3,430239	1,10	4,644566	1,60	5,601557
0,11	1,468741	0,61	3,458706	1,11	4,665629	1,61	5,619034
0,12	1,534049	0,62	3,486941	1,12	4,686599	1,62	5,636458
0,13	1,596689	0,63	3,514949	1,13	4,707474	1,63	5,653827
0,14	1,656965	0,64	3,542736	1,14	4,728258	1,64	5,671247
0,15	1,715119	0,65	3,570306	1,15	4,748951	1,65	5,688408
0,16	1,771368	0,66	3,597665	1,16	4,769554	1,66	5,705619
0,17	1,825884	0,67	3,624680	1,17	4,790068	1,67	5,722779
0,18	1,878819	0,68	3,651768	1,18	4,810495	1,68	5,739992
0,19	1,930505	0,69	3,678521	1,19	4,830835	1,69	5,756945
0,20	1,980449	0,70	3,705082	1,20	4,851090	1,70	5,773953
0,21	2,029357	0,71	3,731453	1,21	4,871261	1,71	5,790910
0,22	2,077113	0,72	3,757638	1,22	4,891349	1,72	5,807924
0,23	2,123795	0,73	3,783643	1,23	4,911355	1,73	5,824676
0,24	2,169474	0,74	3,809470	1,24	4,931279	1,74	5,841487
0,25	2,214210	0,75	3,835124	1,25	4,951123	1,75	5,858248
0,26	2,258060	0,76	3,860607	1,26	4,970889	1,76	5,874962
0,27	2,301074	0,77	3,885922	1,27	4,990375	1,77	5,891629
0,28	2,343299	0,78	3,911074	1,28	5,010185	1,78	5,908249
0,29	2,384777	0,79	3,936065	1,29	5,029718	1,79	5,924821
0,30	2,425545	0,80	3,960898	1,30	5,049175	1,80	5,941344
0,31	2,465640	0,81	3,985577	1,31	5,068558	1,81	5,957829
0,32	2,505092	0,82	4,010104	1,32	5,087867	1,82	5,974265
0,33	2,543936	0,83	4,034482	1,33	5,107102	1,83	5,990655
0,34	2,582190	0,84	4,058713	1,34	5,126266	1,84	6,007000
0,35	2,619888	0,85	4,082801	1,35	5,145358	1,85	6,023302
0,36	2,657032	0,86	4,106747	1,36	5,164380	1,86	6,039559
0,37	2,693702	0,87	4,130555	1,37	5,183332	1,87	6,055773
0,38	2,729861	0,88	4,154226	1,38	5,202215	1,88	6,071943
0,39	2,765547	0,89	4,177763	1,39	5,221030	1,89	6,088070
0,40	2,800778	0,90	4,201168	1,40	5,239777	1,90	6,104155
0,41	2,835572	0,91	4,224443	1,41	5,258457	1,91	6,120197
0,42	2,869944	0,92	4,247591	1,42	5,277071	1,92	6,136198
0,43	2,903909	0,93	4,270613	1,43	5,295619	1,93	6,152157
0,44	2,937481	0,94	4,293512	1,44	5,314103	1,94	6,168075
0,45	2,970674	0,95	4,316289	1,45	5,332523	1,95	6,183951
0,46	3,003500	0,96	4,338947	1,46	5,350880	1,96	6,199787
0,47	3,035971	0,97	4,361487	1,47	5,369175	1,97	6,215583
0,48	3,068099	0,98	4,383912	1,48	5,387503	1,98	6,231339
0,49	3,099894	0,99	4,406222	1,49	5,405575	1,99	6,247054
0,50	3,131363	1,00	4,428419	1,50	5,423684	2,00	6,262731

Latitudine di Napoli 40° 51′ 55″

Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.
2,01	8,277170	2,51	7,014597	3,01	7,681554	3,51	8,295058
2,02	6,292765	2,52	7,028556	8,02	7,694504	3,52	6,306866
2,03	6,308322	2,53	7,042488	3,03	7,707032	3,53	6,318657
2,04	6,323841	2,54	7,056392	3,04	7,719739	3,54	6,330431
2,05	6,339522	2,55	7,070269	8,05	7,732426	3,55	8,342189
2,06	6,354764	2,56	7,084119	3,06	7,745092	3,56	8,353930
2,07	6,370170	2,57	7,097941	3,07	7,757757	3,57	8,365655
2,08	6,385538	2,58	7,111757	3,08	7,770361	3,58	8,377552
2,09	6,400870	2,59	7,125506	3,09	7,782965	3,59	6,389056
2,10	6,416165	2,60	7,139249	3,10	7,795549	3,60	8,400751
2,11	8,431431	2,61	7,152965	3,11	7,808112	3,61	8,412391
2,12	6,446645	2,62	7,166655	3,12	7,820655	8,62	6,424034
2,13	6,461832	2,63	7,180519	3,13	7,833176	3,63	8,435662
2,14	6,476985	2,64	7,193937	3,14	7,845681	8,64	8,447273
2,15	6,492098	2,65	7,207569	3,15	7,858165	3,65	8,458869
2,16	6,507119	2,66	7,221155	8,16	7,870628	3,66	8,470448
2,17	8,522224	2,67	7,234116	3,17	7,883072	3,67	8,482012
2,16	6,537235	2,68	7,248251	3,18	7,896496	3,66	6,493560
2,19	8,552212	2,69	7,261762	3,19	7,907900	3,69	8,505092
2,20	6,567154	2,70	7,275247	3,20	7,920286	3,70	8,516609
2,21	8,582062	2,71	7,288707	8,21	7,932651	3,71	6,528110
2,22	6,596957	2,72	7,302142	3,22	7,944996	3,72	8,539596
2,23	6,611778	2,73	7,315555	3,23	7,957525	3,73	8,551066
2,24	6,626586	2,74	7,328959	3,24	7,969634	3,74	6,562521
2,25	6,641361	2,75	7,342301	3,25	7,981928	3,75	6,573961
2,26	6,656104	2,76	7,355639	3,26	7,994196	3,76	8,585385
2,27	6,670813	2,77	7,368952	3,27	8,006445	3,77	8,596794
2,28	6,685490	2,78	7,382241	3,28	8,018676	3,78	6,608188
2,29	6,700136	2,79	7,390507	3,29	8,030892	3,79	8,619567
2,30	6,714749	2,80	7,408749	3,30	6,043088	3,80	8,630931
2,31	6,729330	2,81	7,421967	3,31	8,055265	3,81	8,642280
2,32	6,743880	2,82	7,435161	3,32	8,067424	3,82	6,653614
2,33	6,765793	2,83	7,448335	3,33	8,079565	3,83	6,664934
2,34	6,772886	2,84	7,461481	3,34	8,091687	3,84	8,676238
2,35	6,767343	2,85	7,474606	3,35	8,103791	3,85	8,687528
2,36	8,801769	2,86	7,487707	3,36	8,115876	3,86	8,698803
2,37	6,816164	2,87	7,500786	3,37	8,127946	3,87	8,710064
2,38	6,830529	2,88	7,513845	3,36	6,139996	3,88	8,721509
2,39	6,844864	2,89	7,526876	8,39	8,152029	3,89	8,732541
2,40	8,859168	2,90	7,539887	3,40	6,164043	3,90	6,743758
2,41	6,873444	2,91	7,552876	3,41	8,176041	3,91	8,754961
2,42	8,887689	2,92	7,565842	8,42	6,188020	3,92	8,766150
2,43	6,901905	2,93	7,578786	3,43	8,199982	8,93	8,777324
2,44	8,916092	2,94	7,591708	3,44	8,211927	8,94	6,788484
2,45	8,930230	2,95	7,604608	3,45	8,223854	3,95	6,799650
2,46	6,944379	2,96	7,617487	3,46	8,235764	3,96	6,810761
2,47	6,958479	2,97	7,630343	3,47	8,247657	8,97	6,821879
2,48	6,972551	2,98	7,643176	3,48	8,259535	8,98	6,832983
2,49	6,986595	2,99	7,655992	3,49	8,271391	3,99	6,844073
2,50	7,000610	3,00	7,668784	3,50	8,283233	4,00	8,855148

Latitudine di Lisbona 38° 42′ 24″

Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.
0,01	0,442715	0,51	3,161615	1,01	4,449287	1,51	5,440168
0,02	0,626095	0,52	3,192460	1,02	4,471198	1,52	5,458152
0,03	0,766804	0,53	3,223011	1,03	4,493063	1,53	5,476077
0,04	0,885429	0,54	3,253275	1,04	4,514821	1,54	5,493944
0,05	0,989940	0,55	3,283259	1,05	4,536475	1,55	5,511752
0,06	1,084425	0,56	3,312975	1,06	4,558026	1,56	5,529504
0,07	1,171315	0,57	3,342428	1,07	4,579476	1,57	5,547198
0,08	1,252186	0,58	3,371614	1,08	4,600825	1,58	5,564836
0,09	1,328144	0,59	3,400555	1,09	4,622076	1,59	5,582419
0,10	1,399987	0,60	3,429253	1,10	4,643230	1,60	5,599946
0,11	1,468318	0,61	3,457712	1,11	4,664288	1,61	5,617419
0,12	1,533608	0,62	3,485938	1,12	4,685251	1,62	5,634837
0,13	1,596230	0,63	3,513938	1,13	4,706121	1,63	5,652202
0,14	1,656486	0,64	3,541717	1,14	4,726898	1,64	5,669513
0,15	1,714626	0,65	3,569279	1,15	4,747585	1,65	5,686772
0,16	1,770858	0,66	3,596630	1,16	4,768182	1,66	5,703979
0,17	1,825359	0,67	3,623775	1,17	4,788691	1,67	5,721134
0,18	1,878279	0,68	3,650718	1,18	4,809112	1,68	5,738237
0,19	1,929748	0,69	3,677464	1,19	4,829445	1,69	5,755290
0,20	1,979880	0,70	3,704018	1,20	4,849698	1,70	5,772292
0,21	2,028773	0,71	3,730380	1,21	4,869861	1,71	5,789245
0,22	2,076515	0,72	3,756558	1,22	4,889943	1,72	5,806148
0,23	2,123185	0,73	3,782555	1,23	4,909942	1,73	5,823001
0,24	2,168850	0,74	3,808375	1,24	4,929867	1,74	5,839807
0,25	2,213573	0,75	3,834021	1,25	4,949700	1,75	5,856564
0,26	2,257410	0,76	3,859496	1,26	4,969459	1,76	5,873275
0,27	2,300412	0,77	3,884805	1,27	4,989140	1,77	5,889955
0,28	2,342625	0,78	3,909949	1,28	5,008744	1,78	5,906549
0,29	2,384091	0,79	3,934933	1,29	5,028271	1,79	5,923118
0,30	2,424847	0,80	3,959760	1,30	5,047723	1,80	5,939640
0,31	2,464951	0,81	3,984431	1,31	5,067100	1,81	5,956118
0,32	2,504372	0,82	4,008951	1,32	5,086404	1,82	5,972547
0,33	2,543202	0,83	4,033322	1,33	5,105634	1,83	5,988952
0,34	2,581448	0,84	4,057546	1,34	5,124792	1,84	6,005273
0,35	2,619135	0,85	4,081627	1,35	5,143879	1,85	6,021570
0,36	2,656288	0,86	4,105566	1,36	5,162895	1,86	6,037822
0,37	2,692928	0,87	4,129367	1,37	5,181842	1,87	6,054031
0,38	2,729076	0,88	4,153031	1,38	5,200719	1,88	6,070197
0,39	2,764752	0,89	4,176561	1,39	5,219528	1,89	6,086320
0,40	2,799975	0,90	4,199959	1,40	5,238270	1,90	6,102400
0,41	2,834757	0,91	4,223228	1,41	5,256945	1,91	6,118458
0,42	2,869118	0,92	4,246369	1,42	5,275555	1,92	6,134434
0,43	2,903074	0,93	4,269385	1,43	5,294097	1,93	6,150386
0,44	2,936636	0,94	4,292277	1,44	5,312575	1,94	6,166301
0,45	2,969820	0,95	4,315048	1,45	5,330990	1,95	6,182175
0,46	3,002636	0,96	4,337700	1,46	5,349341	1,96	6,198004
0,47	3,035098	0,97	4,360233	1,47	5,367629	1,97	6,213796
0,48	3,067217	0,98	4,382651	1,48	5,385856	1,98	6,229547
0,49	3,099002	0,99	4,404955	1,49	5,404020	1,99	6,245250
0,50	3,130465	1,00	4,427146	1,50	5,422124	2,00	6,260950

Latitudine di Lisbona 38° 42′ 24″

Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.	Altezze.	Velocità.
2,01	6,276563	2,51	7,013918	3,01	7,680811	3,51	8,294256
2,02	6,292157	2,52	7,027876	3,02	7,693560	3,52	8,306062
2,03	6,307712	2,53	7,041807	3,03	7,706287	3,53	8,317852
2,04	6,323229	2,54	7,055710	3,04	7,718993	3,54	8,329626
2,05	6,338709	2,55	7,069585	3,05	7,731678	3,55	8,341382
2,06	6,354150	2,56	7,083434	3,06	7,744343	3,56	8,353122
2,07	6,369554	2,57	7,097253	3,07	7,756987	3,57	8,364846
2,08	6,384921	2,58	7,111049	3,08	7,769610	3,58	8,376553
2,09	6,400251	2,59	7,124817	3,09	7,782213	3,59	8,388244
2,10	6,415544	2,60	7,138558	3,10	7,794795	3,60	8,399919
2,11	6,430801	2,61	7,152273	3,11	7,807357	3,61	8,411578
2,12	6,446022	2,62	7,165962	3,12	7,819899	3,62	8,423220
2,13	6,461207	2,63	7,179624	3,13	7,832421	3,63	8,434848
2,14	6,476356	2,64	7,193261	3,14	7,844923	3,64	8,446456
2,15	6,491470	2,65	7,206872	3,15	7,857405	3,65	8,458051
2,16	6,506549	2,66	7,220457	3,16	7,869867	3,66	8,469629
2,17	6,521593	2,67	7,234018	3,17	7,882309	3,67	8,481192
2,18	6,536603	2,68	7,247550	3,18	7,894732	3,68	8,492738
2,19	6,551578	2,69	7,261059	3,19	7,907136	3,69	8,504270
2,20	6,566519	2,70	7,274543	3,20	7,919520	3,70	8,515785
2,21	6,581426	2,71	7,288002	3,21	7,931884	3,71	8,527286
2,22	6,596299	2,72	7,301436	3,22	7,944230	3,72	8,538770
2,23	6,611139	2,73	7,314846	3,23	7,956556	3,73	8,550239
2,24	6,625945	2,74	7,328231	3,24	7,968863	3,74	8,561693
2,25	6,640719	2,75	7,341591	3,25	7,981151	3,75	8,573131
2,26	6,655460	2,76	7,354927	3,26	7,993420	3,76	8,584555
2,27	6,670168	2,77	7,368240	3,27	8,005671	3,77	8,595963
2,28	6,684856	2,78	7,381528	3,28	8,017903	3,78	8,607356
2,29	6,699488	2,79	7,394792	3,29	8,030116	3,79	8,618734
2,30	6,714099	2,80	7,408032	3,30	8,042310	3,80	8,630096
2,31	6,728679	2,81	7,421249	3,31	8,054486	3,81	8,641444
2,32	6,743229	2,82	7,434442	3,32	8,066644	3,82	8,652777
2,33	6,757745	2,83	7,447612	3,33	8,078783	3,83	8,664096
2,34	6,772251	2,84	7,460759	3,34	8,090903	3,84	8,675399
2,35	6,786686	2,85	7,473883	3,35	8,103006	3,85	8,686688
2,36	6,801111	2,86	7,486985	3,36	8,115093	3,86	8,697962
2,37	6,815505	2,87	7,500061	3,37	8,127160	3,87	8,709221
2,38	6,829868	2,88	7,513118	3,38	8,139209	3,88	8,720466
2,39	6,844202	2,89	7,526148	3,39	8,151240	3,89	8,731697
2,40	6,858505	2,90	7,539158	3,40	8,163254	3,90	8,742913
2,41	6,872779	2,91	7,552145	3,41	8,175250	3,91	8,754115
2,42	6,887025	2,92	7,565110	3,42	8,187228	3,92	8,765302
2,43	6,901238	2,93	7,578055	3,43	8,199189	3,93	8,776475
2,44	6,915425	2,94	7,590974	3,44	8,211133	3,94	8,787634
2,45	6,929580	2,95	7,603873	3,45	8,223059	3,95	8,798779
2,46	6,943707	2,96	7,616750	3,46	8,234968	3,96	8,809909
2,47	6,957806	2,97	7,629605	3,47	8,246859	3,97	8,821026
2,48	6,971877	2,98	7,642439	3,48	8,258734	3,98	8,832129
2,49	6,985919	2,99	7,655251	3,49	8,270591	3,99	8,843217
2,50	6,999933	3,00	7,668042	3,50	8,282432	4,00	8,854292

TAVOLE

Calcolate dappresso la formola di Eytelwein *per determinare la velocità media di una corrente, datane la sezione e la pendenza; nelle latitudini di Pietroburgo, Parigi, Bologna e Lisbona.*

Latitudine di Pietroburgo 59° 56′ 23″

Velocità media = u.	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u.	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u.	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u.	Valore del prodotto D cos. φ.
Metri.	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*
0,01	2,7917	0,46	884,3695	0,91	3244,9826	1,36	7084,6315
0,02	6,3138	0,47	920,7588	0,92	3313,2896	1,37	7186,7560
0,03	10,3662	0,48	957,8787	0,93	3384,2269	1,38	7289,6108
0,04	15,3491	0,49	995,7290	0,94	3454,9447	1,39	7393,1981
0,05	21,2623	0,50	1034,3097	0,95	3526,3929	1,40	7497,5117
0,06	27,7059	0,51	1073,6206	0,96	3598,5714	1,41	7602,3577
0,07	34,8800	0,52	1113,6623	0,97	3671,4804	1,42	7708,3341
0,08	42,7844	0,53	1154,4342	0,98	3745,1197	1,43	7814,8409
0,09	51,4192	0,54	1195,9364	0,99	3819,4894	1,44	7922,0781
0,10	60,7845	0,55	1238,1601	1,00	3894,5893	1,45	8030,0456
0,11	70,8799	0,56	1281,1821	1,01	3970,4200	1,46	8138,7436
0,12	81,7059	0,57	1324,8955	1,02	4046,9009	1,47	8248,1719
0,13	93,2622	0,58	1369,2493	1,03	4124,2721	1,48	8358,5506
0,14	105,3489	0,59	1414,4035	1,04	4202,2938	1,49	8469,2197
0,15	118,3661	0,60	1460,2881	1,05	4281,0458	1,50	8580,8392
0,16	132,3156	0,61	1506,9051	1,06	4360,5282	1,51	8693,1691
0,17	146,7915	0,62	1554,2484	1,07	4440,7411	1,52	8806,2694
0,18	161,9998	0,63	1602,3242	1,08	4521,6843	1,53	8920,0801
0,19	177,9384	0,64	1651,1303	1,09	4603,3579	1,54	9034,6211
0,20	194,6075	0,65	1700,6668	1,10	4685,7618	1,55	9149,8926
0,21	212,0069	0,66	1750,9337	1,11	4768,8962	1,56	9265,8944
0,22	230,1368	0,67	1801,9310	1,12	4852,7610	1,57	9382,6260
0,23	248,9970	0,68	1853,6587	1,13	4937,3561	1,58	9500,0892
0,24	268,5878	0,69	1906,1168	1,14	5022,6817	1,59	9618,2822
0,25	288,9086	0,70	1959,3052	1,15	5108,7376	1,60	9737,2006
0,26	309,9600	0,71	2013,2241	1,16	5195,5239	1,61	9856,8594
0,27	331,7418	0,72	2067,8735	1,17	5283,0406	1,62	9977 2435
0,28	354,2540	0,73	2123,2330	1,18	5371,2877	1,63	10098,3581
0,29	377,4963	0,74	2179,3630	1,19	5460,2651	1,64	10220,2030
0,30	401,4694	0,75	2236,2034	1,20	5549,9730	1,65	10342,7183
0,31	426,1728	0,76	2293,7742	1,21	5640,4112	1,66	10466,0840
0,32	451,6063	0,77	2352,0743	1,22	5731,5799	1,67	10590,1201
0,33	477,7706	0,78	2411,1069	1,23	5823,4789	1,68	10714,8866
0,34	504,6631	0,79	2470,8689	1,24	5916,1083	1,69	10840,3033
0,35	532,2900	0,80	2531,3612	1,25	6009,4681	1,70	10966,6107
0,36	560,6452	0,81	2592,5839	1,26	6103,5583	1,71	11095,5684
0,37	589,7309	0,82	2654,5370	1,27	6198,3789	1,72	11221,2564
0,38	619,5469	0,83	2717,2206	1,28	6293,9299	1,73	11349,6749
0,39	650,0934	0,84	2780,6344	1,29	6390,2112	1,74	11478,8237
0,40	681,3702	0,85	2844,7787	1,30	6487,2229	1,75	11608,7029
0,41	713,3774	0,86	2909,6533	1,31	6584,9651	1,76	11739,3125
0,42	746,1150	0,87	2975,2595	1,32	6683,4376	1,77	11870,6524
0,43	779,5830	0,88	3041,5959	1,33	6782,6405	1,78	12002,7228
0,44	813,7814	0,89	3108,0597	1,34	6882,5738	1,79	12135,3256
0,45	848,7101	0,90	3176,4560	1,35	6985,2375	1,80	12269,0547

Latitudine di Pietroburgo 59° 56′ 23″

Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.
Metri.	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*
1,81	12405,2892	2,26	19201,0566	2,71	27477,1927	3,16	37233,5845
1,82	12538,3081	2,27	19368,8960	2,72	27678,5195	3,17	37467,1788
1,83	12674,0304	2,28	19537,4858	2,73	27879,9768	3,18	37701,5035
1,84	12810,4831	2,29	19706,8059	2,74	28082,1644	3,19	37936,5585
1,85	12947,6662	2,30	19876,8564	2,75	28285,0824	3,20	38172,3440
1,86	13085,3797	2,31	20047,6574	2,76	28488,7308	3,21	38408,8598
1,87	13224,2255	2,32	20219,1487	2,77	28693,1095	3,22	38646,1061
1,88	13363,5978	2,33	20391,3904	2,78	28898,2187	3,23	38884,0827
1,89	13503,7024	2,34	20564,5625	2,79	29104,0585	3,24	39122,7897
1,90	13644,5374	2,35	20738,0650	2,80	29310,6282	3,25	39362,2271
1,91	13786,1029	2,36	20912,4978	2,81	29517,9265	3,26	39602,3949
1,92	13928,5986	2,37	21087,6611	2,82	29725,9592	3,27	39843,2951
1,93	14071,4248	2,38	21263,5547	2,83	29934,7203	3,28	40084,9217
1,94	14215,1814	2,39	21440,1788	2,84	30144,2118	3,29	40327,2806
1,95	14359,6684	2,40	21617,5332	2,85	30354,4337	3,30	40570,3699
1,96	14504,8857	2,41	21795,6180	2,86	30565,3860	3,31	40814,1897
1,97	14650,8336	2,42	21974,4332	2,87	30777,0686	3,32	41058,7390
1,98	14797,5116	2,43	22153,9788	2,88	30989,4817	3,33	41304,0203
1,99	14944,9201	2,44	22334,2548	2,89	31202,6251	3,34	41550,0312
2,00	15093,0590	2,45	22515,2611	2,90	31416,4989	3,35	41796,7725
2,01	15241,9283	2,46	22696,9979	2,91	31631,1082	3,36	42044,2441
2,02	15391,6280	2,47	22879,4650	2,92	31846,4377	3,37	42292,4462
2,03	15541,8580	2,48	23062,6625	2,93	32062,5027	3,38	42541,3786
2,04	15679,9185	2,49	23246,5905	2,94	32279,2981	3,39	42791,0415
2,05	15844,7095	2,50	23431,2487	2,95	32496,8289	3,40	43041,4347
2,06	15997,2305	2,51	23616,6474	2,96	32715,0800	3,41	43292,5583
2,07	16150,4822	2,52	23802,7565	2,97	32934,0666	3,42	43544,4123
2,08	16304,4642	2,53	23989,6060	2,98	33153,7855	3,43	43796,9987
2,09	16459,1766	2,54	24177,1858	2,99	33374,2306	3,44	44050,3115
2,10	16614,6193	2,55	24365,4961	3,00	33595,4085	3,45	44304,3566
2,11	16770,7925	2,56	24554,5367	3,01	33817,3166	3,46	44559,1322
2,12	16927,6961	2,57	24744,3077	3,02	34039,9551	3,47	44814,6381
2,13	17085,3500	2,58	24934,8091	3,03	34263,3239	3,48	45070,8744
2,14	17243,6945	2,59	25126,0409	3,04	34487,4232	3,49	45327,8411
2,15	17402,7891	2,60	25318,0051	3,05	34712,2528	3,50	45585,5582
2,16	17562,6142	2,61	25510,6957	3,06	34937,8129	3,51	45843,9657
2,17	17723,1697	2,62	25704,1186	3,07	35164,1033	3,52	46105,1276
2,18	17884,4556	2,63	25898,2720	3,08	35391,1241	3,53	46363,0119
2,19	18046,4718	2,64	26093,1557	3,09	35618,8753	3,54	46623,6305
2,20	18209,2185	2,65	26288,7698	3,10	35847,3568	3,55	46884,9796
2,21	18372,6955	2,66	26485,1145	3,11	36076,5688	3,56	47147,0590
2,22	18536,9080	2,67	26682,4892	3,12	36306,5112	3,57	47409,8688
2,23	18701,8408	2,68	26879,9945	3,13	36537,1859	3,58	47673,4090
2,24	18867,5090	2,69	27078,5302	3,14	36768,5870	3,59	47937,6796
2,25	19033,9076	2,70	27277,7962	3,15	37000,7206	3,60	48202,6806

Latitudine di Parigi 48° 50′ 14″

Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ
Metri.	Diecimilionesimi di metro.	Metri.	Diecimilionesimi di metro.	Metri.	Diecimilionesimi di metro.	Metri.	Diecimilionesimi di metro.
0,01	2,7921	0,46	885,1077	0,91	3247,8685	1,36	7091,0744
0,02	6,3152	0,47	921,5297	0,92	3317,1892	1,37	7193,2939
0,03	10,5695	0,48	958,6827	0,93	3387,2411	1,38	7296,2445
0,04	15,5548	0,49	996,5668	0,94	3458,0240	1,39	7399,9262
0,05	21,2712	0,50	1035,1820	0,95	3529,5379	1,40	7504,3389
0,06	27,7188	0,51	1074,5283	0,96	3601,7830	1,41	7609,4828
0,07	34,8973	0,52	1114,6057	0,97	3674,7591	1,42	7715,3577
0,08	42,8070	0,53	1155,4141	0,98	3748,4664	1,43	7821,9637
0,09	51,4478	0,54	1196,9537	0,99	3822,9047	1,44	7929,3008
0,10	60,8196	0,55	1239,2243	1,00	3898,0741	1,45	8037,3690
0,11	70,9225	0,56	1282,2260	1,01	3973,9746	1,46	8146,1682
0,12	81,7565	0,57	1325,9588	1,02	4050,6061	1,47	8255,6986
0,13	93,3216	0,58	1370,4227	1,03	4127,9688	1,48	8365,9600
0,14	105,6178	0,59	1415,6176	1,04	4206,0625	1,49	8476,9525
0,15	118,6451	0,60	1461,5436	1,05	4284,8873	1,50	8588,6761
0,16	132,4034	0,61	1508,2008	1,06	4364,4432	1,51	8701,1308
0,17	146,8928	0,62	1555,5890	1,07	4444,7302	1,52	8814,3166
0,18	162,1133	0,63	1603,7083	1,08	4525,7483	1,53	8928,2534
0,19	178,0649	0,64	1652,5586	1,09	4607,4975	1,54	9042,8814
0,20	194,7476	0,65	1702,1401	1,10	4689,9777	1,55	9158,2604
0,21	212,1614	0,66	1752,4526	1,11	4773,1890	1,56	9274,3705
0,22	230,3082	0,67	1803,4963	1,12	4857,1314	1,57	9391,2117
0,23	249,1822	0,68	1855,2710	1,13	4941,8049	1,58	9508,7839
0,24	268,7892	0,69	1907,7768	1,14	5027,2094	1,59	9627,0873
0,25	289,1273	0,70	1961,0137	1,15	5113,3451	1,60	9746,1217
0,26	310,1965	0,71	2014,9816	1,16	5200,2119	1,61	9865,8873
0,27	331,9967	0,72	2069,6807	1,17	5287,8097	1,62	9986,3839
0,28	354,5281	0,73	2125,1106	1,18	5376,1386	1,63	10107,6116
0,29	377,7905	0,74	2181,2720	1,19	5465,1986	1,64	10229,5705
0,30	401,7840	0,75	2238,1643	1,20	5554,9897	1,65	10352,2602
0,31	426,5086	0,76	2295,7877	1,21	5645,5119	1,66	10475,6811
0,32	451,9645	0,77	2354,1422	1,22	5736,7651	1,67	10599,8332
0,33	478,1511	0,78	2413,2277	1,23	5828,7494	1,68	10724,7163
0,34	505,0689	0,79	2473,0443	1,24	5921,4649	1,69	10850,3305
0,35	532,7179	0,80	2533,5921	1,25	6014,9114	1,70	10976,6757
0,36	561,0979	0,81	2594,8709	1,26	6109,0889	1,71	11103,7521
0,37	590,2090	0,82	2656,8808	1,27	6203,9976	1,72	11231,5596
0,38	620,0512	0,83	2719,6217	1,28	6299,6374	1,73	11360,0981
0,39	650,6245	0,84	2783,0938	1,29	6396,0082	1,74	11489,3677
0,40	681,9288	0,85	2847,2969	1,30	6493,1101	1,75	11619,3684
0,41	713,9643	0,86	2912,2311	1,31	6590,9431	1,76	11750,1002
0,42	746,6308	0,87	2977,8964	1,32	6689,5072	1,77	11881,5631
0,43	780,2284	0,88	3044,2928	1,33	6788,8024	1,78	12013,7956
0,44	814,4571	0,89	3111,4203	1,34	6888,8286	1,79	12146,7186
0,45	849,4169	0,90	3179,2789	1,35	6989,5860	1,80	12280,3382

Latitudine di Parigi 48° 50′ 14″

Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.
Metri.	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*
1,81	12414,7254	2,26	19218,8214	2,71	27505,1778	3,16	37268,5469
1,82	12549,8457	2,27	19386,8585	2,72	27704,8785	3,17	37502,1635
1,83	12685,6930	2,28	19555,5867	2,73	27905,9254	3,18	37736,7092
1,84	12822,2735	2,29	19725,0659	2,74	28108,5054	3,19	37971,9860
1,85	12959,5850	2,30	19895,2762	2,75	28311,4125	3,20	38207,9939
1,86	13097,6276	2,31	20066,2176	2,76	28515,2527	3,21	38444,7328
1,87	13236,4015	2,32	20237,8901	2,77	28719,8239	3,22	38682,2029
1,88	13375,9061	2,33	20410,2957	2,78	28925,1263	3,23	38920,4040
1,89	13516,1420	2,34	20583,4523	2,79	29131,1597	3,24	39159,3362
1,90	13657,1090	2,35	20757,2941	2,80	29337,9243	3,25	39398,9995
1,91	13798,8070	2,36	20951,8909	2,81	29545,4199	3,26	39639,3939
1,92	13941,2361	2,37	21107,2188	2,82	29753,6465	3,27	39880,5194
1,93	14084,3963	2,38	21283,2778	2,83	29962,6045	3,28	40122,3759
1,94	14228,2876	2,39	21460,0679	2,84	30172,2982	3,29	40364,9745
1,95	14372,9100	2,40	21637,5890	2,85	30382,7151	3,30	40608,2823
1,96	14518,2685	2,41	21815,8415	2,86	30595,8641	3,31	40852,3522
1,97	14664,3480	2,42	21994,8246	2,87	30805,7462	3,32	41097,1130
1,98	14811,1637	2,43	22174,5390	2,88	31018,3594	3,33	41342,6250
1,99	14958,7104	2,44	22354,9845	2,89	31231,7057	3,34	41588,8680
2,00	15106,9882	2,45	22536,1611	2,90	31445,7791	3,35	41835,8421
2,01	15255,9971	2,46	22718,0687	2,91	31660,5855	3,36	42083,5474
2,02	15405,7370	2,47	22900,7075	2,92	31876,1250	3,37	42331,9457
2,03	15556,2081	2,48	23084,0775	2,93	32092,3916	3,38	42581,1511
2,04	15707,4102	2,49	23268,1082	2,94	32309,3913	3,39	42831,0495
2,05	15859,5434	2,50	23453,0102	2,95	32527,1221	3,40	43081,6791
2,06	16012,0077	2,51	23638,5733	2,96	32745,5840	3,41	43333,0397
2,07	16165,4051	2,52	23824,8874	2,97	32964,7763	3,42	43585,1515
2,08	16319,5296	2,53	24011,8927	2,98	33184,7010	3,43	43837,9543
2,09	16474,5872	2,54	24199,6491	2,99	33405,3564	3,44	44091,5062
2,10	16629,9758	2,55	24388,1365	3,00	33626,7425	3,45	44345,7952
2,11	16786,2958	2,56	24577,3550	3,01	33848,8596	3,46	44600,8092
2,12	16943,3463	2,57	24767,3046	3,02	34071,7079	3,47	44856,5564
2,13	17101,1282	2,58	24957,9852	3,03	34295,2874	3,48	45113,0346
2,14	17259,6412	2,59	25149,3970	3,04	34519,5979	3,49	45370,2439
2,15	17418,8852	2,60	25341,5398	3,05	34744,6395	3,50	45628,1843
2,16	17578,8604	2,61	25534,4138	3,06	34970,4122	3,51	45886,8558
2,17	17739,5666	2,62	25728,0188	3,07	35196,9160	3,52	46146,2584
2,18	17901,0059	2,63	25922,3548	3,08	35424,1509	3,53	46406,3920
2,19	18063,1723	2,64	26117,4220	3,09	35652,1168	3,54	46667,2568
2,20	18226,0718	2,65	26315,2903	3,10	35880,8139	3,55	46928,8536
2,21	18389,7024	2,66	26509,7496	3,11	36110,2420	3,56	47191,1795
2,22	18554,0640	2,67	26707,0101	3,12	36340,4012	3,57	47454,2878
2,23	18719,1567	2,68	26905,0016	3,13	36571,2915	3,58	47718,0265
2,24	18884,8806	2,69	27103,7292	3,14	36802,9129	3,59	47982,5467
2,25	19051,3355	2,70	27303,1778	3,15	37035,2663	3,60	48247,7919

Latitudine di Bologna 44° 29′ 54″

Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.
Metri.	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*
0,01	2,7922	0,46	885,4093	0,91	3249,0548	1,36	7093,7286
0,02	6,3157	0,47	921,8446	0,92	3318,4018	1,37	7195,9875
0,03	10,5706	0,48	959,0112	0,93	3388,4802	1,38	7298,9774
0,04	15,5569	0,49	996,9092	0,94	3459,2899	1,39	7402,6981
0,05	21,2745	0,50	1035,5386	0,95	3530,8311	1,40	7507,1518
0,06	27,7235	0,51	1074,8994	0,96	3603,1036	1,41	7612,3360
0,07	34,9039	0,52	1114,9915	0,97	3676,1074	1,42	7718,2516
0,08	42,8157	0,53	1155,8150	0,98	3749,8427	1,43	7824,8986
0,09	51,4588	0,54	1197,3699	0,99	3824,3095	1,44	7932,2770
0,10	60,8333	0,55	1239,6562	1,00	3899,5078	1,45	8040,3867
0,11	70,9392	0,56	1282,6738	1,01	3975,4366	1,46	8149,2276
0,12	81,7765	0,57	1326,4228	1,02	4052,0974	1,47	8258,8005
0,13	93,3451	0,58	1370,9031	1,03	4129,4895	1,48	8369,1041
0,14	105,6451	0,59	1416,1149	1,04	4207,6130	1,49	8480,1393
0,15	118,6764	0,60	1462,0580	1,05	4286,4678	1,50	8591,9059
0,16	132,4392	0,61	1508,7324	1,06	4366,0540	1,51	8704,4039
0,17	146,9333	0,62	1556,0100	1,07	4446,3716	1,52	8817,6332
0,18	162,1588	0,63	1604,2755	1,08	4527,4206	1,53	8931,5939
0,19	178,1156	0,64	1653,1441	1,09	4609,2009	1,54	9046,2860
0,20	194,8039	0,65	1702,7441	1,10	4691,7126	1,55	9161,7094
0,21	212,2255	0,66	1753,0754	1,11	4774,9557	1,56	9277,8643
0,22	230,3744	0,67	1804,1381	1,12	4858,9301	1,57	9394,7505
0,23	249,2568	0,68	1855,9322	1,13	4943,6360	1,58	9512,3680
0,24	268,8705	0,69	1908,4577	1,14	5029,0731	1,59	9630,7170
0,25	289,2156	0,70	1961,7145	1,15	5115,2417	1,60	9749,7975
0,26	310,2920	0,71	2015,7027	1,16	5202,1417	1,61	9869,6089
0,27	332,0999	0,72	2070,4223	1,17	5289,7730	1,62	9990,1520
0,28	354,6391	0,73	2125,8732	1,18	5378,1357	1,63	10111,4264
0,29	377,9096	0,74	2182,0553	1,19	5467,2297	1,64	10233,4322
0,30	401,9116	0,75	2238,9692	1,20	5557,0551	1,65	10356,1694
0,31	426,6449	0,76	2296,6143	1,21	5647,6119	1,66	10479,6379
0,32	452,1096	0,77	2354,9907	1,22	5738,9001	1,67	10603,8078
0,33	478,3057	0,78	2414,0985	1,23	5830,9197	1,68	10728,7691
0,34	505,2331	0,79	2473,9377	1,24	5923,6706	1,69	10854,4518
0,35	532,8919	0,80	2534,5082	1,25	6017,1529	1,70	10980,8258
0,36	561,2821	0,81	2595,8101	1,26	6111,3665	1,71	11107,9512
0,37	590,4040	0,82	2657,8434	1,27	6206,3115	1,72	11235,8080
0,38	620,2569	0,83	2720,6081	1,28	6301,9879	1,73	11364,5961
0,39	650,8412	0,84	2784,1041	1,29	6398,3957	1,74	11493,7156
0,40	682,1565	0,85	2848,3315	1,30	6495,3349	1,75	11623,7065
0,41	714,2036	0,86	2913,2903	1,31	6593,4054	1,76	11754,5488
0,42	746,9820	0,87	2978,9805	1,32	6692,0073	1,77	11886,0624
0,43	780,4917	0,88	3045,4020	1,33	6791,3405	1,78	12018,3074
0,44	814,7329	0,89	3112,5549	1,34	6891,4032	1,79	12151,2838
0,45	849,7054	0,90	3180,4392	1,35	6992,2012	1,80	12284,0915

Latitudine di Bologna 44° 29′ 54″

Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.
Metri.	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*
1,81	12419,4306	2,26	19226,1610	2,71	27513,9197	3,16	37282,7056
1,82	12554,6011	2,27	19394,2452	2,72	27714,9136	3,17	37516,8124
1,83	12690,5030	2,28	19563,0568	2,73	27916,6390	3,18	37751,2494
1,84	12827,1362	2,29	19732,6018	2,74	28119,0957	3,19	37986,6179
1,85	12964,5008	2,30	19902,8181	2,75	28322,2838	3,20	38222,7177
1,86	13102,5968	2,31	20073,8859	2,76	28526,2032	3,21	38459,5489
1,87	13241,4242	2,32	20245,6250	2,77	28730,8541	3,22	38697,1115
1,88	13380,9829	2,33	20419,0954	2,78	28935,8563	3,23	38935,4054
1,89	13521,2730	2,34	20591,2972	2,79	29142,3499	3,24	39174,4307
1,90	13662,2944	2,35	20765,2503	2,80	29349,1948	3,25	39414,1874
1,91	13804,0473	2,36	20939,8950	2,81	29556,7711	3,26	39654,6755
1,92	13946,5313	2,37	21115,2910	2,82	29765,0188	3,27	39895,8949
1,93	14089,7471	2,38	21291,4183	2,83	29974,1179	3,28	40137,8454
1,94	14233,6940	2,39	21468,2370	2,84	30183,8843	3,29	40380,[illegible]
1,95	14378,3724	2,40	21645,7940	2,85	30394,5901	3,30	40623,[illegible]
1,96	14523,7821	2,41	21824,1685	2,86	30605,6235	3,31	40868,0054
1,97	14669,9231	2,42	22003,2413	2,87	30817,5879	3,32	41112,9627
1,98	14816,7956	2,43	22183,0265	2,88	31030,2878	3,33	41358,5703
1,99	14964,3994	2,44	22363,5411	2,89	31243,7111	3,34	41604,9094
2,00	15122,7346	2,45	22544,7880	2,90	31457,8697	3,35	41851,9798
2,01	15261,8011	2,46	22726,7063	2,91	31672,7398	3,36	42099,7815
2,02	15411,5991	2,47	22909,4750	2,92	31888,3812	3,37	42348,3147
2,03	15562,3284	2,48	23092,9170	2,93	32104,7340	3,38	42597,5792
2,04	15713,8890	2,49	23277,0894	2,94	32321,8181	3,39	42847,5731
2,05	15865,3811	2,50	23461,9032	2,95	32539,6336	3,40	43098,3424
2,06	16018,1045	2,51	23647,0284	2,96	32758,1805	3,41	43349,7610
2,07	16171,5593	2,52	23833,9949	2,97	32977,4588	3,42	43601,1815
2,08	16325,7453	2,53	24021,0028	2,98	33197,4685	3,43	43854,8724
2,09	16480,6630	2,54	24208,9220	2,99	33418,2095	3,44	44108,5252
2,10	16636,3119	2,55	24397,4027	3,00	33639,6819	3,45	44362,9003
2,11	16792,6922	2,56	24586,7747	3,01	33861,8856	3,46	44618,0248
2,12	16949,8058	2,57	24776,7981	3,02	34084,5208	3,47	44873,8714
2,13	17107,4469	2,58	24967,5529	3,03	34308,4873	3,48	45130,4499
2,14	17266,2213	2,59	25159,0360	3,04	34532,8851	3,49	45387,7595
2,15	17425,5270	2,60	25351,2565	3,05	34758,0144	3,50	45645,8005
2,16	17585,5662	2,61	25544,2054	3,06	34983,8750	3,51	45904,5729
2,17	17746,3827	2,62	25737,8857	3,07	35210,4670	3,52	46164,0766
2,18	17907,8225	2,63	25932,2973	3,08	35437,7905	3,53	46424,3121
2,19	18070,0658	2,64	26127,4405	3,09	35665,8451	3,54	46685,2782
2,20	18233,0284	2,65	26323,3147	3,10	35894,6312	3,55	46946,9760
2,21	18396,7204	2,66	26519,9204	3,11	36124,1487	3,56	47209,4152
2,22	18561,1458	2,67	26717,2573	3,12	36354,3975	3,57	47472,5658
2,23	18726,3025	2,68	26915,3960	3,13	36585,3777	3,58	47736,4578
2,24	18892,1907	2,69	27114,1258	3,14	36817,0893	3,59	48001,0811
2,25	19058,8101	2,70	27313,6571	3,15	37049,3523	3,60	48266,4358

Latitudine di Lisbona 38° 42′ 24″.

Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \varphi$.
Metri.	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimillionesimi di metro.*
0,01	2,7924	0,46	885,8146	0,91	3250,6386	1,36	7097,2645
0,02	6,3165	0,47	922,2676	0,92	3320,0206	1,37	7199,3754
0,03	10,5724	0,48	959,4524	0,93	3390,1343	1,38	7302,6181
0,04	15,5600	0,49	997,3690	0,94	3460,9798	1,39	7406,3925
0,05	21,2794	0,50	1036,0173	0,95	3532,5571	1,40	7510,8987
0,06	27,7305	0,51	1075,3974	0,96	3604,8661	1,41	7616,1366
0,07	34,9134	0,52	1115,5092	0,97	3677,9068	1,42	7722,1063
0,08	42,8281	0,53	1156,3528	0,98	3751,6793	1,43	7828,8077
0,09	51,4745	0,54	1197,9281	0,99	3826,1836	1,44	7936,2409
0,10	60,8527	0,55	1240,2352	1,00	3901,4196	1,45	8044,4059
0,11	70,9626	0,56	1283,2741	1,01	3977,3874	1,46	8155,3026
0,12	81,8042	0,57	1327,0447	1,02	4054,0869	1,47	8262,9310
0,13	93,3777	0,58	1371,5470	1,03	4131,5182	1,48	8375,2915
0,14	105,6828	0,59	1416,7811	1,04	4209,6812	1,49	8484,3832
0,15	118,7198	0,60	1462,7470	1,05	4288,3760	1,50	8596,2069
0,16	132,4884	0,61	1509,4446	1,06	4368,2026	1,51	8708,7624
0,17	146,9889	0,62	1556,8740	1,07	4448,5609	1,52	8822,0486
0,18	162,2211	0,63	1605,0351	1,08	4529,6509	1,53	8936,0686
0,19	178,1850	0,64	1653,9279	1,09	4611,4727	1,54	9050,8194
0,20	194,8807	0,65	1703,5526	1,10	4694,0263	1,55	9166,5018
0,21	212,3082	0,66	1753,9090	1,11	4777,3116	1,56	9282,5161
0,22	230,4674	0,67	1804,9971	1,12	4861,3287	1,57	9399,4621
0,23	249,3583	0,68	1856,8170	1,13	4946,0075	1,58	9517,1398
0,24	268,9811	0,69	1909,3686	1,14	5031,5581	1,59	9635,5495
0,25	289,3355	0,70	1962,6520	1,15	5117,7704	1,60	9754,6906
0,26	310,4218	0,71	2016,6672	1,16	5204,7145	1,61	9874,5636
0,27	332,2397	0,72	2071,4141	1,17	5292,3903	1,62	9995,1684
0,28	354,7895	0,73	2126,8928	1,18	5380,7979	1,63	10116,5049
0,29	378,0709	0,74	2183,1032	1,19	5469,9372	1,64	10238,5732
0,30	402,0842	0,75	2240,0453	1,20	5559,8083	1,65	10361,3752
0,31	426,8292	0,76	2297,7193	1,21	5650,4112	1,66	10484,9050
0,32	452,3059	0,77	2356,1249	1,22	5741,7458	1,67	10609,1685
0,33	478,5144	0,78	2415,2624	1,23	5833,8122	1,68	10734,1638
0,34	505,4547	0,79	2475,1316	1,24	5926,6103	1,69	10859,8909
0,35	533,1267	0,80	2535,7325	1,25	6020,1402	1,70	10986,3497
0,36	561,5305	0,81	2597,0652	1,26	6114,4018	1,71	11113,5402
0,37	590,6660	0,82	2659,1296	1,27	6209,3952	1,72	11241,4625
0,38	620,5332	0,83	2721,9258	1,28	6305,1203	1,75	11370,1166
0,39	651,1323	0,84	2785,4558	1,29	6401,5772	1,74	11499,5024
0,40	682,4630	0,85	2849,7135	1,30	6498,7658	1,75	11629,6200
0,41	714,5256	0,86	2914,7050	1,31	6596,6862	1,76	11760,4693
0,42	747,3199	0,87	2980,4282	1,32	6695,3384	1,77	11892,0504
0,43	780,8459	0,88	3046,8832	1,33	6794,7223	1,78	12024,3632
0,44	815,1037	0,89	3114,0699	1,34	6894,8379	1,79	12157,4078
0,45	850,0933	0,90	3181,9884	1,35	6995,6853	1,80	12291,1841

Latitudine di Lisbona 38° 42′ 24″

Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.	Velocità media = u	Valore del prodotto D cos. φ.
Metri.	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*	*Metri.*	*Diecimilionesimi di metro.*
1,81	12425,6922	2,26	19235,9918	2,71	27527,9352	3,16	37301,7865
1,82	12560,9321	2,27	19404,0906	2,72	27729,0510	3,17	37535,8132
1,83	12696,9037	2,28	19572,9911	2,73	27930,8804	3,18	37770,5716
1,84	12833,6070	2,29	19742,6254	2,74	28133,4416	3,19	38006,0617
1,85	12971,0421	2,30	19912,9874	2,75	28336,7346	3,20	38242,2856
1,86	13109,2090	2,31	20084,0852	2,76	28540,7593	3,21	38479,2372
1,87	13248,1076	2,32	20255,9108	2,77	28745,5158	3,22	38716,9227
1,88	13387,7380	2,33	20428,4701	2,78	28951,0040	3,23	38955,3598
1,89	13528,1001	2,34	20601,7611	2,79	29157,2240	3,24	39194,4887
1,90	13669,1940	2,35	20775,7839	2,80	29364,1757	3,25	39434,3694
1,91	13811,0196	2,36	20950,5385	2,81	29571,8592	3,26	39674,9818
1,92	13955,5770	2,37	21126,0248	2,82	29780,2745	3,27	39916,3260
1,93	14096,8661	2,38	21302,2423	2,83	29989,4213	3,28	40158,4019
1,94	14240,8870	2,39	21479,6927	2,84	30199,3002	3,29	40401,2096
1,95	14385,6397	2,40	21656,8743	2,85	30409,9108	3,30	40644,7491
1,96	14531,1241	2,41	21835,9876	2,86	30621,2580	3,31	40889,0205
1,97	14677,5403	2,42	22014,4327	2,87	30833,[illegible]	3,32	41134,0232
1,98	14824,2882	2,43	22194,3096	2,88	31046,1328	3,33	41379,7579
1,99	14971,9878	2,44	22374,9182	2,89	31259,6703	3,34	41626,2244
2,00	15120,3792	2,45	22556,2585	2,90	31473,9396	3,35	41873,4206
2,01	15269,5224	2,46	22738,3306	2,91	31688,9406	3,36	42121,3525
2,02	15419,5975	2,47	22921,1345	2,92	31904,6734	3,37	42370,0142
2,03	15570,0040	2,48	23104,6701	2,93	32121,1380	3,38	42619,4077
2,04	15721,3425	2,49	23288,9374	2,94	32338,3343	3,39	42868,4353
2,05	15873,4127	2,50	23473,9366	2,95	32556,2623	3,40	43120,3899
2,06	16026,2146	2,51	23659,6874	2,96	32774,9221	3,41	43371,9787
2,07	16179,7483	2,52	23846,1301	2,97	32994,3157	3,42	43624,2991
2,08	16334,0137	2,53	24033,3244	2,98	33214,4370	3,43	43877,3514
2,09	16489,0110	2,54	24221,2306	2,99	33435,2921	3,44	44131,1354
2,10	16644,7399	2,55	24409,9085	3,00	33656,8789	3,45	44385,6511
2,11	16801,2006	2,56	24599,2981	3,01	33879,1974	3,46	44640,8986
2,12	16958,3931	2,57	24789,4195	3,02	34102,2478	3,47	44896,8779
2,13	17116,3[illegible]75	2,58	24980,272[illegible]	3,03	34326,0299	3,48	45153,5889
2,14	17274,9[illegible]35	2,59	25171,8576	3,04	34550,3437	3,49	45411,0317
2,15	17434,3610	2,60	25364,1742	3,05	34775,7893	3,50	45669,2[illegible]62
2,16	17594,4805	2,61	25557,2226	3,06	35001,7666	3,51	45928,1125
2,17	17755,3517	2,62	25751,0028	3,07	35228,4757	3,52	46187,7505
2,18	17916,9147	2,63	25945,5147	3,08	35455,9166	3,53	46448,1203
2,19	18079,2295	2,64	26140,7584	3,09	35684,0892	3,54	46709,2218
2,20	18242,2760	2,65	26336,7338	3,10	35912,9855	3,55	46971,0551
2,21	18406,0542	2,66	26533,4410	3,11	36142,6296	3,56	47233,6201
2,22	18570,3642	2,67	26730,8799	3,12	36372,9975	3,57	47296,9169
2,23	18735,8060	2,68	26929,0506	3,13	36604,0971	3,58	47760,9455
2,24	18901,7795	2,69	27127,9531	3,14	36835,9285	3,59	48025,7058
2,25	19068,4874	2,70	27327,5873	3,15	37068,4916	3,60	48292,9102

Tavola I.

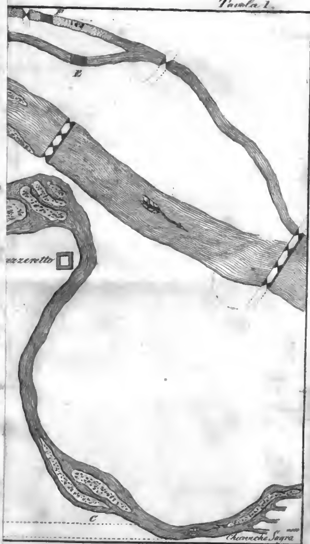
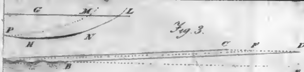
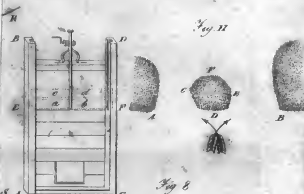




Tavola 2


G
M
L
P
H
N
Fig. 3.
C
F
D
B
E


R
Fig. 11
B
D
e
d
a
b
E
F
F
C
E
A
D
B

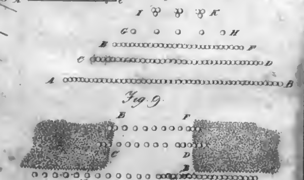

S
A
C
Fig. 8
I
K
G
H
E
F
C
D
A
B
Fig. 9.
E
F
C
D
B



Tavola 3

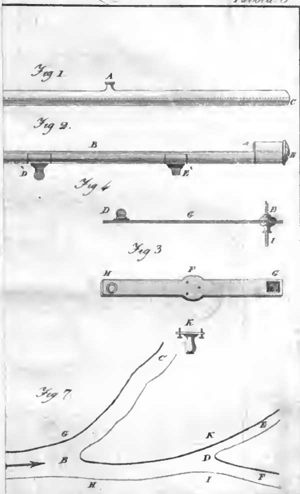




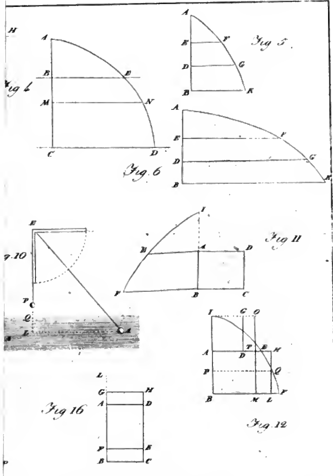
Tavola 4.


Fig. 3.

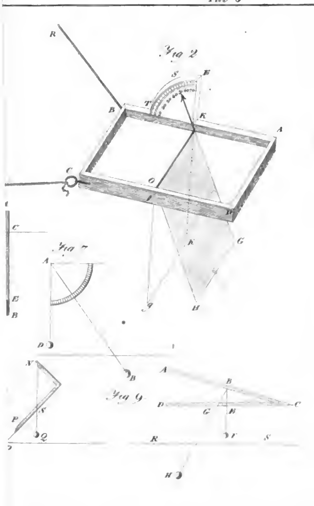

Fig. 5.
Fondo del Canale per cui l'Acqua
passa ad muovere le Pale della Ruota Idraulica



Tav. 5.



Tav 6



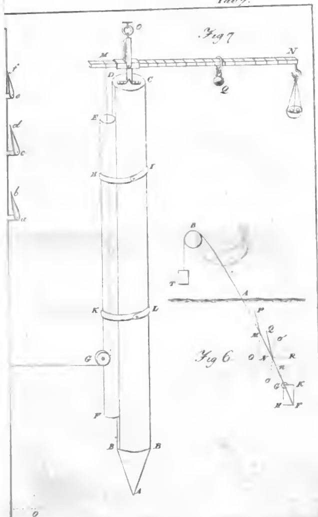
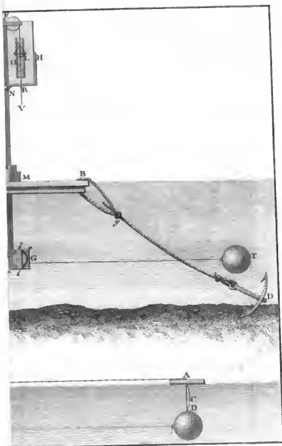


Fig. 7
O
M
N
D
C
Q
E
H
I
K
L
G
F
B
B
A
Fig. 6
B
T
A
P
Q
M
O
N
R
G
K
H
F
f
e
d
c
b
a




H
N
R
V
M
B
G
T
D
A
C
D

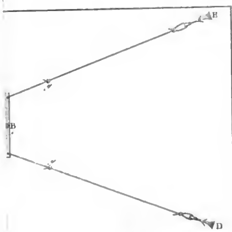
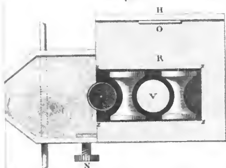
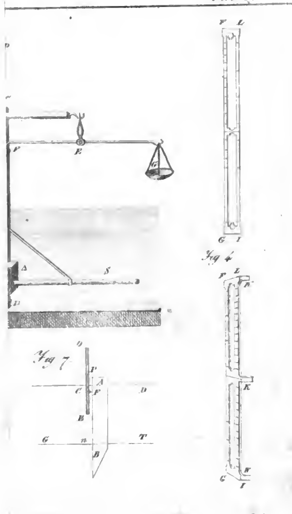
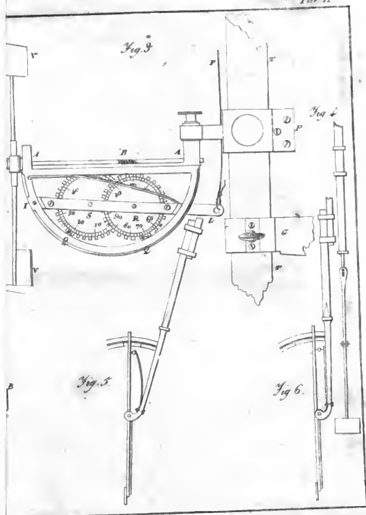


Fig. 3.




Tav 10
F
L
G
I
Fig 4
F
L
K
G
I
E
G
A
S
D
Fig 7
O
P
A
C
F
D
B
G
n
T
B

Tab. II



Tav. 12.

